

## 合工大(共创)考研辅导中心

### 2009 冲刺班(线代代数部分)讲义

#### 一、现阶段数学复习策略

**1 归纳整理**, 查漏补缺, 注意自己总结复习; **2 实战演练**, 做真题及模拟题(真实环境), 提高解题速度, 找出差错。 **3 积极备考**, 注意身体及心态;

#### 二、线性代数复习概论

线性代数中概念多、定理多、符号多、运算规律多, 内容相互纵横交错, 知识前后紧密联系是线性代数课程的特点。技巧少, 方法比较固定。

##### 1、吃透概念, 掌握性质

线性代数的概念很多, 重要的有:

代数余子式, 伴随矩阵, **逆矩阵**, 初等变换与初等矩阵, 正交变换与正交矩阵, **秩**(矩阵、向量组、二次型), 等价(矩阵、向量组), **线性组合与线性表出**, **线性相关与线性无关**, **极大线性无关组**, **基础解系与通解**, 解的结构与解空间, **特征值与特征向量**, **相似与相似对角化**, 二次型的**标准形与规范形**, **正定**, 合同变换与合同矩阵。

##### 2 正确熟练运用基本方法及基本运算

基本运算与基本方法要过关, 重要的有:

行列式(数字型、字母型)的计算, 求逆矩阵, 求矩阵的秩, 求方阵的幂, 求向量组的秩与极大线性无关组, 线性相关的判定或求参数, 求基础解系, 求(非)齐次线性方程组的通解, 求特征值与特征向量(定义法), 判断与求相似对角矩阵, 用正交变换化实对称矩阵为对角矩阵(亦即用正交变换化二次型为标准形)。

##### 3. 注重知识点的转换与联系

线性代数各章节的内容, 如行列式、矩阵、向量、方程组是线性代数的基本内容, 它们不是孤立隔绝的, 而是相互渗透, 紧密联系的, 例如

$A$  是  $n$  阶方阵, 若,  $|A| \neq 0$  (称  $A$  为非奇阵).  $\Leftrightarrow A$  是可逆阵.  $\Leftrightarrow$  有  $n$  阶方阵  $B$ , 使得  $AB=BA=E$ .  $\Leftrightarrow B=A^{-1}=A^*/|A|$ .  $\Leftrightarrow r(A)=n$  (称  $A$  是满秩阵).  $\Leftrightarrow$  存在若干个初等阵  $P_1, P_2, \dots, P_N$ , 使得  $P_N P_{N-1} \dots P_1 A = E$ .  $\Leftrightarrow (A | E) \rightarrow (E | A^{-1})$ .  $\Leftrightarrow A$  可表示成若干个可逆阵的乘积.  $\Leftrightarrow A$  可表示成若干个初等阵的积.  $\Leftrightarrow A$  的列向量组线性无关(列满秩).  $\Leftrightarrow AX=0$ , 唯一零解.  $\Leftrightarrow A$  的行向量组线性无关(行满秩).  $\Leftrightarrow A$  的列(行)向量组是  $R^n$  空间的基.  $\Leftrightarrow$  任何  $n$  维列向量  $b$  均可由  $A$  的列向量线性表出(且表出法唯一).  $\Leftrightarrow$  对任意的列向量  $b$ , 方程组  $AX=b$  有唯一解, 且唯一解为  $A^{-1}b$ .  $\Leftrightarrow A$  没有零特征值, 即  $\lambda_i \neq 0, i=1, 2, \dots, n$ .  $\Leftrightarrow A$  是正定阵(正交阵) 等等。这种相互之间的联系综合命题创造了条件, 故对考生而言, 应该认真总结, 开拓思路

#### 三、线性代数复习重点

大家知道, 线性代数前后知识的联系非常紧密, 所以我们在这一部分复习的时候, 一定要抓住我们线性代数的前后联系的这样一些关键点, 把知识连贯起来, 我们就会发现, 掌握起来是比较容易的。整个线性代数, 我个人认为, 可以分成三大块内容。第一部分, 行列式和矩阵, 是我们线性代数的基础部分, 基础部分一般来讲不考大题。以这个为基础,

另外两部分,一部分是向量和线性方程组,一般情况下每年在这个部分考一个大题,还有特征向量与二次型,其次特别是二次型,也可以看作同一件事情的两个不同方面。

### 第一部分,行列式和矩阵(基础部分,一般考小题)

行列式这部分没有太多内容,主要就是行列式的意义、性质及计算。重点在于行列式的展开方法。这个问题就是重要的公式。一个矩阵  $A$  乘上  $A$  的伴随矩阵等于  $A$  的行列式乘以单位阵。

矩阵是一个基础,关联到整个线代,所以矩阵的运算非常重要,尤其不要做非法的运算。因为大家习惯了数的运算,在做矩阵运算的时候容易受到数的影响,所以这个地方大家要把它搞清楚。矩阵运算里一个很重要的就是初等变换。我们在解方程组,求特征向量都离不开的东西。这是我们矩阵部分的重点。

**重要题型:**

#### 1 计算行列式

#### 2 矩阵运算(逆矩阵计算与证明)

#### 3 求矩阵的秩

**例 1** 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  是  $n$  维列向量, 又  $A = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)$ ,  $B = (\alpha_n \ \alpha_1 \ \cdots \ \alpha_{n-1})$ ,

如  $|A| = 3$ , 则  $|A+B| = \underline{\hspace{2cm}}$ ;

解

因

为

$$A+B = (\alpha_1 + \alpha_n \ \alpha_2 + \alpha_1 \ \cdots \ \alpha_n + \alpha_{n-1}) = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{又} \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ 1 & & & & 1 \end{vmatrix} = 1 + (-1)^{n+1}, \text{ 所以 } |A+B| = 3(1 + (-1)^{n+1})$$

**例 2.** 已知  $A, B$  均为 3 阶不可逆矩阵, 且满足  $AB+5B=0$ , 若  $r(B)=2$ , 则行列式  $|A+E| = \underline{\hspace{2cm}}$

解: 设  $B = (\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3)$ , 由  $(A+5E)B=0$  知,  $\lambda = -5$  是矩阵  $A$  的特征值, 且  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  是关于特征值 -5 的特征向量。由  $r(B)=2$ , 所以  $\lambda = -5$  至少有 2 个线性无关的特征向量。所以  $\lambda = -5$  至少是二重特征值。又因矩阵  $A$  不可逆,  $\lambda = 0$  必是矩阵  $A$  的特征值。从而  $A$  的特征值是 -5, -5, 0,  $A+E$  的特征值为 -4, -4, 1, 故  $|A+E| = (-4)(-4)1 = 16$ 。

**例 3** 设  $n$  阶矩阵  $A, B$  满足  $(AB)^2 = E$ , 则必有

(A)  $AB = E$ ; (B)  $AB = -E$ ; (C)  $A^2B^2 = E$ ; (D)  $(BA)^2 = E$

解: 选 (D)

由  $(AB)^2 = E$  知  $ABAB = E$ , 且  $A, B$  可逆。进而  $BAB = B^{-1}$ , 所以  $BABA = (BA)^2 = E$ 。

**例 4 (矩阵秩)** 设  $A, B, C, D$  是四个 4 阶方阵, 其中  $A \neq 0, |B| \neq 0, |C| \neq 0, D \neq 0$ , 且满足

$ABCD = O$ , 若  $r(A) + r(B) + r(C) + r(D) = r$ , 则  $r$  的取值范围是

(A)  $r < 10$ ; (B)  $10 \leq r \leq 12$ ; (C)  $12 < r < 16$ ; (D)  $r \geq 16$ 。

解: 因  $A \neq 0, D \neq 0$ , 故  $r(A) \geq 1, r(D) \geq 1, r(A) + r(D) \geq 2$ , 又

$|B| \neq 0, |D| \neq 0, r(B) = 4, r(D) = 4$ , 从而有  $r(A) + r(B) + r(C) + r(D) \geq 10$ , 又有

$ABCD = O, r(AB) + r(CD) = r(A) + r(D) \leq 4$ , 从而有  $r(A) + r(B) + r(C) + r(D) \leq 12$

故选(B)

## 第二部分 向量与方程组 (重要, 一般考一大题)

向量这部分是逻辑性非常强的部分, 也是大家感到比较困难的, 这部分的逻辑推理很强, 大家一定要非常熟悉那些教材里重要的定理拿到一个题马上要能反映过来。比如说这样一个定理很多考生都觉得这个定理比较难, 其实可以形象地记。当然第一个向量组由第二个向量组表示, 第二个向量组线性无关, 可以推出第一个向量组含向量的个数小于第二个向量组含向量的个数。这个定理多次考了, 2003 年单独考了这个问题, 是一个选择题。其实这个题大家可以换一种方式记一下, 比如我习惯这样记, 就是说一个线性无关的向量组不可能由一个比它的个数还少的向量组线性表示, 这句话就表示了我们前面的定理。它的几何直观就是指一个高维空间的东西不能放到低维空间, 至少放到同维空间。比如一个立体的东西是放不到一个平面中去的, 放不到一条直线上去的。你这样把几何直观理解后, 这个定理就不会记错了。

关于向量, 证明(或判别)向量组的线性相关(无关), 线性表出等问题的关键在于深刻理解线性相关(无关)的概念及几个相关定理的掌握, 并要注意推证过程中逻辑的正确性及反证法的使用。向量组的极大无关组, 等价向量组, 向量组及矩阵的秩的概念, 以及它们相互关系也是重点内容之一。用初等行变换是求向量组的极大无关组及向量组和矩阵秩的有效方法。

方程组中解的判定、解的性质、解的结构这三部分要搞清楚

### 重要题型

- 1 判定向量组线性相关性;
- 2 向量组的线性表示
- 3 求向量组的秩与极大无关组
- 4 方程组(齐次, 非齐次)解的判定与求解
- 5 方程组的公共解与同解。

**例 5** 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 向量  $\beta_1$  能由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表出, 向量  $\beta_2$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表出, 则必有( )。

- (A)  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$  线性无关 (B)  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$  线性相关



解, 已知方程组  $Ax=0$  的通解为  $k(1 \ 0 \ 1 \ 0)^T$ , 故  $r(A)=4-1=3$ ,  $r(A^*)=1$ , 故方程组  $A^*x=0$  的基础解系含 3 个解向量所以 (D) 不正确。由  $AA^*=0$ , 知  $A$  的列向量  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  均为  $A^*x=0$  的解向量。由题设方程组  $Ax=0$  的解为  $(1 \ 0 \ 1 \ 0)^T$ , 故  $\alpha_1 + \alpha_3 = 0$  从而  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关,  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$  线性相关, 故(A),(B)不正确。因  $r(A)=3$ , 故  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  存在 3 个线性无关的向量, 由  $\alpha_1 + \alpha_3 = 0$  知  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  和  $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$  均线性相关, 还剩下两组  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  和  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ , 由  $\alpha_1 = -\alpha_3$  知同时相关或无关。故  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  必线性无关。否则与  $r(A)=3$  矛盾。选 (C)。

**例 8** 已知矩阵  $A=(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4)$  是 4 阶方阵,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  是 4 维列向量。若方程组  $Ax=\beta$  的通解是  $(1 \ 2 \ 2 \ 1)^T + k(1 \ -2 \ 4 \ 0)^T$ , 又  $B=(\alpha_3 \ \alpha_2 \ \alpha_1 \ \beta - \alpha_4)$ , 求方程组  $Bx=2\alpha_1 + \alpha_2$  的通解。

解: 由方程组  $Ax=\beta$  解的结构, 可知  $r(A)=r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)=3$ , 且

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 = \beta, \alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0, \text{ 因为}$$

$$B=(\alpha_3 \ \alpha_2 \ \alpha_1 \ \beta - \alpha_4)=(\alpha_3 \ \alpha_2 \ \alpha_1 \ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3), \text{ 且 } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 线性相关。}$$

而知秩  $r(B)=2$ 。由

$$B \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (\alpha_3 \ \alpha_2 \ \alpha_1 \ \beta - \alpha_4) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\alpha_1 + \alpha_2, \text{ 知 } \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 是方程组 } Bx=2\alpha_1 + \alpha_2 \text{ 一个解}$$

$$B \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (\alpha_3 \ \alpha_2 \ \alpha_1 \ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3) \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4\alpha_3 - 2\alpha_2 + \alpha_1 = 0,$$

$$B \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (\alpha_3 \quad \alpha_2 \quad \alpha_1 \quad \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3) \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0,$$

可知  $(4 \quad -2 \quad 1 \quad 0)^T$ ,  $(2 \quad -4 \quad 0 \quad 1)^T$  是  $Bx=0$  的两个线性无关解。故  $Bx=0$  的通解为

$$(0 \quad 2 \quad 1 \quad 0)^T + k_1(4 \quad -2 \quad 1 \quad 0)^T + k_2(2 \quad -4 \quad 0 \quad 1)^T。$$

**例 9** 已知 4 元齐次线性方程组 (1)  $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ ax_1 + a^2x_3 = 0 \\ ax_2 + a^2x_4 = 0 \end{cases}$  的解全是 4 元线性方程组

(2):  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$  的解,

(1) 求  $a$  的值; (2) 求齐次方程组 (1) 的解; (3) 求齐次方程组 (2) 的解。

解: (1) 因为方程组 (1) 的解全是 (2) 的解, 所以 (1) 与 (3)  $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ ax_1 + a^2x_3 = 0 \\ ax_2 + a^2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$  同解。

从而系数矩阵有相同的秩。如  $a=0$ , 则  $r(A)=1$ , 而  $r(B)=2$ , 所以下设  $a \neq 0$ , 由于

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & a & 0 & a^2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ 0 & 0 & a & a-1 \end{pmatrix}, \text{ 因为 } a \text{ 和 } a-1 \text{ 不能同时为 } 0, \text{ 故}$$

$r(A)=3$ , 又

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & a & 0 & a^2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2a-1 \end{pmatrix},$$

当  $a = \frac{1}{2}$  时,  $r(B)=3$ , 此时 (1) 与 (3) 同解。

(2) 由于  $A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ , 基础解系为  $\eta = (-\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad 1 \quad 1)^T$ , 通解  $k\eta$ ;

(3) 由于 (2):  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$  的基础解系为  $\eta_1 = (-1 \quad 1 \quad 0 \quad 0)^T$ ,

$\eta_2 = (-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0)^T$ ,  $\eta_3 = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)^T$ , 通解  $k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + k_3\eta_3$ 。

**例 10** 已知  $A$  是  $2 \times 4$  的矩阵, 齐次方程组  $Ax=0$  的基础解系是  $\eta_1 = (1 \ 3 \ 0 \ 2)^T$ ,  $\eta_2 = (1 \ 2 \ -1 \ 3)^T$ , 又知齐次方程组  $Bx=0$  基础解系是  $\beta_1 = (1 \ 1 \ 2 \ 1)^T$ ,  $\beta_2 = (0 \ -3 \ 1 \ a)^T$

(1) 求矩阵  $A$ ;

(2) 如果齐次方程组  $Ax=0$  与  $Bx=0$  有非 0 公共解, 求  $a$  的值并求公共解。

解: (1) 记  $C = (\eta_1 \ \eta_2)$ , 由  $AC = A(\eta_1 \ \eta_2) = 0$ , 知  $C^T A^T = 0$ , 那么矩阵  $A^T$  的列向量 (即矩阵  $A$  的行向量) 是齐次方程组  $C^T x = 0$  的解, 对  $C^T$  作初等行变换, 有

$C^T \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ , 得到  $C^T x = 0$  的基础解系为

$\alpha_1 = (3 \ -1 \ 1 \ 0)^T$ ,  $\alpha_2 = (-5 \ 1 \ 0 \ 1)^T$ 。所以矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 。

(3) 设齐次方程组  $Ax=0$  与  $Bx=0$  的非 0 公共解为  $\gamma$ , 则  $\gamma$  既可由  $\eta_1, \eta_2$  线性表出,

也可由  $\beta_1, \beta_2$  线性表出, 故可设  $\gamma = x_1\eta_1 + x_2\eta_2 = -x_3\beta_1 - x_4\beta_2$ , 于是

$$x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + x_3\beta_1 + x_4\beta_2 = 0, \text{ 又 } (\eta_1 \ \eta_2 \ \beta_1 \ \beta_2) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix},$$

$$\gamma \neq 0 \Leftrightarrow x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ 不全为 } 0 \Leftrightarrow r(\eta_1 \ \eta_2 \ \beta_1 \ \beta_2) < 4 \Leftrightarrow a = 0,$$

(4) 当  $a=0$  时解出  $x_4=t, x_3=-t, x_2=-t, x_1=2t$ , 因此  $Ax=0$  与  $Bx=0$  的公共

$$\text{解为 } \gamma = 2t\eta_1 - t\eta_2 = t(1 \ 4 \ 1 \ 1)^T.$$

### 第三部分 特征值、对角化与二次型 (重要, 一般考一大题)

再一个就是特征值和特征向量, 对于特征值对具体的你可以解一个具体的方程好了。特征向量就是求齐次方程组的基础解系, 你前面基础打牢了, 这里又不是新的内容。

二次型只要把其矩阵对应写出来, 其问题都可以转化为对称矩阵的对角型来讨论。所以后面的内容又联系上前面的东西。把前面的基础打牢, 后面的知识自然就掌握了。线性代数碰到解析的问题, 有时候是把矩阵的问题化成线性方程组来做, 有时候是把线性方程组的问题化成矩阵来解决。如果在解题过程中提到了某一个向量是另一个向量, 我们就可以把这一另一向量用单位向量来替代, 这样就可以很快得出结果。再一点就是方阵的特征值和特征向量, 这一点广大考生一定要注意, 这是我们线性代数重点的重点, 每年一定要在这里面出大题。

#### 重要题型;

##### 1 求特征值与特征向量;

## 2 相似对角化判定与计算

## 3 求二次型的标准形

## 4 正定矩阵(二次型)的判定与证明。

**例 11** 设  $A$  为 3 阶方阵, 其特征值是 1, 3, -2, 相应的特征向量依次为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , 若

$P = (\alpha_1 \ 3\alpha_2 \ -\alpha_3)$ , 则  $P^{-1}A^*P =$

$$(A) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -6 & \\ & & -3 \end{pmatrix} \quad (B) \begin{pmatrix} -6 & & \\ & -2 & \\ & & -3 \end{pmatrix} \quad (C) \begin{pmatrix} -6 & & \\ & 3 & \\ & & -2 \end{pmatrix} \quad (D) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$$

解选 (C) 由题意知  $|A| = 1 \times 3 \times (-2) = -6$ , 故  $A^* = |A|A^{-1}$  的特征值为 -6, -2, 3, 对应的

特征向量依次为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , 因此  $\alpha_1, 3\alpha_2, -\alpha_3$  分别是  $A^*$  属于特征值 -6, 3, -2 的特征向量,

所以选 (C)

**例 12** 设  $A$  为  $n > 1$  阶方阵,  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  是  $n$  维列向量, 已知  $A\xi_1 = \xi_2$ ,  $A\xi_2 = \xi_3$ ,

$\dots, A\xi_{n-1} = \xi_n$ ,  $A\xi_n = 0$ , 且  $\xi_n \neq 0$  (1) 证明:  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  线性无关; (2) 求  $Ax = 0$

的解; (3) 求出  $A$  的全部特征值与特征向量, 并证明  $A$  不可对角化。

解: 设  $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_n\xi_n = 0$ , 依次在等式两边左乘  $A, A^2, \dots, A^{n-1}$ , 分别得

$$k_1\xi_2 + k_2\xi_3 + \dots + k_{n-1}\xi_n = 0, \quad k_1\xi_3 + k_2\xi_4 + \dots + k_{n-2}\xi_n = 0, \quad k_1\xi_{n-1} + k_2\xi_n = 0,$$

$k_1\xi_n = 0$ , 因为  $\xi_n \neq 0$ , 故  $k_1 = 0$ , 并依次回代得  $k_2 = k_3 = \dots = k_n = 0$ , 所以  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$

线性无关。

( 2 )

由 题 意

$$A(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n) = (\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n, 0) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n) \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

又因为  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  线性无关, 故  $R(A) = n-1$ , 而  $A\xi_n = 0, \xi_n \neq 0$ , 因此  $\xi_n$  为  $Ax = 0$  的

基础解系, 所以  $Ax = 0$  的通解为  $k\xi_n$ 。

(3) 记  $P = (\xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_n)$ , 则  $P$  可逆。且  $PAP^{-1} = \Lambda$ , 由此可得  $A$  的特征值全为 0,

其特征向量为  $k\xi_n (k \neq 0)$ , 从而属于特征值 0 的线性无关特征向量仅有 1 个, 故  $A$  不可对

角化。

**例 13** 设二次型  $x^T A x = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2bx_1x_3 + 2cx_2x_3$  矩阵  $A$  满足  $AB = 0$ ,

$$\text{其中 } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

(1) 用正交变换化二次型  $x^T A x$  为标准形, 并写出所用的正交变换; (2) 求  $(A - 3E)^6$ 。

解: (1) 由  $AB = 0$  知矩阵  $B$  的列向量是齐次方程组  $Ax = 0$  的解, 记  $\alpha_1 = (1 \ 0 \ 1)^T, \alpha_2 = (2 \ -1 \ 0)^T$ , 则  $A\alpha_1 = 0 = 0\alpha_1, A\alpha_2 = 0 = 0\alpha_2$ , 所以  $\lambda = 0$  是矩阵  $A$  的特征值 (至少是二重),  $\alpha_1, \alpha_2$  是  $\lambda = 0$  的线性无关的特征向量。根据  $0 + 0 + \lambda_3 = 1 + 1 + 4$ , 知矩阵  $A$  有特征值  $\lambda = 6$ , 因此矩阵  $A$  的特征值为  $0, 0, 6$ 。

设  $\lambda = 6$  的特征向量为  $\alpha_3 = (x_1, x_2, x_3)^T$ , 则由  $\begin{cases} \alpha_1^T \alpha_3 = x_1 + x_3 = 0 \\ \alpha_2^T \alpha_3 = 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$ , 解出

$$\alpha_3 = (1 \ 2 \ -1)^T, \text{ 将 } \alpha_1, \alpha_2 \text{ 正交化。令 } \beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = (1 \ -1 \ -1)^T。$$

单位化, 得  $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \ 0 \ 1)^T, \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 \ -1 \ -1)^T, \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1 \ 2 \ -1)^T$ ,

$Q = (\gamma_1 \ \gamma_2 \ \gamma_3)$ , 经正交变换  $x = Qy$ , 二次型可化为标准形  $x^T A x = y^T \Lambda y = 6y_3^2$ 。

$$(2) \text{ 因为 } A \sim \Lambda, (A - 3E)^6 \sim (\Lambda - 3E)^6, \text{ 又 } \Lambda - 3E = \begin{pmatrix} -3 & & \\ & -3 & \\ & & 3 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } Q^{-1} A Q = \Lambda$$

得  $Q^{-1}(A - 3E)^6 Q = (\Lambda - 3E)^6 = 3^6 E$ , 于是

$$(A - 3E)^6 = Q(\Lambda - 3E)^6 Q^{-1} = Q(3^6 E) Q^{-1} = 3^6 E。$$

**例 14** 设  $n$  阶实对称矩阵  $A$  满足  $A^2 = E$ , 且  $r(A + E) = k < n$  (1) 求二次型  $x^T A x$  为规范形; (2) 证明  $B = E + A + A^2 + A^3 + A^4$  是正定矩阵, 并求行列式  $|B|$  的值。

解: (1) 设  $\lambda$  是矩阵  $A$  的特征值, 对应的特征向量为  $\alpha$ , 即  $A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$ , 则  $A^2\alpha = \lambda^2\alpha$ , 由  $A^2 = E$  得  $(\lambda^2 - 1)\alpha = 0$ , 得  $\lambda = 1$  或  $\lambda = -1$ 。因为  $A$  是实对称, 所以对

角化。且  $r(A+E)=k$ ，于是  $A+E \sim \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$ ，那么矩阵  $A$  的特征值为

$1(k\text{个})$ ， $-1(n-k\text{个})$ ，故二次型规范形为  $x^T A x = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \cdots - y_n^2$ 。

(2) 因为  $A^2 = E$ ，故  $B = E + A + A^2 + A^3 + A^4 = 3E + 2A$ ，矩阵  $B$  的特征值为  $5(k\text{个})$ ， $1(n-k\text{个})$ ，由于  $B$  的特征值全大于 0，且  $B$  是对称矩阵，因此  $B$  是正定矩阵。且  $|B| = 5^k 1^{n-k} = 5^k$ 。

**例 15** 设  $A$  是 3 阶矩阵，已知  $\alpha, A\alpha, A^2\alpha$  线性无关，且  $A^3\alpha = 3A\alpha - 2A^2\alpha$ ，证明：

(1) 矩阵  $B = (\alpha \quad A\alpha \quad A^4\alpha)$  可逆；

(2)  $B^T B$  为正定矩阵。

证明：(1) 由于  $A^3\alpha = 3A\alpha - 2A^2\alpha$ ，故

$$A^4\alpha = 3A^2\alpha - 2A^3\alpha = 3A^2\alpha - 2(3A\alpha - 2A^2\alpha) = 7A^2\alpha - 6A\alpha。若$$

$k_1\alpha + k_2A\alpha + k_3A^4\alpha = 0$ ，代入得  $k_1\alpha + (k_2 - 6k_3)A\alpha + 7k_3A^2\alpha = 0$ ，因为  $\alpha, A\alpha, A^2\alpha$  线

性无关，故  $\begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 - 6k_3 = 0 \\ 7k_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$ ，所以  $\alpha, A\alpha, A^4\alpha$  线性无关，因而  $B$  可

逆。解法 2：

$$\because A^4\alpha = 3A^2\alpha - 2A^3\alpha = 3A^2\alpha - 2(3A\alpha - 2A^2\alpha) = 7A^2\alpha - 6A\alpha$$

$$\therefore (\alpha \quad A\alpha \quad A^4\alpha) = (\alpha \quad A\alpha \quad A^2\alpha) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}，由 \alpha, A\alpha, A^2\alpha 线性无关，而$$

$$\begin{vmatrix} 1 & & \\ & 1 & -6 \\ & & 7 \end{vmatrix} \neq 0，根据结论，知 \alpha, A\alpha, A^4\alpha 线性无关$$

(2) 因为  $(B^T B)^T = B^T B$ ，故  $B^T B$  为对称矩阵。又  $\forall x \neq 0$ ，由于矩阵  $B$  可逆，恒有  $Bx \neq 0$ ，

那么  $x^T(B^TB)x = (Bx)^T(Bx) > 0$  故二次型为正定二次型, 从而矩阵  $B^TB$  为正定矩阵。

(备用) 已知 4 维向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 若  $\beta_i (i=1, 2, 3, 4)$  非 0 且与  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  均正交,

则秩  $r(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = \underline{\hspace{2cm}}$

解 记  $A = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T \end{pmatrix}$ ,  $A$  是秩为 3 的  $3 \times 4$  的矩阵, 由于  $\beta_i$  与  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  均正交, 故  $\beta_i$  是齐次方

程组  $Ax = 0$  的非 0 解, 由因  $\beta_i$  非 0, 故  $1 \leq 1 \leq r(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \leq n - r(A) = 1$ , 所以

$$r(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = 1.$$

(备用) 已知  $5 \times 4$  的矩阵  $A = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4)$ , 若  $\eta_1 = (3 \ 1 \ -2 \ 1)^T$ ,

$\eta_1 = (0 \ 1 \ 0 \ 1)^T$  是齐次线性方程组  $Ax = 0$  的基础解系, 则下列命题

- (1)  $\alpha_1, \alpha_3$  线性无关      (2)  $\alpha_1$  可由  $\alpha_2, \alpha_3$  线性表出  
(3)  $\alpha_3, \alpha_4$  线性无关      (4)  $r(\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_3 - \alpha_4) = 3$

中正确的是

- (A) (1), (3)      (B) (2), (4)      (C) (2), (3)      (D) (1), (4)。

解: 由  $\eta_1, \eta_2$  是齐次方程组  $Ax = 0$  的解, 有

$$A\eta_1 = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 + \alpha_4 = 0, (*)$$

$$A\eta_2 = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_2 + \alpha_4 = 0, (**)$$

(\*)-(\*\*) 得  $3\alpha_1 - 2\alpha_3 = 0$  或  $\alpha_1 = 0\alpha_2 + \frac{2}{3}\alpha_3$ , 故命题 (1) 错误, 故命题 (2) 正确。

由  $\eta_1, \eta_2$  是齐次方程组  $Ax = 0$  的基础解系, 知  $n - r(A) = 2$ , 那么

$r(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4) = r(A) = 2$ , 如果  $\alpha_3, \alpha_4$  线性相关, 则  $\alpha_4 = k\alpha_3$ , 又  $\alpha_1 = \frac{2}{3}\alpha_3$ ,

$\alpha_2 = -\alpha_4$ , 与  $r(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4) = r(A) = 2$  矛盾。故命题 (3) 正确。用排除法知 (4)

错误。当然也可由  $r(\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_3 - \alpha_4) = r(\alpha_1, \alpha_2, 0) \leq 2$ ，得到命题（4）错误。综上所述，应选（C）。