



# 数值计算方法

---

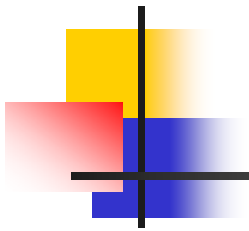
主讲 孟纯军

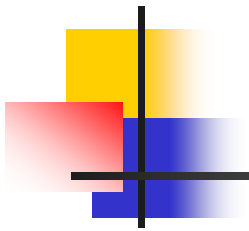


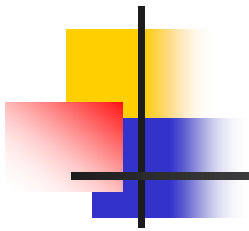
# 第1章 绪论

---

- 随着科学技术的飞速发展，科学计算愈来愈显示出其重要性。
- 科学计算的应用之广已遍及各行各业，例如：气象资料的分析图像，飞机、汽车及轮船的外形设计，高科技研究等都离不开科学计算。
- 因此，作为科学计算的数学工具数值计算方法已成为各高等院校数学、物理和计算机专业等理工科本科生的专业基础课,也是工科硕士研究生的学位必修课。

- 
- 数值分析或数值计算方法主要是研究如何运用计算机去获得数学问题的数值解的理论和方法.
  - 对那些在经典数学中,用解析方法在理论上已作出解的存在,但要求出他的解析解又十分困难,甚至是不可能的这类数学问题,数值解法就显得不可缺少,同时有十分有效.

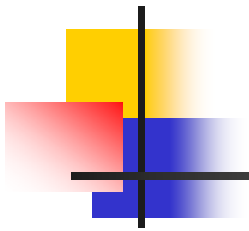
- 
- 计算机解决科学计算问题时经历的几个过程
    - 实际问题——〉数学模型——〉数值计算方法——〉程序设计——〉上机运行求出解
    - 实际问题——〉数学模型：由实际问题应用科学知识和数学理论建立数学模型的过程，是应用数学的任务。



---

- 数值计算方法——〉程序设计——〉计算结果：根据数学模型提出求解的数值计算方法，直到编出程序上机算出解，是计算数学的任务。

- 数值计算方法重点研究：求解的数值方法及与此有关的理论

- 
- 
- 有的方法在理论上虽不够严格，但通过实际计算，对比分析等手段，被证明是行之有效的方法，也可以采用。
  - 因此，数值分析既有纯数学高度抽象性与严密科学性的特点，又有应用的广泛性与实验的高度技术性特点，是一门与使用计算机密切结合的实用性很强的数学课程。



# 1.1 数学问题的数值解法例示

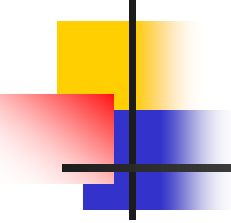
---

- 例1..1.1 试求函数方程  $x = \cos x$  在区间  $(0, \frac{\pi}{2})$  内的一个根。

解

令  $f(x) = x - \cos x$ , 易知  $f(x)$  在  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上是连续函数, 且

$$f(0)f(\frac{\pi}{2}) = (-1) * \frac{\pi}{2} < 0$$



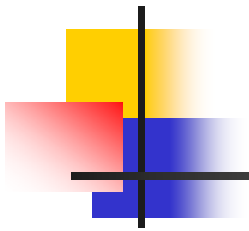
---

由零点定理知, 方程  $f(x) = 0$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  内至少有一个零点

又由  $f'(x) = 1 + \sin x > 0, x \in (0, \frac{\pi}{2})$

知上述零点唯一.



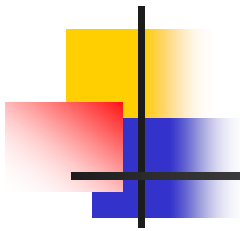


本题用解析法求解较为困难.

若用图解法,可大致判定此零点位置.

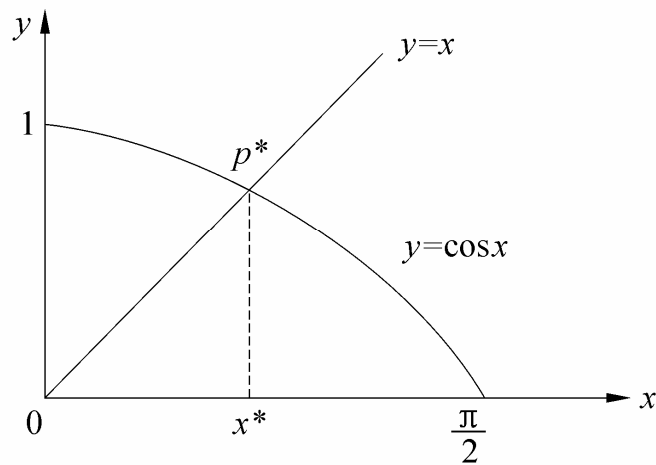
作图像

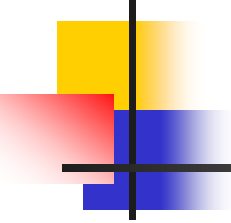
$$\begin{cases} y = x \\ y = \cos x \end{cases}$$



两曲线交点 $p^*$ 的横坐标 $x^*$ 为所求方程的解,

从图中可以看出 $x^*$ 大致位于 $\frac{\pi}{4}$ 附近.





### 例1.1.2.计算定积分

$$(1) I_1 = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx \quad (2) I_2 = \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

解： (1) 由牛顿—莱布尼兹公式

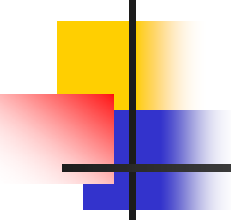
$$I_1 = 4 \arctan x \Big|_0^1 = 4 \arctan 1 - 4 \arctan 0 = \pi$$



数值方法有多种，如选择 $n = 2, h = \frac{1}{2}$ ，被积函数

$f(x) = \frac{4}{1+x^2}$ 的复化 $Simpson$ 公式有

$$\begin{aligned} I_1 &\approx \frac{h}{6} \left[ f(0) + 4f\left(\frac{1}{4}\right) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 4f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1) \right] \\ &= 3.141568627 \end{aligned}$$



---

(2)  $I_2 = \int_0^1 e^{-x^2} dx$ , 由于  $f(x) = e^{-x^2}$  的原函数不能用初等函数表达, 因此, 由Newton-Leibniz公式无法求解,

只可用数值方法求解。仍选择  $n = 2, h = \frac{1}{2}$ , 的复化 *simpson* 公式进行数值求解有  $I_2 \approx 0.746855379$ 。



## 1.2 误差概念和有效数

---

- 在任何科学计算中其解的精确性总是相对的,而误差则是绝对的.我们从下面这个例子就可以了解误差产生的原因.

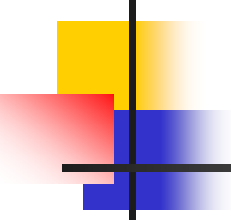


---

例：试求摆长为 $L$ 的单摆运动周期.

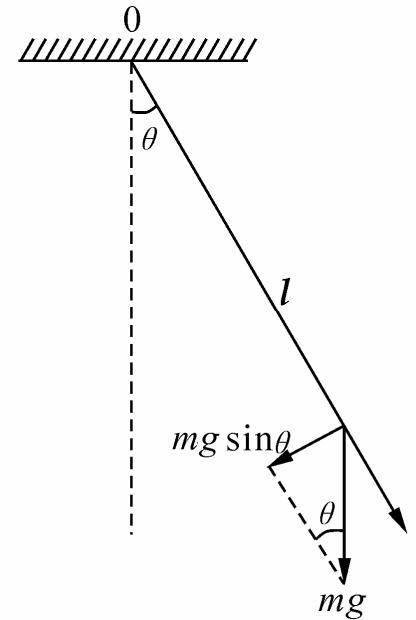
在物理学中我们知道单摆周期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

其中： $l$ 为摆长； $g$ 为自由落体加速度； $m$ 是质点的质量。

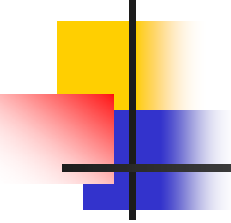


如图所示：由牛顿定律

$$f = mg \sin \theta = ma = -ml \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$







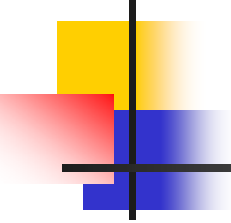
---

所以  $ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \sin \theta$

即  $\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$

当  $\theta$  很小时,  $\sin \theta \approx \theta$ , 令  $\omega^2 = \frac{g}{l}$

则有  $\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \omega^2 \theta = 0$



---

解微分方程得  $\lambda_{1,2} = \pm \omega i$ , 故有

$$\theta = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

因此  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

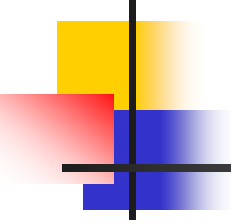


现在我们来分析单摆周期求解过程的误差情况：

1<sup>0</sup>模型误差  $\left\{ \begin{array}{l} \text{忽略空气阻力} \\ \text{忽略o点处的摩擦力} \end{array} \right.$

2<sup>0</sup>截断误差： $\sin \theta \approx \theta$

由Taglor展式： $\sin \theta = \theta + \left[ -\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \right] \approx \theta$



---

3<sup>0</sup>观察误差:  $g = 9.8 \text{米/秒}^2$ ,  $l$ 长度

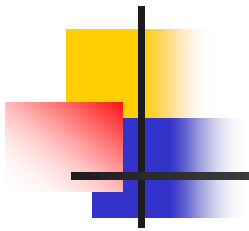
4<sup>0</sup>舍入误差:  $+$ ,  $-$ ,  $*$ ,  $/$ , 开方



# 误差的分类

---

- **模型误差** 从实际问题建立的数学模型往往都忽略了许多次要的因素,因此产生的误差称为模型误差.
- **观测误差** 一般数学问题包含若干参数,他们是通过观测得到的,受观测方式、仪器精度以及外部观测条件等多种因素,不可能获得精确值,由此而来产生的误差称为观测误差。

- 
- **截断误差** 在求解过程中，往往以近似替代，化繁为简，这样产生的误差称为截断误差。
  - **舍入误差** 在计算机上运算时受机器字长的限制，一般必须进行舍入，此时产生的误差称为舍入误差。



# 误差和有效数字

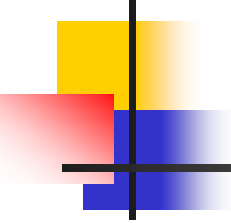
---

定义1.2.2 设 $x^*$ 为准确数 $x$ 的一个近似数,称

$$\Delta(x^*) = x^* - x,$$

$$\text{或者, } |\Delta(x^*)| = |x^* - x|,$$

为近似数 $x^*$ 的绝对误差

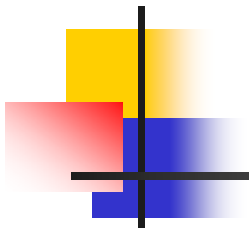


---

$$\delta(x^*) = \frac{\Delta(x^*)}{x} \quad (x \neq 0)$$

为近似数 $x^*$ 的相对误差。





---

绝对误差是做为衡量 $x^*$ 的精度高低, 比较直观, 但无法衡量精度的好坏。

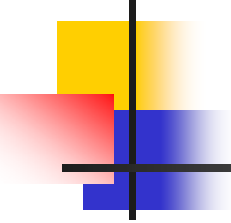
而用相对误差, 也称百分比误差, 衡量精度的好坏更合理。



# 误差估计

---

- 由于准确值在一般情况下是未知的，因此绝对误差和相对误差常常是无法计算的，但有可能给出估计。误差界就是用于误差估计的。



定义1.2.2 设 $x^*$ 是精确数 $x$ 的一个近似数,  
若有正数 $\varepsilon$ 和 $\varepsilon_r$ 满足:

$$|\Delta(x^*)| = |x^* - x| < \varepsilon$$

$$|\delta(x^*)| = \frac{|x^* - x|}{|x|} < \varepsilon_r$$

则称 $\varepsilon$ 和 $\varepsilon_r$ 为近似数 $x^*$ 的绝对误差界  
和相对误差界。



---

在实际计算绝对误差和相对误差时，由于准确数 $x$ 未知，因此常用

$$\delta(x^*) = \frac{\Delta(x^*)}{x^*}$$

表示  $\delta(x^*)$



# 有效数字

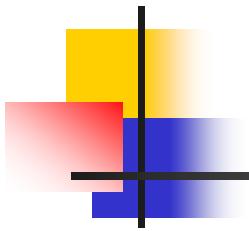
---

在工程上，误差的概念就转化为有效数字。

例如  $\pi = 3.14159265\dots$  的近似数  $\pi^* = 3.1416$

则  $\Delta(\pi^*) = 3.1416 - 3.14159265\dots$

$$= 0.00000734\dots \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

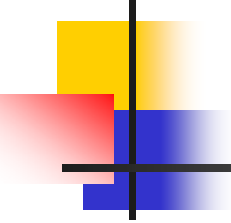


---

称  $\pi^* = 3.1416$  具有五位有效数字的近似数。

若  $x^*$  准确到小数点后第  $n$  位,

$x^* = \pm a_1 a_2 \cdots a_m . b_1 b_2 \cdots b_n (a_1 \neq 0)$ , 则




---


$$|\Delta(x^*)| \leq 0.5 \times 10^{-n},$$

$$|\delta(x^*)| = \frac{|\Delta(x^*)|}{|x|} \leq \frac{0.5 \times 10^{-n}}{a_1 0 \cdots 0.00 \cdots 0}$$

$$\leq \frac{0.5 \times 10^{-n}}{0.1 \times 10^m} \leq 5 \times 10^{-(m+n)},$$



---

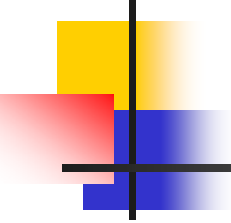
若 $x^*$ 的浮点表示为

$$x^* = \pm 0.a_1a_2 \cdots a_t \times 10^k \quad (a_1 \neq 0)$$

$$|\Delta(x^*)| \leq 0.5 \times 10^{k-t},$$

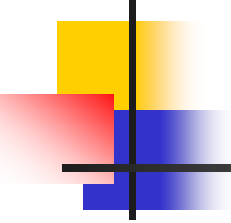
$$|\delta(x^*)| = \frac{|\Delta(x^*)|}{|x|} \leq \frac{0.5 \times 10^{k-t}}{0.a_1 \times 10^k} \leq 5 \times 10^{-t},$$





---

绝对误差，相对误差，有效数(浮点数)  
是度量近似数精度的常用三种。实际计算  
时最终结果均以有效数给出。同时也就隐  
含了绝对误差和相对误差界。



---

如  $x = \sqrt{2}, x^* = 1.4142, m = 1, n = 5$

则 $x^*$ 的绝对误差界 $\varepsilon = \frac{1}{2} \times 10^{-4}$

而相对误差界估计为

$$|\Delta(x^*)| \leq 5 \times 10^{-5}$$



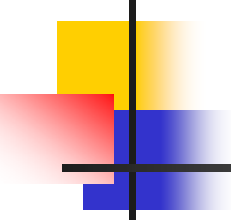
# 误差估计

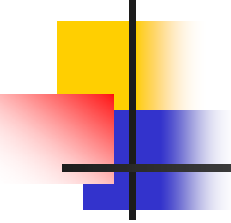
---

设 $x_1, x_2$ 的近似数 $x_1^*, x_2^*$ , 则

$$\Delta(x_1^* \pm x_2^*) = \Delta(x_1^*) \pm \Delta(x_2^*)$$

$$\delta(x_1^* x_2^*) = \delta(x_1^*) + \delta(x_2^*)$$

- 
- 
- 两个数相加（减），和的误差等于两个数的误差之和（减）。（误差稳定）
  - 两个数相乘（除），积的相对误差等于两个数的相对误差之和（差）。（相对误差稳定）

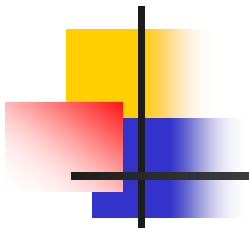


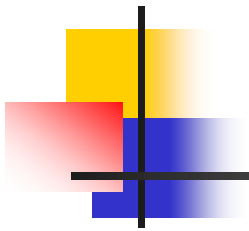
---

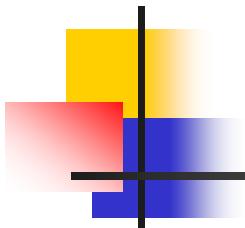
$$\Delta(x_1^* x_2^*) = x_2^* \Delta(x_1^*) + x_1^* \Delta(x_2^*)$$

$$\Delta\left(\frac{x_1^*}{x_2^*}\right) = \frac{x_2^* \Delta(x_1^*) - x_1^* \Delta(x_2^*)}{(x_2^*)^2}$$

$$\delta\left(\frac{x_1^*}{x_2^*}\right) = \delta(x_1^*) - \delta(x_2^*)$$

- 
- 两个数相乘，积的误差等于第一个数乘以第二个数的相对误差加上第二个数乘以第一个数的相对误差。（误差什么情况下会严重扩大？）
  - 两个数相除，商的误差等于分母乘以分子的误差减去分子乘以分母的误差，然后除以分母的平方。（误差什么情况下会严重扩大？）

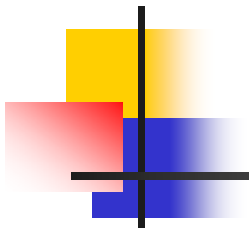
- 
- 
- 两个数相乘，如果有大因子，积的误差可能严重扩大
  - 两个数相除，如果除数很小，商的误差可能会严重扩大



$$\delta(x_1^* + x_2^*) = \frac{x_1^* \delta(x_1^*)}{x_1^* + x_2^*} + \frac{x_2^* \delta(x_2^*)}{x_1^* + x_2^*}$$

$$\delta(x_1^* - x_2^*) = \frac{x_1^* \delta(x_1^*)}{x_1^* - x_2^*} - \frac{x_2^* \delta(x_2^*)}{x_1^* - x_2^*}$$



- 
- 
- 两个相近的异号数相加，和的相对误差可能严重扩大
  - 两个相近的同号数相减，差的相对误差可能严重扩大



# 计算函数值产生的误差

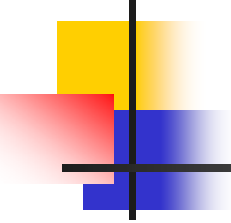
---

设函数 $y = f(x)$ , 当 $x$ 用近似数 $x^*$ 代替  
计算函数值则 $f(x^*)$ 时, 则误差为

$$\Delta(f) = f(x^*) - f(x)$$

$$\approx f'(x^*)(x^* - x) = f'(x^*)\Delta(x^*)$$

或 
$$\delta(f) \approx \frac{x^* f'(x^*)}{f(x^*)} \delta(x^*)$$



---

若记  $C = |f'(x^*)|$ ,  $C_r = \left| \frac{x^* f'(x^*)}{f(x^*)} \right|$ , 当  $C \leq 1, C_r \leq 1$  时有

$$|\Delta(f)| \leq |\Delta(x^*)|$$

$$|\delta(f)| \leq |\delta(x^*)|$$

这表明当  $C \leq 1, C_r \leq 1$  时, 函数值的误差是可以控制的, 或是稳定的。



---

一般分别称 $C, C_r$ 为 $f(x)$ 在绝对意义下和相对意义下的条件数。

当 $C \leq 1$ 称 $f(x)$ 为良态；

当 $C \gg 1$ 称 $f(x)$ 为病态。



## 例题

---

例1.2.2 讨论函数在正根附近的性态。

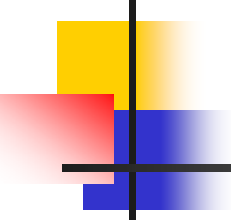
$$f(x) = x^2 + x - 10100 = 0$$

解： 显然，  $x_1 = -101, x_2 = 100$

即正根为  $x = 100$

$$\because |f'(100)| = 2x + 1|_{x=100} = 201 \gg 1$$

$\therefore f(x)$  在正根附近是病态的

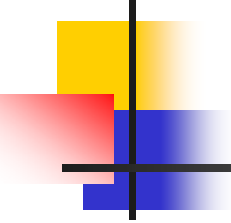


---

如：取 $x_1^* = 99$ , 则 $f(x_1^*) = f(99) = -200$

取 $x_1^* = 99.9$ , 则 $f(x_1^*) = f(99.9) = -20.09$

也就是自变量发生微小变化，函数值变化极大。

- 
- 
- 计算表明:
  - $x^* = 99.999; y = x^{*2} + x^* - 1010;$   
 $y = -0.2010$
  - $x^*$  已经有5位有效数字, 但 $y$ 的误差比较大。



# 多元函数误差估计

---

对于多元函数  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,

用  $x^* (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$  代替  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$

其绝对误差为

$$\begin{aligned}\Delta(f) &= f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\approx \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i^*} (x_i^* - x_i) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i^*} \Delta(x_i^*)\end{aligned}$$





---

因此绝对误差界为

$$|\Delta(f)| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i^*} \right| |\Delta(x_i^*)|$$



---

同理相对误差为

$$\delta(f) \approx \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i^*} \frac{x_i^*}{f(x^*)} \delta(x_i^*)$$

相对误差界

$$|\delta(f)| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i^*} \frac{x_i^*}{f(x^*)} \right| |\delta(x_i^*)|$$



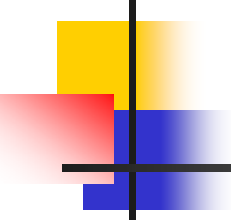
## 例题

---

例 设 $\triangle ABC$ 观测数据为

$$b = (100 \pm 0.10)m, c = (120 \pm 0.10)m, A = (60 \pm 0.02)^\circ,$$

试估计 $\triangle ABC$ 面积 $S$ 的绝对误差和相对误差。



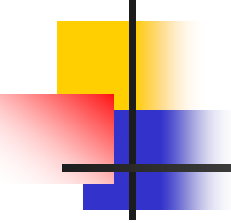
---

解 由  $S = \frac{1}{2}bc \sin A$  则

$$|\Delta(S^*)| \leq \left| \frac{\partial S}{\partial b} \right| |\Delta(b^*)| + \left| \frac{\partial S}{\partial c} \right| |\Delta(c^*)| + \left| \frac{\partial S}{\partial A} \right| |\Delta(A^*)|$$

$$= \frac{1}{2} c^* \sin A^* \times 0.1 + \frac{1}{2} b^* \sin A^* \times 0.1$$

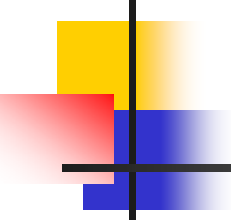
$$+ \frac{1}{2} b^* c^* \cos A^* \times 0.02 \times \frac{\pi}{180} = 10.57 m^2$$



---

$$|\delta(s^*)| \leq \left| \frac{\Delta(s^*)}{s^*} \right| = \frac{10.57}{\frac{1}{2}b^*c^*\sin A^*} = 2.035 \times 10^{-3}$$

注意：若数据以规格化形式给出，则知道绝对误差界。如



---

$$b = 100.10 = 10^3 \times 0.10010$$

则  $|\Delta(b^*)| \leq \frac{1}{2} \times 10^{3-5} = \frac{1}{2} \times 10^{-2}$



## 1.3 算法的优化

---

### ■ 算法优劣的标准

- 从截断误差观点看,算法必须是截断误差小,收敛敛速要快。
- 从舍入误差观点看,舍入误差在计算过程中要能控制,即算法的数值要稳定。
- 从实现算法的观点看,算法的逻辑结构不宜太复杂,便于程序编制和上机实现。



## ■ 设计算法时应遵循的原则

- 要有数值稳定性,即能控制误差的传播.
- 避免大数吃小数,即两数相加时,防止较小的数加不到较大的数上.
- 避免两相近的数相减,以免有效数字的大量丢失.
- 避免分母很小(或乘法因子很大),以免产生溢出.





## 例题

---

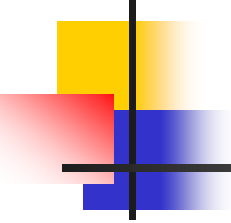
计算  $\ln 2$  的值。

算法一：由 *Taylor* 展式有

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

令  $x=1$  有

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$$



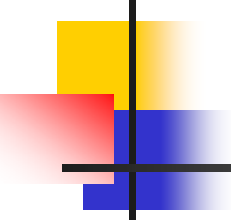
---

由级数判别，交错级数且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

所以  $\ln 2$  收敛。

若要  $|\varepsilon| \leq \frac{1}{n+1} < \frac{1}{2} \times 10^{-5}$  时，则  $n \geq 2 \times 10^5$

显然项数大，收敛速度慢。



---

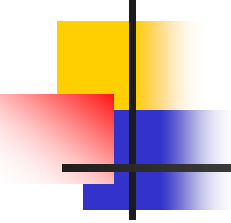
算法二:由于

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} - \dots$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots$$

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$$= 2x \left( 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \dots + \frac{x^{2n}}{2n+1} + \dots \right)$$



---

令  $\frac{1+x}{1-x} = 2$  则  $x = \frac{1}{3}$  并取  $n = 10$  得:

$$\ln 2 = \frac{2}{3} \left( 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5} \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{21} \left( \frac{1}{3} \right)^{20} \right)$$



---

其截断误差为

$$\begin{aligned} T &= \frac{2}{3} \left( \frac{1}{23} \times \frac{1}{9^{11}} + \frac{1}{25} \times \frac{1}{9^{12}} + \dots \right) \\ &\leq \frac{2}{3} \times \frac{1}{23} \times \frac{1}{9^{11}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{12} \times \frac{1}{23} \times \frac{1}{9^{10}} \leq 10^{-12} \end{aligned}$$

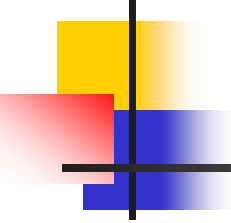


---

例 计算圆周率 $\pi$ 的值。

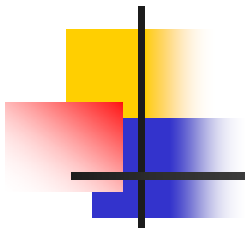
解 算法一：由定积分

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} + \dots\end{aligned}$$



---

同理若要  $|\varepsilon| \leq \frac{1}{2n-1} < \frac{1}{2} \times 10^{-5}$  时, 则  $n \geq 10^5$ 。

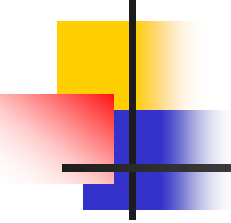


算法二：取 $n = 2$ ,  $h = \frac{1}{2}$ ,  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 的*simpson*公式有

$$S_2 = \frac{h}{6} \left[ f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + 4f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1) \right] = 0.785392156$$

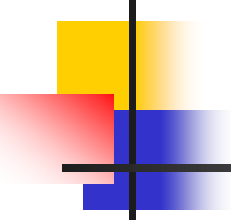
$$\text{所以 } \pi^* = 4S_2 = 3.141568627$$





---

算法二表明,仅用不多的五次函数值的  
计算,  
已获得  $\pi$  的具有五位有效数字的近似  
值。



1.3.3 计算定积分  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5} dx \quad (n = 0, 1, \dots)$

解： 由于 
$$I_n + 5I_{n-1} = \int_0^1 \frac{x^n + 5x^{n-1}}{x+5} dx$$

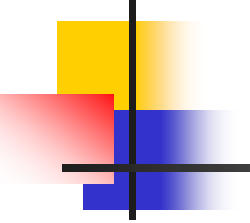
$$= \int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{x^n}{n} \Big|_0^1 = \frac{1}{n} \quad n = 1, 2, \dots$$



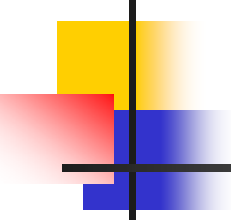
---

得递推公式

$$\begin{cases} I_n = \frac{1}{n} - 5I_{n-1} & n = 1, 2, \dots \\ I_0 = \ln \frac{6}{5} \approx 0.18232155 \end{cases}$$



n	$I_n$	n	$I_n$
0	0.18232155	9	0.017056624
1	0.088392216	10	0.014716876
2	0.058039818	11	0.017324710
3	0.043138742	12	-0.003290219
4	0.034306287	13	-0.093374172
5	0.028468560	14	-0.395442290
6	0.024323864	15	2.043878100
7	0.021237820	16	-10.15689000
8	0.018810897	17	50.84327600

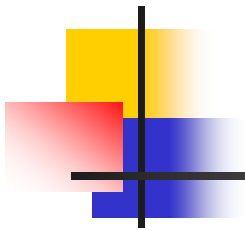


---

由于  $0 < \frac{x^n}{x+5} < 1 \quad x \in (0, 1),$

所以  $0 < \int_0^1 \frac{x^n}{x+5} dx < 1,$

即  $0 < I_n < 1,$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0。$



从表中看到，当 $n = 12$ 时 $I_n < 0$ ，且 $n$ 越大， $I_n$ 的绝对值越大，显然出错。



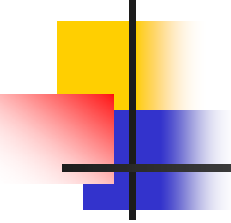
---

算法正确，程序也正确，错在何处？

考虑计算过程：

在 $I_0^* = 0.18232155$ ，存在误差 $\varepsilon_0 = I_0 - I_0^*$

$$I_n^* = -5I_{n-1}^* + \frac{1}{5} \quad n = 1, 2, \dots$$



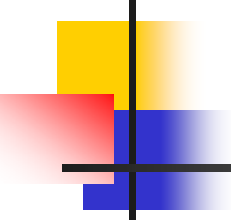
---

$$\text{则} \left| I_n - I_n^* \right| = \left| -5(I_{n-1} - I_{n-1}^*) \right|$$

$$= \dots\dots$$

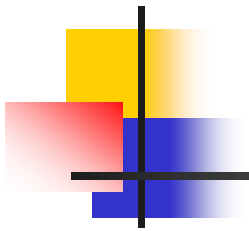
$$= \left| (-5)^n \varepsilon_0 \right| \gg 1$$





---

显然算法不稳定。理论上成立的算法,在计算机上计算时,由于初值的误差,在计算过程中传播而导致计算失真。

- 
- 显然算法不稳定，理论上成立的算法，在计算机上机算时，由于初值的误差在计算过程中的传播，而导致结果的失真，这是我们数值计算方法所要研究的。



# 总结

---

- 计算机解决实际问题的基本环节？
- 误差的种类？
- 绝对误差（界），相对误差（界）？
- 有效数字和浮点数的绝对误差界和相对误差界？
- 误差的传播方式？



# 总结

---

- 设计算法应该遵循的基本原则？
- 病态问题？计算函数值（一元函数或者多元函数），怎么去判定病态？
- 稳定算法？
- 病态问题和稳定算法的关系？



# 练习题

---

1. 设  $x > 0$ ,  $x$  的相对误差为  $\delta$ , 求  $\ln x$  的误差。
2. 设  $x$  的相对误差为 2%, 求  $x^n$  的相对误差。
3. 下面的数都是经过四舍五入得到的, 试指出有几位有效数字。

$$x_1^* = 1.1201 \quad x_2^* = 0.00301 \quad x_3^* = 385.6$$



4.求下面各式的误差限。

$$x_1^* + x_2^* + x_3^* \quad x_1^* x_2^* x_3^* \quad x_1^* / x_2^*$$

5.要使计算球的体积的相对误差不超过1%,  
半径的相对误差应该不超过多少?

6.设 $y_0 = 28$ ,按递推公式 $y_n = y_{n-1} - 0.01\sqrt{783}$   
取 $\sqrt{783} = 27.982$ , 计算 $y_{100}$ 会有多大误差?



7. 设  $y_0 = \sqrt{2}$ , 按递推公式  $y_n = 10y_{n-1} - 1$

取  $\sqrt{2} = 1.41$ , 计算  $y_{100}$  会有多大误差?

算法稳定吗?

8. 取  $\sqrt{2} = 1.41$ , 计算式  $f = (\sqrt{2} - 1)^6$

下面那种方法会比较好?

$$\frac{1}{(\sqrt{2} + 1)^6}, (3 - 2\sqrt{2})^3, \frac{1}{(3 + 2\sqrt{2})^3}, 99 - 70\sqrt{2}$$