

常微分方程

主讲：肖萍



数学与计量经济学院

第一章 微分方程的基本概念

● 教学要求

● 引言



结束

● 实际问题中的一些常微分方程

● 例1

● 例2

● 例3

● 例4

● 微分方程的概念

● 例5

● 微分方程的解的概念

● 例6

● 微分方程的积分曲线的概念

● 例7

● 例8





返回

教学要求

- (1) 了解微分方程，了解微分方程的阶、线性和非线性，微分方程的解、通解、初始条件和特解等概念。
- (2) 会建立一些简单的几何和物理问题的微分方程模型。

完



引言



微分方程是研究函数的数量关系，完整的理论体系中，微分方程与积分方程是不可分割的。微分方程在物理学、力学、天文学、生物学、经济学等领域都有广泛的应用。微分方程的研究不仅具有理论意义，而且具有重要的实际应用价值。本书主要介绍常微分方程的基本理论和求解方法，包括一阶线性微分方程、二阶线性微分方程、非线性微分方程等。本书可作为高等院校理工科专业及相关专业的教材，也可供从事相关工作的工程技术人员参考。

完

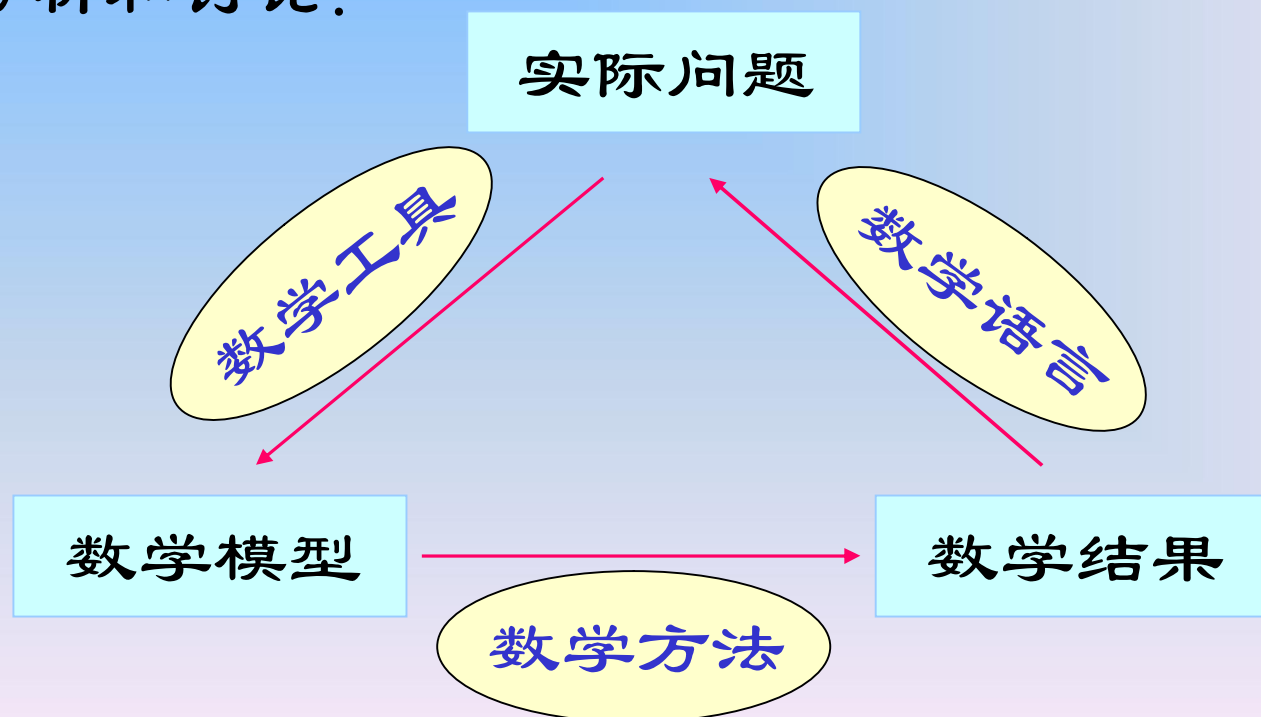


实际问题中的一些常微分方程



返回

应用数学手段研究自然现象, 社会问题或解决工程技术问题, 一般要依据该问题相关的规律建立数学模型, 然后对模型进行简化和求解, 最后结合实际问题对结果进行分析和讨论.



完



例1

物体冷却过程的数学模型

一物体在温度为 $u_a = 24^\circ\text{C}$ 的恒温介质中冷却, 设它的初始温度为 $u_0 = 150^\circ\text{C}$, 10分钟后它降到 $u_{10} = 100^\circ\text{C}$. 试求出20分钟后该物体的温度 u .

解: (1) 物理依据——Newton冷却定律: 物质温度变化速度与
该物质和其所在介质的温差成正比, 即

(2) 数学模型—— $\frac{du}{dt} \propto (u - u_a)$ 一阶常微分方程

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -k(u - u_a), k > 0 \\ u|_{t=0} = u_0 = 150. \end{cases}$$

初始条件

代入初始条件



返回

(3) 求解 通解: $u = u_a + ce^{-kt}$

特解: $u = 24 + 126e^{-kt}$

(4) 本问题的温度与时间的关系——确定 k 的值

由 $k = \frac{1}{10} \ln \frac{126}{100 - 24} \approx 0.051$ 得 $u = 24 + 126e^{-0.051t}$



(5) 答案

$$u_{20} \approx 70^\circ\text{C}$$

完



例2

物体运动过程的数学模型

一质量为 m 的物体以初速度 v_0 在距地面为 H 的高处自由落体,不计空气阻力,试求 (a) 物体在 t 时刻的位移 $s(t)$; (b) 物体落地时间 T .

解: (1) 物理依据——Newton第二运动定律: $F=ma$

(2) 数学模型——二阶常微分方程

如图(1.1)建立
直角坐标系

$$\begin{cases} m \frac{d^2 s}{dt^2} = mg, \\ s|_{t=0} = 0, \frac{ds}{dt}|_{t=0} = v_0 \end{cases}$$

(3) 求解 (a) 所以 $\int g dt = gt + \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$

(b) 由 $s(T) = H$ 得 $\int_0^T (gt + \frac{1}{2}gt^2 + v_0) dt = H$

将初始条件代入得 $(-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gH})$.

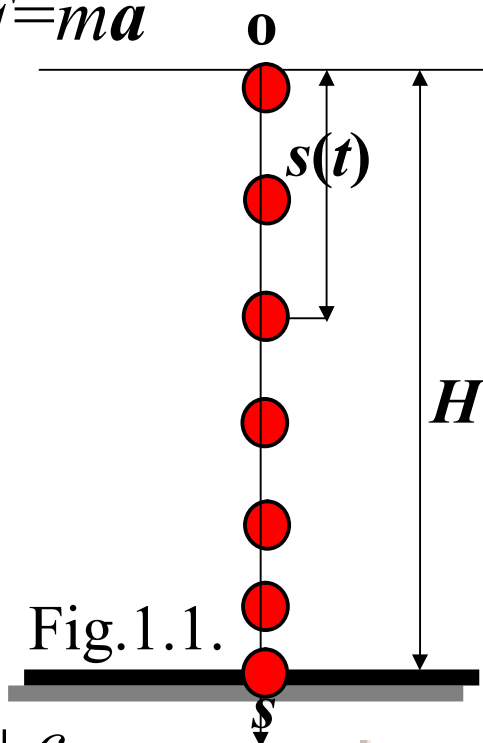


Fig.1.1.



完



返回

例3

解析几何模型

求一曲线,该曲线过点(1, 2)且曲线上任一点(x, y)处的切线斜率为该点横坐标的2倍.

解: (1) 建模依据——曲线 $y=y(x)$ 导数的几何意义.

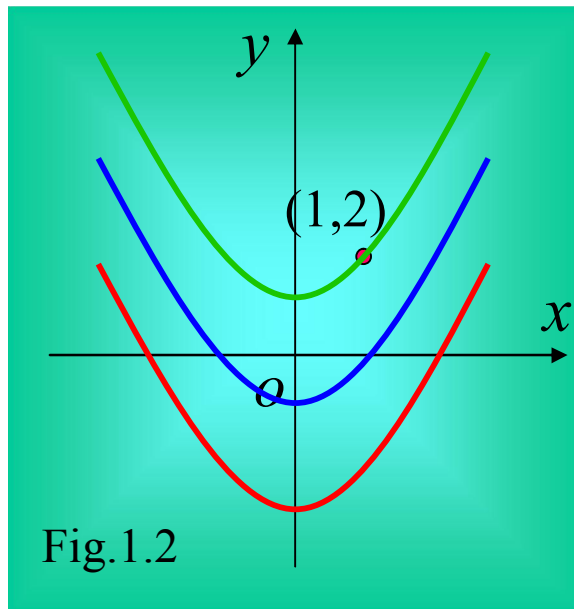
(2) 数学模型

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2x, \\ y|_{x=1} = 2. \end{cases}$$

(3) 求解

通解: $y = x^2 + c$ 曲线族

特解: $y = x^2 + 1$ 过(1, 2)满足题意的一条曲线.



返回

完





例4

传染病模型

在某个城镇发生了一种传染病, 应立刻采取隔离措施. 设该城镇总人数为 N , 以 $x(t)$ 表示 t 时刻已传染人数, 开始时 $x(0)=x_0$, 以 $y(t)$ 表示 t 时刻尚未被染上病的人数. 若暂时不考虑死亡的问题和不区分敏感人群, 免疫人群问题, 试建立传染病的数学模型.

解: (1) **建模依据**——在单位时间内传染上病的人数与尚未被染上病的人数成正比.

(2) 数学模型

Δt 时间内 $x(t)$ 的平均改变量: $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$

Δt 时间内 $x(t)$ 的平均变化率为: $\frac{\Delta x}{\Delta t} / x(t)$

$x(t)$ 的瞬时变化率为: $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} / x(t) = \frac{dx(t)}{dt} / x(t)$

$\therefore \frac{dx}{dt} / x(t) = ry(t) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx(N - x), & r > 0, \\ x(0) = x_0 \end{cases}$



返回

完



微分方程的概念

联系着自变量、未知函数及未知函数导数(或微分)的方程称为**微分方程**. 方程中出现的未知函数最高阶导数的阶数称为该方程. 未知函数为一元函数的微分方程称为**常微分方程**. 未知函数为多元函数的微分方程称为**偏微分方程**.

注意:未知函数可以不出现,但其导数不可以不出现哦!

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

分别是一阶和二阶偏微分方程. 而

$$\frac{dy}{dx} = y \tan x + x^3, \quad t \frac{d^2 x}{dt^2} - 2 \left(\frac{dx}{dt} \right)^3 + t^2 x = 0,$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x) y = f(x),$$

分别是一阶, 二阶和 n 阶常微分方程. 它们都是微分方程.



本课程我们只讨论常微分方程.常微分方程的一般形式是:

$$F(x, y, y', y'' \cdots, y^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

n 阶隐式方程

如果能从方程(1)中解出最高阶导数,就得到微分方程

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}). \quad (2)$$

n 阶显式方程

如果方程(1)可表为如下形式:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \quad (3)$$

则称为 **n 阶线性微分方程**, 其中 $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_n(x)$ 和 $f(x)$ 均为自变量 x 的已知函数. 当 $f(x)=0$, 方程(3)成为

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \quad (4)$$

方程(4)称为 **n 阶齐线性方程**. 相应地, 方程(3)称为 **n 阶非齐线性方程**. 不能表示成形如(3)式的微分方程, 统称为**非线性方程**.



返回

完





例5 试指出下列方程是什么方程,并指出微分方程的阶数.

$$(1) \frac{dy}{dx} = x^2 + y;$$

$$(2) x \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2 \frac{dy}{dx} + 4x = 0;$$

$$(3) x \frac{d^2 y}{dx^2} - 2y \frac{dy}{dx} + 5xy = 0; \quad (4) \cos(y^{(3)}) + \ln y = x + 1;$$

$$(5) y^{(n)} + \sin xy^{(n-1)} = (\cos x + \sin x).$$

解: (1) 一阶非齐线性微分方程;

(2) 一阶非线性微分方程;

(3) 二阶非线性微分方程;

(4) 三阶非线性微分方程;

(5) n 阶非齐线性微分方程;

完



返回



微分方程的解的概念

代入微分方程能使方程称为恒等式的函数称为该微分方程的**解**. 更确切地说, 设函数 $y=\varphi(x)$ 在区间 I 上有 n 阶连续导数, 如果在区间 I 上, 有

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x) \cdots, \varphi^{(n)}(x)) = 0,$$

则称函数 $y=\varphi(x)$ 为微分方程(1)在区间 I 上的解. 例如,

(a) $y = x^2 + 1$; (b) $y = x^2 + c$ 都是方程 $\frac{dy}{dx} = 2x$ 的解.

一般地, 微分方程的含有任意常数且相互独立的任意常数的个数与微分方程的阶数相等的解称为微分方程的**通解**.

注1: 这里所说的相互独立的任意常数, 是指它们不能通过合并而使得通解中的任意常数的个数减少.

注2: 怎样判断 n 阶微分方程的解 $y=\varphi(x, c_1, \dots, c_n)$ 中的 n 个常数是否相互独立?



微分方程的解的概念

一般可使用Jacobian来进行判断, 即若

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial c_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial c_2} & \dots & \frac{\partial \varphi}{\partial c_n} \\ \frac{\partial \varphi'}{\partial c_1} & \frac{\partial \varphi'}{\partial c_2} & \dots & \frac{\partial \varphi'}{\partial c_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi^{(n-1)}}{\partial c_1} & \frac{\partial \varphi^{(n-1)}}{\partial c_2} & \dots & \frac{\partial \varphi^{(n-1)}}{\partial c_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

则 $y = \varphi(x, c_1, \dots, c_n)$ 中的 n 个常数相互独立.

再如,

$$y = c_1 x + c_2 \quad \therefore \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial c_1} & \frac{\partial y}{\partial c_2} \\ \frac{\partial y'}{\partial c_1} & \frac{\partial y'}{\partial c_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$\therefore c_1, c_2$ 相互独立.

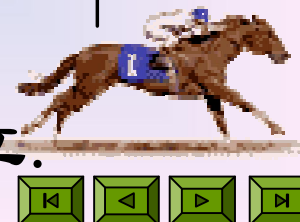
例如,

$$y = c_1 x^2 + c_2 x + c_3$$

$$\therefore \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial c_1} & \frac{\partial y}{\partial c_2} & \frac{\partial y}{\partial c_3} \\ \frac{\partial y'}{\partial c_1} & \frac{\partial y'}{\partial c_2} & \frac{\partial y'}{\partial c_3} \\ \frac{\partial y''}{\partial c_1} & \frac{\partial y''}{\partial c_2} & \frac{\partial y''}{\partial c_3} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x^2 & x & x \\ 2x & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore c_1, c_2, c_3$ 不相互独立.



微分方程的解的概念

许多实际问题都要求寻找满足某些附加条件的解, 此时, 这类附加条件就可以用来确定通解中的任意常数, 这类附加条件称为**定解条件**. 方程满足定解条件的解称为**特解**.

其中定解条件是在自变量同一值处给出的称为**初始条件**. 定解条件是在自变量不同值处给出的称为**边值条件**.

带有初始条件的微分方程称为微分方程的**初值问题**, 也称**Cauchy问题**. 带有边值条件的微分方程称为微分方程的**边值问题**. 例如,

$$y'' + 2y' = e^x; y(\pi) = 1, y'(\pi) = 2$$

是一微分方程的初值问题.

$$y'' + 2y' = e^x; y(0) = 1, y(1) = 1$$

是一微分方程的边值问题.



微分方程的解的概念



返回

一般地, 一阶微分方程的初值问题为:
$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y|_{x=x_0} = y_0. \end{cases}$$

二阶微分方程的初值问题为:
$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \\ y|_{x=x_0} = y_0; y'|_{x=x_0} = y'_0. \end{cases}$$

二阶微分方程的边值问题为:
$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \\ y|_{x=x_0} = y_0; y|_{x=x_1} = y_1. \end{cases}$$

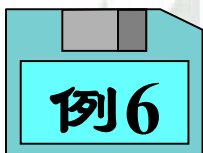
n 阶微分方程的初值问题为:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \\ y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0, \dots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}, \end{cases}$$

其中, $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ 是给定的值.

完





验证函数 $y = (x^2 + C)\sin x$ (C 为任意常数) 是方程

$$\frac{dy}{dx} - y \cot x - 2x \sin x = 0$$

的通解, 并求满足初始条件 $y|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0$ 的解.

解: 将函数 $y = (x^2 + C)\sin x$ 求导, 得

$$y' = 2x \sin x + (x^2 + C) \cos x$$

将 y, y' 代入方程, 得

$$\text{左} = 2x \sin x + (x^2 + C) \cos x - (x^2 + C) \sin x \cot x - 2x \sin x \equiv 0 = \text{右}$$

函数 $y = (x^2 + C)\sin x$ 是方程的解, 又 y 含有一个任意常数,

所以, 函数 $y = (x^2 + C)\sin x$ 是方程的通解.

将初始条件代入 $y = (x^2 + C)\sin x$, 得 $C = -\frac{\pi^2}{4}$.

所以, 方程满足初始条件的特解为 $y = (x^2 - \frac{\pi^2}{4})\sin x$.



返回

完



微分方程的积分曲线的概念



返回

考虑定义在 xOy 平面的区域 G 内的一阶微分方程

$$y' = f(x, y), \quad (x, y) \in G, \quad (4)$$

完

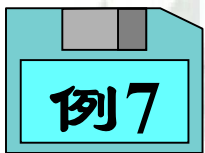
方程(4)的解的图形是 xOy 平面上的一条曲线,称为方程(4)的**积分曲线**.

$\forall (x, y) \in G$, 我们称以点 (x, y) 为中心, 斜率为 $f(x, y)$ 的小直线段为**点 (x, y) 处由方程(4)定义的线素**. 方程(4)在区域 G 内每一点的线素的全体称为**方程(4)在 G 内定义的线素场**.

显然, 在 G 内的每一点, 积分曲线与该点处方程(4)定义的线素相切, 反之, 如果一条曲线, 它的每一点都与方程(4)定义的线素场在该点的线素相切, 则这条曲线就是方程(4)的积分曲线.

利用线素场可以近似地画出积分曲线.





画出方程

dy/dx = x - y



返回

的线素场, 并近似的画出过(-4, 4)的积分曲线.

解: 计算一些特殊点处的斜率值, 得下表

图1.3画出了相应的线素场. 图1.4画出了过(-4, 4)的积分曲线.

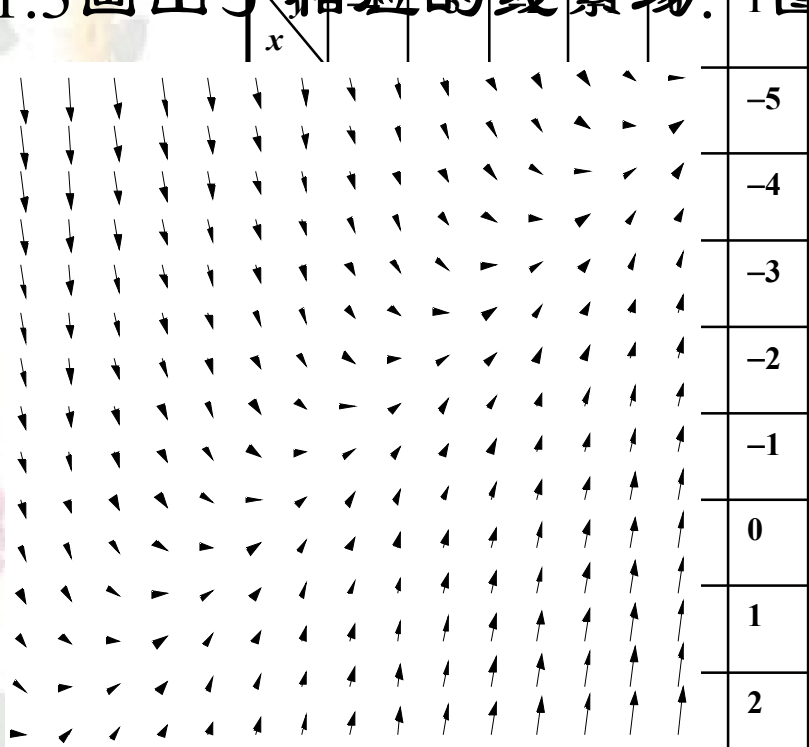


Fig. 1.3

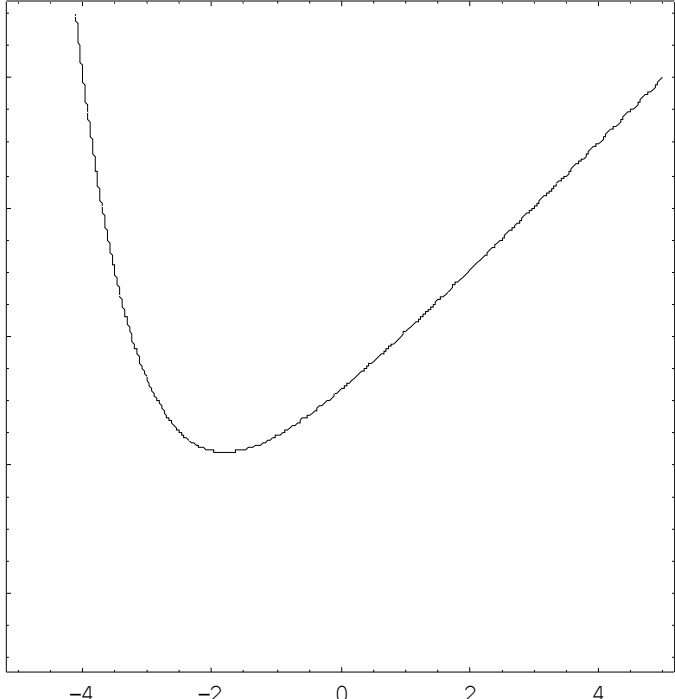
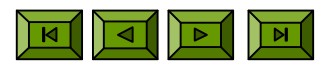
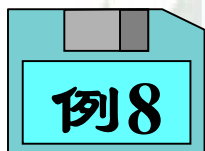


Fig. 1.4

完





求一微分方程,以

$$(y - c_2)^2 = 4c_1x$$

为其积分曲线.



返回

解: 将等式两端对 x 求导, 得

$$(y - c_2)y' = 2c_1$$

再将上式两端对 x 求导, 得

$$(y')^2 + (y - c_2)y'' = 0$$

$$\therefore c_1 = -\frac{(y')^3}{2y''} \quad c_2 = y + \frac{(y')^2}{y''}$$

将 c_1 和 c_2 代入原方程并化简, 得所求微分方程为

$$2xy'' + y' = 0$$

完



嶽麓書院

於斯為盛

惟楚有材

See you next time



退出