

练习 3.2 向量组的线性相关性(1)

一、填空题:

1. s 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (s \geq 1)$ 称为线性相关的, 如果存在_____的数 k_1, k_2, \dots, k_s , 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}$.
2. 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, $\beta_1 = \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3, \beta_2 = \alpha_2 + a\alpha_3, \beta_3 = 2\alpha_1 - a\alpha_2 + 5\alpha_3$. 若 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关, 则 $a =$ _____.
3. 设 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 满足条件 $2\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = \mathbf{0}$, β 是任意的 n 维向量, 若 $\beta + \alpha_1, \beta + \alpha_2, a\beta + \alpha_3$ 线性相关, 则 $a =$ _____.

二、选择题:

1. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关的充分必要条件是 []
 (A) 有一组全不为零的数 k_1, k_2, \dots, k_s , 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}$;
 (B) 有一组不全为零的数 k_1, k_2, \dots, k_s , 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s \neq \mathbf{0}$;
 (C) 对任意的全不为零的数 k_1, k_2, \dots, k_s , 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s \neq \mathbf{0}$;
 (D) 对任意的不全为零的数 k_1, k_2, \dots, k_s , 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s \neq \mathbf{0}$.
2. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关的充分必要条件是 []
 (A) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中至少有一个零向量; (B) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中至少有一个向量可以由其余向量线性表示;
 (C) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中至少有两个向量成比例; (D) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中至少有 $s-1$ 个向量线性相关.
3. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 n 个 n 维向量, 则条件 (1) α_i 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n (i=1, 2, \dots, n)$ 线性表示; (2) 任意 n 维向量 β 均可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示; (3) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 和 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ 可以相互表示; (4) 方程组 $\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \dots + \alpha_nx_n = \mathbf{0}$ 只有零解是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关的充要条件的个数是 []
 (A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4.
4. 设向量组 (A) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, (B) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \dots, \alpha_{s+r}$, 则必有 []
 (A) (A) 线性相关 \Rightarrow (B) 线性相关; (B) (A) 线性无关 \Rightarrow (B) 线性无关;
 (C) (B) 线性相关 \Rightarrow (A) 线性相关; (D) (B) 线性相关 \Rightarrow (A) 线性无关.

三、设 $\alpha = (0 \ 4 \ 2 \ 5)$, $\beta_1 = (1 \ 2 \ 3 \ 1)$, $\beta_2 = (2 \ 3 \ 1 \ 2)$, $\beta_3 = (3 \ 1 \ 2 \ -2)$. 问 α 能否由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示?

四、设 $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2$, \cdots , $\beta_s = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s$, 且向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关, 证明向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 线性无关.

五、设 $a_1, a_2, \cdots, a_s (s \leq n)$ 是互不相等的数, $\alpha_i = (1, a_i, a_i^2, \cdots, a_i^{n-1}), i = 1, 2, \cdots, s$. 问 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是否线性相关?