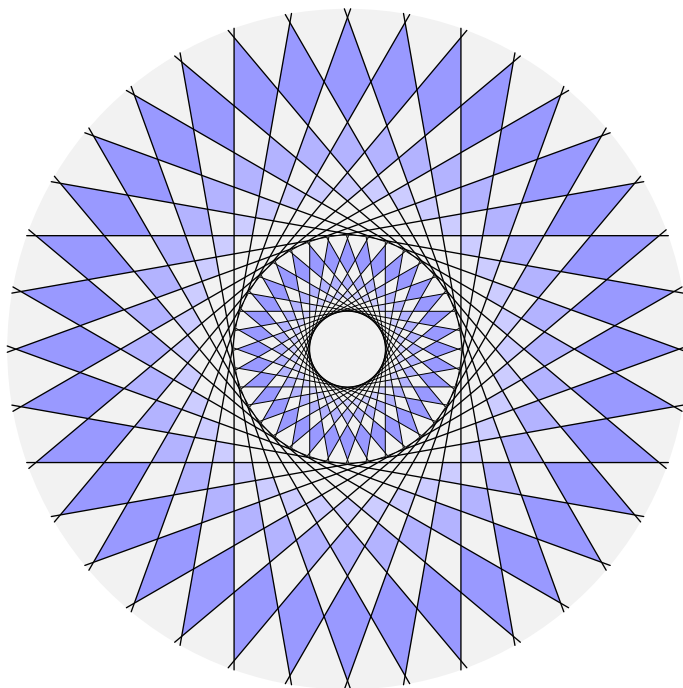


# 数学分析讲义

梅加强 编著

© 2006-2010



**无厚，不可积也，其大千里。**

— 惠施，公元前四世纪。

## 前言

数学分析的核心内容是微积分。微积分的发展大体上经过了三个阶段。牛顿 (Newton) 和莱布尼兹 (Leibniz) 在继承公元 15–16 世纪以来许多杰出数学家的成果的基础上, 将微积分发展成了一门独立的学问, 微积分被用来解决天文、力学、工程等方面的大量实际问题。19 世纪初, 由于科学技术进步的推动, 为微积分建立牢固基础的要求十分迫切。经过近二百年的努力, 到 19 世纪五六十年代, 柯西 (Cauchy), 黎曼 (Riemann) 和魏尔斯特拉斯 (Weierstrass) 等建立了严格的极限理论, 并用极限的语言严格地证明了微积分的所有定义和定理, 为微积分的普及创立了更加有利的条件。到 20 世纪初, 格拉斯曼 (Grassmann), 庞加莱 (Poincaré) 和嘉当 (Cartan) 等人又发展了外微分形式的语言, 并利用外微分形式的语言把微分和积分这一对矛盾统一在斯托克斯 (Stokes) 积分公式中, 这就使得牛顿和莱布尼兹的微积分基本公式达到了一个统一的新高度, 以后的发展就属于近代数学的范畴了。

本书在内容的编排上试图展现微积分发展各阶段的重要成果, 并适当地采用现代数学的思想方法和观点处理经典的分析问题。下面对本书主要内容作一简要介绍。由于数学分析是非常成熟的一门基础课程, 我们只着重于介绍和传统教材有较大差别的地方。

在第一章中我们介绍了集合与映射的一些基本概念。这一章虽然是复习性质的, 但我们还是引入了确界和可数这两个重要概念。我们把确界原理作为一元分析的基础, 在第二章关于数列极限的论述中这一点显得特别突出。实数的构造以及实数系的基本性质对于一元分析来说是非常重要的, 但为了减轻负担, 我们将实数构造的理论放在第一章附录中了。

第三章研究连续函数。和传统教材不同的是, 我们在这里就已经介绍了连续函数的积分了。这样, 在第四章中, 我们就很快得到了微积分的基本定理 —Newton-Leibniz 公式, 从而不定积分的内容就显得较为自然。微分中值定理和 Taylor 展开是一元微分学发展的一个高峰, 我们在第五章中介绍这部分内容。

第六章和第七章是一元函数积分的内容。Riemann 积分是一元分析的一个难点。由于前面已经有连续函数的积分, Riemann 积分的理解难度有所降低。为了透彻地理解 Riemann 积分, 我们还引入了零测集的概念, 利用它刻画了可积函数。

第八、九和第十章是关于无穷级数理论的, 这是分析学的经典内容。其中, 关于数项级数, 我们突出了 Kummer 判别法的作用, 由此简化了众多收敛发散判别法的叙述。我们在这几章的最后一节中讨论了一些进一步的内容, 如级数用于近似计算, Euler-Maclaurin 公式以及 Stirling 公式的渐近展开, Fourier 级数的平均收敛和一致收敛性, 以及对于等分布问题和等周问题的应用等。对于 Fourier 级数中重

要的 Parseval 等式, 我们所用的证明方法和传统的教材也有所不同。

第十一章是承前继后的一章。我们将实数的基本性质提炼出来, 引入了内积空间和度量空间的概念, 并通过完备性, 紧致性和连通性等刻画了连续映射的基本性质。与度量空间有关的内容十分丰富, 我们在这里只挑选了最必需的若干概念和定理, 一方面将一元分析中所获得的概念做了一些提升, 另一方面为多元分析准备扎实的基础。当然, 在课时有限的情况下也可将所有的论述局限于欧氏空间。

第十二章是多元函数的微分学。这一章对于线性代数的要求较高, 读者应当具备线性映射、线性变换的基础知识。究其原因, 是因为微分学的基本手法无非是作线性化, 线性代数的语言很自然地要用上。比如, 在这一章里, 无论是拟微分中值定理, 还是逆映射定理, 隐映射定理, 甚至是 Lagrange 乘数法, 它们的严格表述和证明都是用线性代数的语言完成的, 其中 Jacobian 矩阵起了突出的作用。

第十三章是多元函数的 Riemann 积分。和一元函数一样, 我们也是用零测集刻画可积函数乃至可求面积(体积)集的。除了强调计算以外, 我们还给出了多重积分变量代换公式的完整证明, 这个证明通常是被省略的。我们的证明和其它一些教材上的也不相同。

第十四章是曲线曲面上的积分。我们实际上统一处理了欧氏空间中正则子流形上的积分。关于 Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式, 我们没有采用分割积分区域为较简单区域的传统办法, 而宁愿使用区域变换的观点讨论问题。这一章的附录中介绍了重要的 Riemann-Stieltjes 积分, 它们是在考虑可求长曲线时自然出现的。作为应用, 通过考虑 Riemann-Stieltjes 积分我们还得到了 Riemann 积分的中值公式, 分部积分公式和变量替换公式的最一般情形。

第十五章部分地反映了微积分发展的第三阶段的成果, 我们引入了微分形式, 外微分运算, 并给出了整体曲面的定义, 讨论了曲面的定向, 最后统一了 Green 公式, Gauss 公式和曲面上的 Stokes 公式。

第十六章讨论含参变量的积分。其中, 关于 Gamma 函数的 Stirling 公式的证明, 我们提供了两个办法, 它们和传统教材上的处理方法也不太一样。最后, 我们还讨论了 Fourier 变换的乘积公式, 反演公式和 Plancherel 公式, 并讨论了 Fourier 分析的几个重要应用。

本书作为讲义的形式曾在南京大学数学系多次试用, 在试用过程中, 程健、胡泽春、尤建功和张高飞等诸位老师都贡献了宝贵的意见和建议; 扬州大学徐海峰博士也仔细校订了本书前五章初稿, 作者在此一并致谢。

总体而言, 本书的基本内容仍然属于经典的微积分范畴。在取材方面我们着重理论和应用, 在定理的证明方面我们着重自然和简洁。限于作者的水平, 如有处理得不恰当的地方还请专家予以批评指正。

# 目 录

前言	i
<b>第一章 集合与映射</b>	<b>1</b>
1.1 集合及其基本运算	1
1.2 数的集合	5
1.3 映射与函数	11
1.4 附录: 实数系的构造	19
<b>第二章 极限</b>	<b>25</b>
2.1 数列极限	25
2.1.1 数列极限的定义	25
2.1.2 数列极限的基本性质	31
2.2 单调数列的极限	38
2.3 Cauchy 准则	47
2.4 Stolz 公式	51
2.5 实数系的基本性质	56
<b>第三章 连续函数</b>	<b>65</b>
3.1 函数的极限	65
3.1.1 函数极限的定义	65
3.1.2 函数极限的性质	71
3.2 无穷小 (大) 量的阶	77
3.3 连续函数	81
3.3.1 连续函数的定义	81
3.3.2 间断点与单调函数	84
3.4 闭区间上连续函数的性质	89
3.4.1 最值定理和介值定理	89
3.4.2 一致连续性	93
3.5 连续函数的积分	99
3.5.1 积分的定义	99
3.5.2 积分的基本性质	104
3.5.3 进一步的例子	109

<b>第四章 微分及其逆运算</b>	<b>115</b>
4.1 可导与可微	115
4.2 高阶导数	127
4.3 不定积分	133
4.4 积分的计算	140
4.4.1 换元积分法	140
4.4.2 分部积分法	142
4.4.3 有理函数的积分	145
4.4.4 有理三角函数的积分	148
4.4.5 某些无理积分	150
4.5 简单的微分方程	156
<b>第五章 微分中值定理和 Taylor 展开</b>	<b>163</b>
5.1 函数的极值	163
5.2 微分中值定理	168
5.3 单调函数	173
5.4 凸函数	177
5.5 函数作图	186
5.6 L'Hôpital 法则	188
5.7 Taylor 展开	192
5.8 Taylor 公式和微分学的应用	202
<b>第六章 Riemann 积分</b>	<b>211</b>
6.1 Riemann 可积	211
6.2 定积分的性质	225
6.3 微积分基本公式	234
6.4 定积分的近似计算	242
<b>第七章 积分的应用和推广</b>	<b>249</b>
7.1 定积分的应用	249
7.1.1 曲线的长度	249
7.1.2 简单图形的面积	251
7.1.3 简单立体的体积	254
7.1.4 物理应用举例	256
7.1.5 进一步应用的例子	258
7.2 广义积分	262

7.3 广义积分的收敛判别法	267
7.4 广义积分的几个例子	272
<b>第八章 数项级数</b>	<b>279</b>
8.1 级数收敛与发散的概念	279
8.2 正项级数收敛与发散的判别法	282
8.3 一般级数收敛与发散判别法	291
8.4 数项级数的进一步讨论	297
8.4.1 级数求和与求极限的可交换性	297
8.4.2 级数的乘积	300
8.4.3 乘积级数	304
8.4.4 级数的重排	307
<b>第九章 函数项级数</b>	<b>311</b>
9.1 一致收敛	311
9.2 求和与求导、积分的可交换性	318
9.3 幂级数	324
9.3.1 收敛半径及基本性质	324
9.3.2 Taylor 展开与幂级数	328
9.3.3 幂级数的乘法和除法运算	332
9.3.4 母函数方法	336
9.4 函数项级数的进一步讨论	341
9.4.1 近似计算回顾	341
9.4.2 用级数构造函数	349
<b>第十章 Fourier 分析</b>	<b>353</b>
10.1 Fourier 级数	353
10.2 Fourier 级数的收敛性	358
10.3 Parseval 恒等式	365
10.4 Fourier 级数的积分和微分	370
10.5 Fourier 级数的进一步讨论	374
10.5.1 平均收敛性	374
10.5.2 一致收敛性	376
10.5.3 等周不等式	378
10.5.4 Fourier 级数的复数表示	381
10.5.5 Fourier 积分初步	384

<b>第十一章 度量空间和连续映射</b>	<b>387</b>
11.1 内积与度量	387
11.2 度量空间的拓扑	391
11.3 度量空间的完备性	396
11.4 度量空间与紧致性	400
11.5 连续映射	403
11.5.1 连续映射及其基本性质	403
11.5.2 欧氏的连续映射	407
11.5.3 二元函数及其极限	408
<b>第十二章 多元函数的微分</b>	<b>411</b>
12.1 方向导数和偏导数	411
12.2 切线和切面	415
12.3 映射的微分	419
12.4 中值公式与 Taylor 公式	425
12.5 逆映射定理和隐映射定理	432
12.6 无条件极值	439
12.7 Lagrange 乘数法	444
12.8 多元函数微分的补充材料	448
12.8.1 二次型与极值	448
12.8.2 函数的相关性和独立性	451
<b>第十三章 多元函数的积分</b>	<b>453</b>
13.1 二重 Riemann 积分	453
13.2 多重积分及其基本性质	462
13.3 重积分的计算	466
13.4 重积分的变量替换	474
13.4.1 仿射变换	474
13.4.2 一般的变量替换	480
13.4.3 极坐标变换	484
13.5 重积分的应用和推广	490
<b>第十四章 曲线积分与曲面积分</b>	<b>499</b>
14.1 第一型曲线积分	499
14.2 第二型曲线积分	505
14.3 第一型曲面积分	509

14.4	第二型曲面积分 . . . . .	516
14.5	几类积分之间的联系 . . . . .	522
14.5.1	余面积公式 . . . . .	522
14.5.2	Green 公式 . . . . .	524
14.5.3	Gauss 公式 . . . . .	530
14.5.4	Stokes 公式 . . . . .	535
14.6	附录: Riemann-Stieltjes 积分 . . . . .	540
14.6.1	有界变差函数 . . . . .	540
14.6.2	Riemann-Stieltjes 积分 . . . . .	543
<b>第十五章</b>	<b>微分形式的积分</b>	<b>555</b>
15.1	微分形式 . . . . .	555
15.2	外微分运算 . . . . .	566
15.3	曲面回顾 . . . . .	570
15.4	Stokes 公式 . . . . .	579
<b>第十六章</b>	<b>含参变量的积分</b>	<b>585</b>
16.1	含参变量的积分 . . . . .	585
16.2	含参变量的广义积分 . . . . .	591
16.2.1	一致收敛及其判别法 . . . . .	591
16.2.2	一致收敛积分的性质 . . . . .	594
16.3	特殊函数 . . . . .	606
16.3.1	Beta 函数的基本性质 . . . . .	607
16.3.2	Gamma 函数的基本性质 . . . . .	608
16.3.3	进一步的性质 . . . . .	609
16.3.4	Stirling 公式 . . . . .	613
16.4	Fourier 变换回顾 . . . . .	617
<b>参考文献</b>		<b>635</b>
<b>索 引</b>		<b>637</b>





# 第一章 集合与映射

本章主要是复习一下若干基本概念, 它们在中学课程中已经或多或少出现过. 两个重要的新概念, 即确界和可数集也在这里引入. 同时, 我们再介绍一些在后面章节中要反复用到的术语.

## §1.1 集合及其基本运算

数学是人类在生产实践中逐渐总结提炼出来的一门学问, 它是研究数量关系和空间形式的一门科学. 集合是数学家对于各种客观事务进行抽象化以后所形成的一个本原概念, 本原的意思是我们无法用更基本的概念来给集合下一个定义. 我们可以这样来描述集合: **集合**是具有某种特定性质的对象汇集而成的一个整体, 这些对象称为该集合的**元素**, 有时元素也称为集合中的点. 通常用小写字母表示集合中的元素, 用大写字母表示集合. 因此, 如果  $A$  是一个集合, 我们就用  $x \in A$  来表示  $x$  是  $A$  的某个元素, 念作“ $x$  属于  $A$ ”.

**例 1.1.1.** 整数的全体是一个集合, 通常记为  $\mathbb{Z}$ , 它可以表示为

$$\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, \dots, -n, n, \dots\}.$$

如同这个例子一样, 集合可以通过列举其所有元素来表示, 我们也可以这样表示集合: 设  $A$  是由具有某种性质  $P$  的对象汇集而成, 则记

$$A = \{x | x \text{ 具有性质 } P\}.$$

生活当中有许多集合的例子. 例如班上男生的全体是一个集合, 女生全体也是一个集合. 有一个特殊的集合, 它不含任何元素, 我们称为空集, 通常用  $\emptyset$  表示. 例如, 班上年龄不小于 20 岁的所有同学构成一个集合, 如果同学们的年龄都小于 20 岁, 那这这就是一个空集.

设  $A, B$  均为集合. 如果  $A$  中的元素也都是  $B$  中的元素, 则称  $A$  为  $B$  的**子集**, 记为  $A \subset B$ . 子集  $A$  有可能和  $B$  相同, 如果不相同, 即  $B$  中存在某元素  $x$ , 但  $x$  不在  $A$  中 (记为  $x \notin A$ ), 则称  $A$  为  $B$  的**真子集**, 记为  $A \subsetneq B$ .

非负整数的全体常记为  $\mathbb{Z}^+$ , 正整数的全体常记为  $\mathbb{N}$ , 它们都是  $\mathbb{Z}$  的子集.

**例 1.1.2.** 设  $A$  为集合. 显然, 空集  $\emptyset$  和  $A$  本身都是  $A$  的子集. 如果  $A$  是  $B$  的子集,  $B$  也是  $A$  的子集, 则  $A = B$ .

我们现在对于集合的元素, 集合以及子集之间的关系作一些说明. 首先要区分集合和它的元素. 例如, 我们举了“男生的全体”这个集合作为例子, 不过, 在日常

语言中, 我们通常将这个集合简称为“男生”. 我们说某某是男生指的就是某某属于“男生”这个集合. 在中国古代曾有所谓“白马非马”的悖论, 用集合的观点来看, 之所以会出现这个悖论是因为人们未能厘清集合和它的元素之间的关系的原因 (“马”指的是所有的马组成的集合, 而某匹白马是这个集合中的元素). 其次, 满足特定条件的一些子集仍然能构成新的集合, 这就出现了所谓集合的集合的概念.

**例 1.1.3.** 设  $A$  为集合,  $A$  的所有子集也构成了一个集合, 记为  $2^A$ :

$$2^A = \{B \mid B \subset A\}.$$

不难证明, 如果  $A$  有  $n$  个元素, 则  $2^A$  有  $2^n$  个元素. 即  $A$  一共有  $2^n$  个子集.

在上例中, 一个集合的所有子集构成了一个新的集合. 那么下面的问题看来是自然的: “所有”的集合放在一起是否也构成了一个集合? 如果说这是一个集合, 比如记为  $X$ , 则由于  $X$  本身也是一个集合, 按定义应该有  $X \in X$ , 即  $X$  是它自己的一个元素. 这一现象在集合的范畴内无法解释, 我们在本课程中也不需要讨论它 (在范畴论中, 集合的集合是一个所谓的类).

下面我们讨论集合之间的基本运算. 设  $A, B$  为集合, 由  $A$  中所有元素和  $B$  中所有元素所组成的集合称为  $A$  和  $B$  的**并集**, 记为  $A \cup B$ , 即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

由  $A$  和  $B$  中公共元素组成的集合称为  $A$  和  $B$  的**交集**, 记为  $A \cap B$ , 即

$$A \cap B = \{x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

**例 1.1.4.** 当  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{4, 5, 6\}$  时,

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad A \cap B = \emptyset;$$

当  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{3, 4, 5\}$  时,

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad A \cap B = \{3\}.$$

集合之间的并和交运算具有下面的性质, 这些性质的证明是直接的, 我们省略.

**命题 1.1.1.** 设  $A, B, C$  为集合, 则

- (1) (交换律)  $A \cup B = B \cup A$ ,  $A \cap B = B \cap A$ ;
- (2) (结合律)  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ ,  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ ;
- (3) (分配律)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ,  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

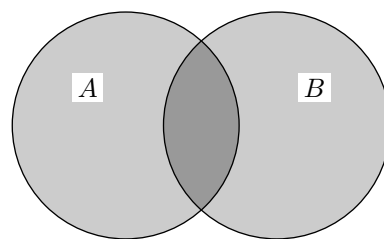


图 1.1 集合的运算

设集合  $A$  是集合  $X$  的子集, 由  $X$  中不属于  $A$  的所有元素组成的集合称为  $A$  在  $X$  中的**补集或余集**, 记为  $A^c$ , 即

$$A^c = \{x \in X \mid x \notin A\}.$$

**例 1.1.5.** 设  $X = \mathbb{Z}$ ,  $A = \{-1, -2, \dots\}$ , 则

$$A^c = \{0, 1, 2, \dots\},$$

即  $A$  的余集就是非负整数集  $\mathbb{Z}^+$ .

设  $A, B$  均为  $X$  的子集, 由属于  $A$  但不属于  $B$  的所有元素组成的集合称为  $A$  与  $B$  的**差集**, 记为  $A - B$  或  $A \setminus B$ . 因此,  $A$  的补集也可写为  $A^c = X - A$ .

**命题 1.1.2.** 设  $A, B$  为  $X$  的子集, 则

- (1)  $(A^c)^c = A$ ,  $A^c \cup A = X$ ,  $A^c \cap A = \emptyset$ ;
- (2)  $A - B = A \cap B^c$ ,  $(A - B) \cup (B - A) = A \cup B - A \cap B$ ;
- (3) (De Morgan 公式)  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ ,  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ .

**证明.** 这些性质可以根据定义直接得到, 我们以 De Morgan 公式的第一部分为例. 设  $x \in (A \cup B)^c$ , 则  $x \notin A \cup B$ , 因此  $x \notin A$ ,  $x \notin B$ . 即  $x \in A^c$ ,  $x \in B^c$ , 从而  $x \in A^c \cap B^c$ . 这说明  $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$ . 反之, 设  $x \in A^c \cap B^c$ , 则  $x \in A^c$ ,  $x \in B^c$ , 即  $x \notin A$ ,  $x \notin B$ , 因此  $x \notin A \cup B$ ,  $x \in (A \cup B)^c$ . 这说明  $A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c$ . 将两个包含关系结合起来就得到了等式  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ . De Morgan 公式的第二部分可类似证明, 也可对第一个公式两边取补得到.  $\square$

如果集合  $A$  只有有限个元素, 则称  $A$  是**有限集**. 有限集之外的集合称为**无限集**. 如果无限集  $A$  中的元素可以按一定规律排成一系列, 即

$$A = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\},$$

则称  $A$  是**可数集或可列集**. 如果  $A$  是有限集或可数集, 则称  $A$  为**至多可数集**; 至多可数集之外的集合称为**不可数集**.

**例 1.1.6.** 正整数集  $\mathbb{N}$ , 非负整数集  $\mathbb{Z}^+$  均为可数集; 可数集的子集均为至多可数集;

**例 1.1.7.** 整数集  $\mathbb{Z}$  为可数集; 无限集必有一个可数子集.

**证明.** 整数集  $\mathbb{Z}$  可以排成下面的一列:

$$\mathbb{Z}: 0, -1, 1, -2, 2, \dots, -n, n, \dots$$

因此  $\mathbb{Z}$  为可数集. 假设  $X$  是一个无限集, 特别地  $X$  非空. 取  $a_1 \in X$ , 由于  $X$  是无限集, 故  $X - \{a_1\}$  仍是非空集, 再取  $a_2 \in X - \{a_1\}$ . 同理,  $X - \{a_1, a_2\}$  是非空集, 取  $a_3 \in X - \{a_1, a_2\}$ . 如此继续下去, 我们可以取到一系列互不相同的元素  $a_n$  ( $n \geq 1$ ), 它们组成的子集  $A$  是  $X$  的可数子集.  $\square$

**例 1.1.8.** (\*) 设  $n > 1$  为正整数, 如果  $n$  除了 1 和自身外无其它因子, 则称  $n$  为素数. 素数的全体是可数集.

**证明.** (反证法) 假设只有有限个素数, 记为

$$p_1 = 2, p_2, p_3, \dots, p_k.$$

考虑正整数  $n = 1 + p_1 p_2 \cdots p_k$ . 因为  $n > p_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ), 故  $n$  不是素数. 因此其因子分解中必含有某个素因子  $p_i$ , 即  $p_i$  整除  $n$ . 根据  $n$  的定义, 这是不可能的.  $\square$

最后, 我们介绍乘积集合的概念. 设  $A, B$  为集合. 我们考虑有序对  $(x, y)$ , 其中  $x$  是  $A$  中任意一个元素,  $y$  是  $B$  中任意一个元素. 所有的这些有序对组成了一个集合, 称为  $A$  和  $B$  的乘积, 记为  $A \times B$ , 即

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

我们约定当  $A$  或  $B$  为空集时,  $A \times B$  也是空集.

**例 1.1.9.** 设  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{4, 5\}$ , 则

$$A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\},$$

$A \times B$  中共有 6 个元素. 一般地, 容易证明, 如果  $A, B$  中分别有  $m, n$  个元素, 则  $A \times B$  中有  $mn$  个元素.

**命题 1.1.3.** 设  $A, B$  为可数集, 则  $A \times B$  也是可数集.

**证明.** 因为  $A, B$  均为可数集, 故可分别表示为

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_i, \dots\}, \quad B = \{b_1, b_2, \dots, b_j, \dots\}.$$

于是  $A \times B$  可表示为

$$A \times B = \{(a_i, b_j) \mid i, j = 1, 2, \dots\}.$$

我们可以按照“字典法则”将  $A \times B$  中的元素排成一列:

$$A \times B: (a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_1, b_3), (a_2, b_2), (a_3, b_1), \dots$$

所谓“字典法则”就是当  $i + j < k + l$  或  $i + j = k + l$  但  $i < k$  时, 要求  $(a_i, b_j)$  排在  $(a_k, b_l)$  前面. 按照可数集的定义,  $A \times B$  是可数集.  $\square$

### 习题 1.1

1. 设  $X$  为非空有限集,  $a \in X$ . 将  $X$  的子集分为含有  $a$  和不含  $a$  两类, 说明这两类子集的个数相同 (提示: 从含有  $a$  的子集中去掉  $a$  以后正好就是那些不含  $a$  的子集).
2. 利用上一题和归纳法证明, 由  $n$  个元素组成的集合正好有  $2^n$  个不同的子集.
3. 证明下列等式:
  - (1)  $(A^c)^c = A$ ,  $A^c \cup A = X$ ,  $A^c \cap A = \emptyset$ ;
  - (2)  $A - B = A \cap B^c$ ,  $(A - B) \cup (B - A) = A \cup B - A \cap B$ .
4. 判断下列命题是否成立, 成立的话给出证明, 不成立的话给出反例:
  - (1) 若  $A \cap B = A \cap C$ , 则  $B = C$ ;
  - (2) 若  $A \cup B = A \cup C$ , 则  $B = C$ ;
  - (3)  $A - (B - C) = (A - B) \cup C$ .
5. 证明, 可数集的子集要么是有限集, 要么是可数集.
6. 证明, 如果  $A, B$  均为可数集, 则  $A \cup B$  也是可数集.
7. 证明, 如果  $A, B$  分别有  $m, n$  个元素, 则  $A \times B$  有  $mn$  个元素.
8. 设  $A$  为非空有限集,  $B$  为可数集, 则  $A \times B$  也是可数集.

## §1.2 数的集合

一般来说, 数学所研究的对象都在某个集合之中. 本课程所要用到的集合主要是所谓的数集. 我们在前节已经提过正整数集和整数集. 正整数也称为自然数, 它们是人们用来表示对所考虑对象的个数的一种抽象符号, 这些符号当然也可以不用  $1, 2, 3, \dots$  表示. 重要的是知道一定的运算规则, 按照这些规则可以从已知的一些自然数得到新的自然数. 这些规则包括:  $a + b = b + a$ ,  $ab = ba$  (交换律);  $a + (b + c) = (a + b) + c$ ,  $a(bc) = (ab)c$  (结合律);  $a(b + c) = ab + ac$  (分配律); 如果  $a + c = b + c$ , 则  $a = b$  (相消律) 等等.

从正整数到整数是人类对数的认识的一个跨越. 只有在整数集中减法才是完全定义好的. 类似地, 当我们引进分数以后, 整数集就扩大为有理数集, 从而除法也可以定义好.

有理数可以写成  $\frac{p}{q}$  的形式, 其中  $p, q$  均为整数,  $q \neq 0$ . 这种表示不是惟一的, 因此我们通常还要求  $p, q$  无大于 1 的公共因子, 且  $q > 0$ . 有理数的全体用  $\mathbb{Q}$  表示.

有理数也可以用直线上的点表示. 在直线  $L$  上任意选定一点, 我们把它当作 0, 或称原点. 再在  $L$  上另取一点作为 1. 我们规定从 0 到 1 的方向为正向, 这时  $L$  称为有向直线. 在作图时一般将正向朝右画, 即 1 在 0 的右边.

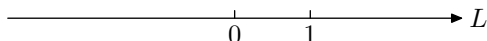


图 1.2 实数轴

从原点 0 到 1 的直线距离称为单位长度. 利用直尺和圆规, 我们可以将单位长度任意等分, 由此可以进一步将有理数全部实现为  $L$  上的点. 其中, 在原点右边的点表示正有理数, 在原点左边的点表示负有理数. 如果点  $P$  表示有理数  $x$ , 则从  $P$  到 0 的距离称为  $x$  的绝对值, 用  $|x|$  表示, 即

$$|x| = \begin{cases} x, & x \text{ 为正有理数或 } 0, \\ -x, & x \text{ 为负有理数.} \end{cases}$$

有了方向就可以比大小. 有理数  $x < y$  意味着在  $L$  上  $y$  位于  $x$  的右边. 介于  $x$  和  $y$  之间的点组成的集合称为一个区间. 有理数具有一个重要的性质: 在  $L$  上有理点是稠密的, 即  $L$  上任意一点  $P$  总可以用有理点去任意逼近. 事实上, 任意取一个很大的正整数  $q$ , 我们把  $L$  分为一系列长度为  $\frac{1}{q}$  的区间, 点  $P$  必位于这样一个区间之内, 即  $P$  一定介于两个有理点  $\frac{p}{q}$  和  $\frac{p+1}{q}$  之间. 这就说明  $P$  和有理点  $\frac{p}{q}$  之间的距离不超过  $\frac{1}{q}$ , 而只要  $q$  很大, 这个距离就可以很小.

虽然有理点在  $L$  上具有稠密性, 不过  $L$  上点并不都能用有理数表示. 例如, 考虑单位长度的正方形, 其对角线长的长度记为  $l$ ,  $l$  通常表示为  $\sqrt{2}$ , 这不是一个有理数: 如果  $l = \frac{p}{q}$  为有理数, 其中  $p, q$  是无公共因子的正整数, 则由勾股定理有

$$1^2 + 1^2 = l^2 = \frac{p^2}{q^2}, \text{ 或 } p^2 = 2q^2,$$

这表明  $p = 2k$  为偶数, 代入上面的等式得

$$2k^2 = q^2,$$

因此  $q$  也是偶数,  $p, q$  就有 2 这个公共因子, 这和我们的假设相矛盾. 更一般地, 有

**命题 1.2.1.** (\*) 设  $n$  为正整数, 如果  $n$  不是完全平方数, 则  $\sqrt{n}$  不是有理数.

**证明.** (反证法) 因为  $n$  不是完全平方数, 因此它介于两个相邻的完全平方数之间, 比如说  $k^2 < n < (k+1)^2$ . 此时  $\sqrt{n} = k + \frac{p}{q}$ , 其中  $k, p, q$  为正整数,  $p/q$  是  $\sqrt{n}$  的小数部分,  $0 < p/q < 1$ . 上式两边平方以后得

$$n = k^2 + 2k\frac{p}{q} + \frac{p^2}{q^2},$$

整理后得

$$p^2 = q(nq - k^2q - 2kp) = ql, \quad l = nq - k^2 - 2kp.$$

这说明  $l$  也是正整数, 且

$$\frac{p}{q} = \frac{l}{p}, \quad \sqrt{n} = k + \frac{p}{q} = k + \frac{l}{p}.$$

从  $p/q$  得到  $l/p$  的过程可以重复下去, 且每次分母都变成了更小的正整数. 但这就得出了矛盾, 因为比  $q$  小的正整数只有有限个 (只有  $q-1$  个).  $\square$

我们把象  $l = \sqrt{2}$  这样不能用有理点表示的数称为**无理数**. 无理数的另一自然的例子是圆周率  $\pi$ , 几何上看圆周率就是圆周的周长和其直径之比.  $\pi$  的无理性的证明就没那么初等了 (见本书第七章).

有理数和无理数统称实数. 实数的理论直到 19 世纪才被严格建立起来, 主要的贡献者是 Dedekind 等. Dedekind 使用了现在被称为 Dedekind 分割的一种方法从有理数出发构造实数系, 并且构造出来的数系是完备的, 它们仍然满足有理数的运算法则, 直线  $L$  上的点和实数系之间有着一一对应. 我们不打算在此讲述 Dedekind 的构造 (见本章附录). 除了 Dedekind 分割理论以外, Cantor 的实数模型也值得一提. 这也就是大家所熟悉的实数的小数表示理论, 在这种理论中, 有限小数或无限循环小数表示有理数, 而无限不循环小数表示无理数. 我们也不去探讨严格的 Cantor 理论, 不过, 第二章第一节和第八章第二节中关于无限小数的例子可供读者参考.

实数的全体组成的集合用  $\mathbb{R}$  表示. 设  $a < b$  为实数, 记

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\},$$

称为以  $a, b$  为端点的**闭区间**; 记

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$

称为以  $a, b$  为端点的**开区间**; 可以类似地定义  $[a, b)$ ,  $(a, b]$  (半开半闭区间), 和无限区间

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}, \quad (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\},$$



以及

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}, \quad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\},$$

等等, 统称为区间.  $\mathbb{R}$  自身也常写为区间  $(-\infty, \infty)$ . 区间可以这样刻画:  $I$  为区间当且仅当任取  $a < b \in I$ , 必有  $[a, b] \subset I$ . 一般用  $|I|$  表示区间  $I$  的长度.

设  $A$  为  $\mathbb{R}$  的子集 (称为数集). 如果存在  $M \in A$ , 使得对任意的  $x \in A$ , 均有  $x \leq M$ , 则称  $M$  为  $A$  的**最大数**, 记为  $M = \max A$ ; 如果存在  $m \in A$ , 使得对任意的  $x \in A$ , 均有  $x \geq m$ , 则称  $m$  为  $A$  的**最小数**, 记为  $m = \min A$ . 当  $A$  为非空有限数集时,  $A$  的最大数和最小数都存在且分别为  $A$  的有限个元素中的最大者和最小者.

如果  $A$  为无限集, 则其最大数或最小数可能不存在, 如  $A = (0, 1)$  就是这样的例子. 为此我们引入极为重要新概念: 上确界和下确界, 他们将分别代替最大数和最小数的概念.

设  $A$  为一个非空数集. 如果存在  $M \in \mathbb{R}$ , 使得对任意的  $x \in A$ , 均有  $x \leq M$ , 则称  $A$  有上界,  $M$  是  $A$  的一个**上界**; 如果存在  $m \in \mathbb{R}$ , 使得对任意的  $x \in A$ , 均有  $x \geq m$ , 则称  $A$  有下界,  $m$  是  $A$  的一个**下界**; 如果  $A$  既有上界又有下界, 则称为**有界集**. 显然,  $A$  是有界集当且仅当存在  $M$ , 使得对任何  $x \in A$ , 均有  $|x| \leq M$ .

**例 1.2.1.**  $(-\infty, 0)$  有上界, 0 为一个上界;  $(1, +\infty)$  有下界, 1 为一个下界;  $(0, 1)$  为有界集.

需要注意的是, 有上 (下) 界的数集, 它的上 (下) 界不是惟一的. 例如, 如果  $M$  为  $A$  的上界, 则对任意  $\varepsilon > 0$ ,  $M + \varepsilon$  均为  $A$  的上界. 不过, 我们有下面重要的结果, 它是微积分极限理论的基石.

**定理 1.2.2 (确界原理).** 如果非空数集  $A$  有上界, 则它有一个最小上界, 称为  $A$  的**上确界**, 记为  $\sup A$ ; 如果  $A$  有下界, 则它有一个最大下界, 称为  $A$  的**下确界**, 记为  $\inf A$ .

**例 1.2.2.** 求集合  $A = (0, 1)$  的上确界和下确界.

**解.** 显然, 0 是  $A$  的一个下界. 设  $a > 0$ , 因为  $\frac{a}{a+1} \in (0, 1)$ , 且  $\frac{a}{a+1} < a$ , 所以  $a$  不是  $A$  的下界. 这说明 0 是  $A$  的最大下界, 即  $A$  的下确界是 0. 同理, 可以说明 1 是  $A$  的上确界.  $\square$

确界原理是实数系的基本性质, 我们在此只承认它 (参见本章最后一节), 在下一章最后一节我们会证明确界原理和另外几条实数基本定理的等价性. 下面讨论一下上确界和下确界的简单性质.

我们约定, 如果数集  $A$  没有上界, 则记  $\sup A = +\infty$ ; 如果  $A$  没有下界, 则记  $\inf A = -\infty$ . 显然, 如果  $A$  有最大数, 则最大数就是它的上确界; 如果  $A$  有最小数, 则最小数就是它的下确界. 按照定义, 我们还有:

(1) 设  $A$  有上确界  $M$ , 则对任意的  $x \in A$ , 均有  $x \leq M$ ; 任给正数  $\varepsilon$ , 由于  $M - \varepsilon$  不是  $A$  的上界, 因此存在  $x' \in A$ , 使得  $x' > M - \varepsilon$ .

(2) 设  $A$  有下确界  $m$ , 则对任意的  $x \in A$ , 均有  $x \geq m$ ; 任给正数  $\varepsilon$ , 由于  $m + \varepsilon$  不是  $A$  的下界, 因此存在  $x' \in A$ , 使得  $x' < m + \varepsilon$ .

(3) 设  $A$  有上确界, 则  $-A = \{-x | x \in A\}$  有下确界, 且  $\inf(-A) = -\sup A$ ; 设  $A$  有下确界, 则  $-A = \{-x | x \in A\}$  有上确界, 且  $\sup(-A) = -\inf A$ .

对于有界数集, 我们还有

**命题 1.2.3.** 设  $A, B$  为非空有界数集, 则

$$\inf(A + B) = \inf A + \inf B; \quad \sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

其中  $A + B = \{x + y | x \in A, y \in B\}$ .

**证明.** 以上确界为例. 任取  $x \in A, y \in B$ , 则  $x \leq \sup A, y \leq \sup B$ , 于是

$$x + y \leq \sup A + \sup B.$$

因此  $\sup A + \sup B$  是数集  $A + B$  的一个上界. 另一方面, 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $x' \in A, y' \in B$ , 使得

$$x' > \sup A - \varepsilon, \quad y' > \sup B - \varepsilon,$$

即

$$x' + y' > \sup A + \sup B - 2\varepsilon.$$

设  $M$  是  $A + B$  的一个上界, 则  $M \geq x' + y'$ , 上式表明

$$M > \sup A + \sup B - 2\varepsilon. \quad (1.1)$$

根据  $\varepsilon$  的任意性即知  $M \geq \sup A + \sup B$ , 因此  $\sup A + \sup B$  是  $A + B$  的最小上界.  $\square$

**注.** 上面最后一句话的严格证明是这样的: 如果  $M < \sup A + \sup B$ , 则取

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\sup A + \sup B - M) > 0$$

导入不等式 (1.1) 就得到了矛盾.

我们知道, 如果  $A, B$  是有限数集, 且  $A \subset B$ , 则  $\min A \geq \min B, \max A \leq \max B$ . 这个结果也可以推广到上确界和下确界.

**命题 1.2.4.** 设  $A \subset B$ , 则当  $B$  有下界时  $\inf A \geq \inf B$ ; 当  $B$  有上界时  $\sup A \leq \sup B$ .

**证明.** 以上确界为例. 任取  $x \in A$ , 则  $x \in B$ , 于是  $x \leq \sup B$ . 这说明  $\sup B$  也是  $A$  的一个上界, 因而  $A$  有上确界, 且  $\sup A \leq \sup B$ .  $\square$

最后, 我们提一下本书中常用的初等等式和不等式. 下面的 Newton 二项式展开在下文中常常用到 ( $n$  为正整数):

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

常用不等式中, 一个是**三角不等式**, 即

$$|a+b| \leq |a| + |b|, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \text{或} \quad |x-y| \leq |x-z| + |z-y|, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

另一个是 **Cauchy 不等式**, 即

$$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \text{或} \quad ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

### 习题 1.2

1. 证明  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  是无理数; 更一般地, 对任意正整数  $n$ , 证明  $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$  都是无理数. (提示: 有理数的平方还是有理数.)
2. 对任意正整数  $n$ , 证明  $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}$  都是无理数.
3. 说明任意两个不同的有理点之间一定存在其它的有理点, 并由此说明  $[0, 1]$  内的有理数不能按从小到大的顺序排成一列. (提示: 考虑两个有理数的平均.)
4. 证明, 如果一个数集存在最大数, 则最大数是惟一的; 最小数也一样. 这些结论对确界成立吗?
5. 求下列数集的上确界和下确界:

$$(1) \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}; \quad (2) \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 1 < 0\}.$$

6. 设  $a, b, c$  为实数 (常数). 如果任给正数  $\varepsilon \in (0, 1)$ , 均成立

$$a + c \cdot \varepsilon \leq b,$$

证明  $a \leq b$ .

7. 设  $A$  有上确界, 则  $-A = \{-x \mid x \in A\}$  有下确界, 且  $\inf(-A) = -\sup A$ ; 设  $A$  有下确界, 则  $-A = \{-x \mid x \in A\}$  有上确界, 且  $\sup(-A) = -\inf A$ .

8. 设  $A$  为有界非空数集,  $x \in \mathbb{R}$ , 则

$$\inf(x + A) = x + \inf A, \quad \sup(x + A) = x + \sup A.$$

9. 设  $A, B$  为非空有界数集, 则

$$\inf(A + B) \leq \inf A + \sup B \leq \sup(A + B).$$

10. 设  $a, b, c, d$  为正实数, 如果  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ , 则

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

11. 设  $x \in [a, b]$ ,  $y \in [c, d]$ , 证明

$$|x - y| \leq \frac{1}{2}[(b - a) + (d - c) + |c - a| + |d - b|].$$

12. 设  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , 证明

$$|\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2}| \leq |b - c|,$$

并求等号成立的条件.

13. 设  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , 证明

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2,$$

你能推广到多个实数的一般情形吗?

### §1.3 映射与函数

在前面两节我们介绍了集合和数的集合. 集合是人们对研究对象的一种抽象化. 当我们研究不同性质的对象之间的关系时, 集合到集合之间的对应就必须加以考虑.

**定义 1.3.1 (映射).** 设  $X, Y$  为集合. 如果对于每一个元素  $x \in X$ , 都有  $Y$  中惟一元素  $y$  与之对应, 则称这种对应关系为从  $X$  到  $Y$  的一个映射, 记为

$$f: X \rightarrow Y, \quad y = f(x),$$

或

$$f: X \rightarrow Y, \quad x \mapsto f(x),$$

我们将  $y = f(x)$  称为  $x$  在  $f$  下的象, 而将  $x$  称为  $y$  的一个原象或逆象. 集合  $X$  称为映射  $f$  的定义域,  $f$  的象的全体组成的集合  $f(X)$  是  $Y$  的子集, 称为  $f$  的值域, 即

$$f(X) = \{f(x) | x \in X\}.$$

**注.** 映射有时也称为**函数**, 特别是当  $Y \subset \mathbb{R}$  是数集时更是如此. 通常也把映射写为  $y = f(x)$  或  $f(x)$ , 这时  $x$  也称为变量或自变量,  $y$  也称为因变量. 如果  $X, Y \subset \mathbb{R}$  均为数集, 映射  $f: X \rightarrow Y$  也称为一元函数或一元实值函数或一元实变函数.

函数通常有三种基本的表示方法: 一是列表法, 即将自变量  $x$  和因变量  $y$  之间的关系一一罗列出来; 二是图形法, 以一元函数为例, 函数  $f$  可以表示为平面上的点集  $\{(x, f(x))\}$ ; 三是解析法, 即用解析表达式来表示函数. 下面是几个例子, 其中例一和例二是函数的分段表示.

**例 1.3.1.** 特征函数  $\chi_A$ .

设  $A$  为集合  $X$  的子集, 定义函数  $\chi_A: X \rightarrow \mathbb{R}$  为

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in X - A. \end{cases}$$

这个函数称为  $A$  的特征函数. 容易看出,  $A \neq B$  当且仅当  $\chi_A \neq \chi_B$ .

**例 1.3.2.** 符号函数.

定义函数  $\text{sgn}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  如下

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

这个函数称为符号函数.

**例 1.3.3.** 设  $a, b$  为固定的实数 (常数), 如下定义映射

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = ax + b,$$

这是熟知的线性函数.

**定义 1.3.2** (单射和满射). 设  $f: X \rightarrow Y$  为映射, 如果对任意  $x_1 \neq x_2 \in X$ , 均有  $f(x_1) \neq f(x_2)$ , 则称  $f$  为单射; 如果  $f(X) = Y$ , 即对任意  $y \in Y$ , 均存在  $x \in X$ , 使得  $y = f(x)$ , 则称  $f$  为满射.

**注.** 如果  $f: X \rightarrow Y$  既是单射, 又是满射, 则称  $f$  为**一一映射**或**一一满射**. 在有的书上一一映射是指我们这儿的单射.

**例 1.3.4.** 在集合  $\mathbb{Z}^+$  和  $\mathbb{N}$  之间建立一一映射.

解. 定义映射  $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{N}$  如下:

$$f(n) = n + 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+,$$

则易见  $f$  是一一映射. □

注. 一般地, 集合  $X$  可数当且仅当存在从  $X$  到  $\mathbb{N}$  之间的一一映射. 这可以作为可数集的正式定义.

例 1.3.5. 设  $a, b$  为固定的实数 (常数), 如下定义映射

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + ax + b,$$

因为

$$f(x) = x^2 + ax + b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4} \geq b - \frac{a^2}{4}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

故  $f$  不是满射. 不难看出  $f$  也不是单射.

例 1.3.6. (\*) 设  $n$  为正奇数, 如下定义映射

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^n,$$

则  $f$  是一一映射.

证明. 我们熟知当  $x < y$  时  $x^n < y^n$ , 因此  $f$  是单射. 下面说明  $f$  为满射. 不妨设  $y_0 > 0$ , 我们要找到  $x_0 \in \mathbb{R}$ , 使得  $y_0 = x_0^n$ . 考虑数集

$$A = \{r \in \mathbb{R} \mid r^n \leq y_0\},$$

因为  $0^n = 0 < y_0$ , 故  $0 \in A$ , 这说明  $A$  不是空集. 另一方面,  $(y_0 + 1)^n \geq y_0 + 1 > y_0$ , 因此  $y_0 + 1$  是  $A$  的上界. 由确界原理,  $A$  有上确界, 记为  $x_0$ .

按照确界的定义, 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $r' \in A$ , 使得

$$r' > x_0 - \varepsilon,$$

这说明

$$(x_0 - \varepsilon)^n < (r')^n \leq y_0.$$

根据二项式展开, 当  $0 < \varepsilon < 1$  时, 有

$$\begin{aligned} (x_0 - \varepsilon)^n &= x_0^n + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k (x_0)^k (-\varepsilon)^{n-k} \\ &\geq x_0^n - \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k |x_0|^k, \end{aligned}$$

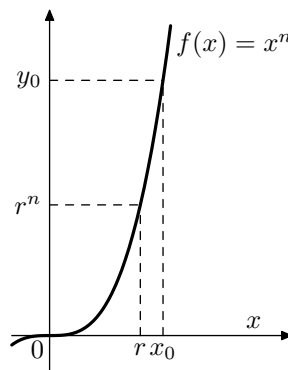


图 1.3 实数开  $n$  次方

这说明, 对任意  $0 < \varepsilon < 1$ , 有

$$x_0^n - \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k |x_0|^k \leq (x_0 - \varepsilon)^n < y_0,$$

由  $\varepsilon$  的任意性得

$$x_0^n \leq y_0.$$

如果  $x_0^n < y_0$ , 则对充分小的  $\varepsilon > 0$ , 也有

$$(x_0 + \varepsilon)^n \leq x_0^n + \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k |x_0|^k < y_0,$$

但这与  $x_0$  是  $A$  的上确界相矛盾. 因此只能有  $x_0^n = y_0$ . □

**例 1.3.7.** 设  $n$  是正整数, 则映射

$$f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty), \quad f(x) = x^n$$

为一一映射.

**证明.** 证明和上例完全类似, 留作习题. □

**定义 1.3.3 (逆映射).** 设  $f: X \rightarrow Y$  为一一映射, 因此对任意  $y \in Y$ , 存在唯一的  $x \in X$ , 使得  $y = f(x)$ , 定义映射

$$f^{-1}: Y \rightarrow X, \quad f^{-1}(y) = x,$$

称为  $f$  的逆映射.

**注.** 根据这个定义, 一一映射也称为可逆映射. 逆映射有时也称为**反函数**. 根据上面的例子, 当  $n$  为正奇数时,  $f(x) = x^n$  可逆, 其反函数记为  $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$ ; 当  $n$  为一般正整数时,  $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$  对  $x \geq 0$  也有定义.

**例 1.3.8.** 正弦函数

$$f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1], \quad f(x) = \sin x$$

是一一映射, 其反函数为  $x = \arcsin y$ .

**定义 1.3.4 (复合映射).** 设  $f: Y \rightarrow Z$ ,  $g: X \rightarrow Y$  均为映射, 我们定义映射

$$f \circ g: X \rightarrow Z, \quad f \circ g(x) = f(g(x)), \quad x \in X,$$

称为  $f$  和  $g$  的复合映射.

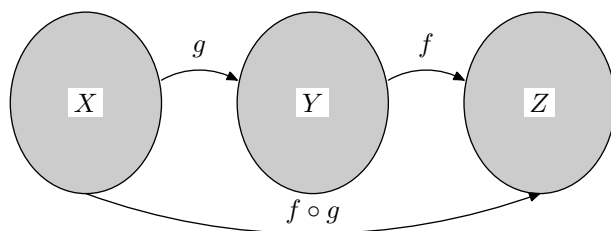


图 1.4 复合映射

注. 用复合映射的语言来描述, 则映射  $f: X \rightarrow Y$  可逆当且仅当存在映射  $g: Y \rightarrow X$ , 使得  $f \circ g = id_Y$ ,  $g \circ f = id_X$ , 其中

$$id_X: X \rightarrow X, \quad id_X(x) = x; \quad id_Y: Y \rightarrow Y, \quad id_Y(y) = y$$

分别表示  $X$  到自身和  $Y$  到自身的恒同映射.

**例 1.3.9.** 当  $n$  为正整数时, 函数  $h(x) = x^{-n}$  ( $x \neq 0$ ) 可以看成是两个函数  $f(x) = x^n$  和  $g(x) = \frac{1}{x}$  ( $x \neq 0$ ) 的复合.

进一步, 对于有理数  $\frac{p}{q}$  ( $p, q$  为无公共因子的整数,  $q$  为正奇数), 我们定义

$$x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}} \quad (x > 0), \quad x^{\frac{p}{q}} = (-1)^{\frac{p}{q}} (|x|^p)^{\frac{1}{q}} \quad (x < 0),$$

其中, 当  $p$  为偶数时  $(-1)^{\frac{p}{q}} = 1$ , 当  $p$  为奇数时  $(-1)^{\frac{p}{q}} = -1$ . 当  $q$  为偶数时, 上式对  $x < 0$  无定义.

映射的复合可以看成是从已知映射出发构造新映射的一种方法. 对于实函数而言, 由于其值域是数集, 而实数有四则运算, 因此对函数也可以定义四则运算, 这样就得到了构造函数的更多手段.

**定义 1.3.5** (函数的四则运算). 设  $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$  为函数.

(1) 如果  $\alpha, \beta$  为实数, 函数

$$\alpha f + \beta g: X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \alpha f(x) + \beta g(x)$$

称为  $f$  和  $g$  的线性组合;

(2) 函数

$$fg: X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)g(x)$$

称为  $f$  和  $g$  的乘积;

(3) 如果  $g(x) \neq 0, \forall x \in X$ , 则函数

$$f/g: X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)/g(x)$$

称为  $f$  和  $g$  的商.



注. 如果两个函数的定义域不同, 则我们也可以在它们的公共定义域上定义四则运算.

**定义 1.3.6 (初等函数).** 下列五类函数称为基本初等函数:

- (1) 常值函数  $f(x) = C$  和幂函数  $f(x) = x^\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ );
- (2) 指数函数  $f(x) = a^x$  ( $a > 0, a \neq 1$ );
- (3) 对数函数  $f(x) = \log_a x$  ( $a > 0, a \neq 1$ );
- (4) 三角函数  $f(x) = \sin x, \cos x, \tan x$  等;
- (5) 反三角函数  $f(x) = \arcsin x, \arccos x, \arctan x$  等.

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算所生成的函数称为初等函数.

注. 初等函数的定义域是其自变量的最大取值范围. 这些函数的完整定义通常要借助确界原理. 以指数函数为例, 设  $a > 0$ , 我们要对任意实数  $x$  定义  $a^x$  的值. 当  $a = 1$  时, 我们定义  $a^x \equiv 1$ . 设  $a > 1$ , 我们规定  $a^0 = 1$ . 如果  $x > 0$ , 当  $x = \frac{p}{q}$  ( $p, q$  为正整数) 为有理数时, 我们定义  $a^x$  为这样一个正数, 它的  $q$  次方为  $a^p$ ; 当  $x$  为正无理数时, 定义

$$a^x = \sup\{a^r \mid r \in (0, x) \cap \mathbb{Q}\};$$

当  $x < 0$  时, 定义

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}};$$

如果  $a < 1$ , 定义

$$a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}.$$

这样就定义了所有的指数函数. 类似的, 还可以定义当  $\alpha$  为无理数时的幂函数  $x^\alpha$  ( $x > 0$ ), 我们留给读者完成. 在后面的章节中我们将通过指数函数和对数函数的复合来重新考虑幂函数的定义.

一元函数也可用其平面图像来直观表示. 函数  $f$  的图像是指由  $(x, f(x))$  ( $x$  属于  $f$  的定义域) 组成的集合, 它是平面  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  的子集. 通过观察函数图像可以了解函数的简单特性. 函数的简单特性包括:

(1) 有界性. 如果  $f$  的值域有上界, 则称函数  $f$  有上界; 如果  $f$  的值域有下界, 则称  $f$  有下界; 既有下界又有上界的函数称为有界函数.

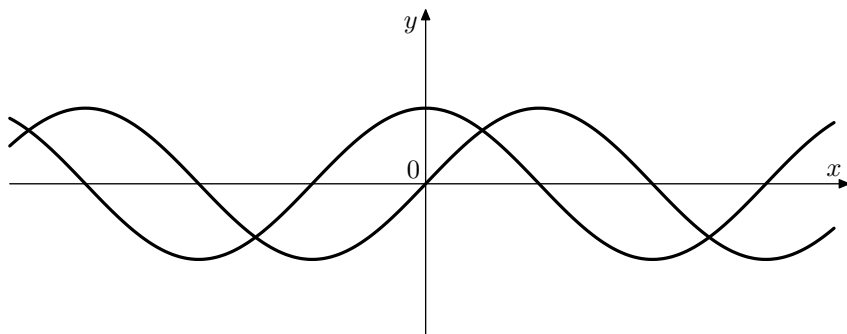


图 1.5 函数的图像

(2) 单调性. 如果对于定义域中任意的  $x_1 < x_2$ , 均有  $f(x_1)(<) \leq f(x_2)$ , 则称  $f$  是 (严格) 单调递增函数; 如果对于定义域中任意的  $x_1 < x_2$ , 均有  $f(x_1)(>) \geq f(x_2)$ , 则称  $f$  是 (严格) 单调递减函数; 它们统称为单调函数.

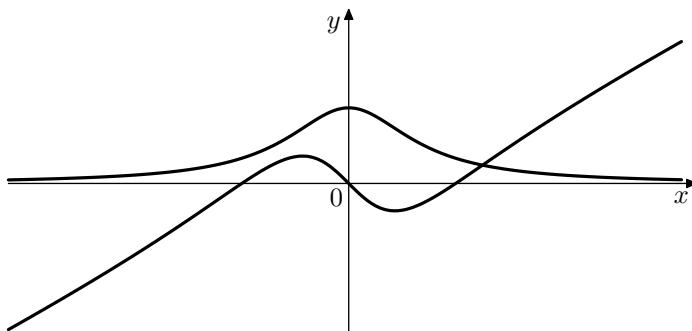


图 1.6 函数的图像

(3) 奇偶性. 如果  $f(x) = -f(-x)$ , 则称  $f$  是奇函数; 如果  $f(x) = f(-x)$ , 则称  $f$  是偶函数.

(4) 周期性. 如果存在常数  $T \neq 0$ , 使得  $f(x) = f(x + T)$ , 则称  $f$  是周期函数,  $T$  为其周期. 周期函数的典型例子是三角函数.

**例 1.3.10.**  $f(x) = x^3$  是单调递增的无界奇函数;  $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$  是有界偶函数, 它在区间  $(-\infty, 0]$  上单调递增, 在区间  $[0, +\infty)$  上单调递减.

**例 1.3.11.**  $\mathbb{R}$  上的任何函数均可写成一个奇函数和一个偶函数之和.

**证明.** 给定函数  $f(x)$ , 记

$$g(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)], \quad h(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)],$$

则  $g(x)$  为奇函数,  $h(x)$  为偶函数, 且  $f(x) = g(x) + h(x)$ .  $\square$

### 习题 1.3

1. 你能在集合  $\mathbb{Z}$  和  $\mathbb{Z}^+$  之间建立一一映射吗? (提示: 将各自元素排成一列.)
2. 有一个很有用的**抽屉原理**是这样叙述的: 有  $m$  个物品放入  $n$  个抽屉中, 如果  $m > n$ , 则至少有一个抽屉中含有两件或更多的物品. 用映射的观点如何重新描述抽屉原理?
3. 设  $A, B$  为  $X$  的子集, 则

$$\chi_{A^c} = 1 - \chi_A, \quad \chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B, \quad \chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}.$$

4. 当  $n$  为非零整数时, 证明函数  $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ ,  $f(x) = x^n$  是一一映射.
5. 设  $f: X \rightarrow Y$  为映射,  $B \subset Y$ . 记

$$f^{-1}(B) = \{x \mid x \in X, f(x) \in B\},$$

称为  $B$  的原象. 证明

$$(1) f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D), \quad f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D);$$

$$(2) f(f^{-1}(B)) \subset B, \quad f^{-1}(f(A)) \supset A.$$

6.  $f(x) = |x|$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) 是初等函数吗?
7. 求下列函数跟自身的复合, 多次复合以后有什么规律?

$$(1) f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad (2) f(x) = \frac{1}{x + 1}.$$

8. 设  $X$  为非空有限集合, 对于任意函数  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ , 我们定义

$$\int_X f = \sum_{i=1}^n f(x_i), \quad \text{其中 } X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

- (i) 设  $f, g$  为函数,  $\alpha, \beta$  为常数, 则  $\int_X (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_X f + \beta \int_X g$ .
- (ii) 设  $A$  为  $X$  的子集, 则  $\int_X \chi_A = \#A$ , 其中  $\#A$  表示  $A$  的元素个数.
- (iii) 设  $A, B$  为  $X$  的子集, 则  $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$ . 这称为**容斥原理**. 你能推广到多个子集的情形吗?

## §1.4 附录: 实数系的构造

在初次学习本书时, 本节内容可以略过. 我们在本节中给出实数集  $\mathbb{R}$  的一种构造方法, 构造出来的对象除了是一个集合外还具有很多基本性质, 所以通常又将它称为实数系. 我们从有理数  $\mathbb{Q}$  出发来构造实数. 需要提醒读者注意的是, 自然数, 整数以及有理数的建立也是需要严格的数学基础的, 不过这对于学习微积分不是至关重要的, 因此我们还是从有理数开始, 毕竟有理数比较直观.

下面构造实数的方法是 Dedekind 在 1872 年发明的, 这种方法以 Dedekind 分割而著称.

**定义 1.4.1** (Dedekind 分割). 设  $\alpha$  为  $\mathbb{Q}$  的子集, 如果满足以下三个条件

- (1)  $\alpha \neq \emptyset, \alpha \neq \mathbb{Q}$ ;
- (2) 当  $p \in \alpha, q \in \alpha^c$  时,  $p < q$ ;
- (3) 任给  $p \in \alpha$ , 存在  $q \in \alpha$ , 使得  $p < q$ ;

则称  $\alpha$  为  $\mathbb{Q}$  的一个分割, 分割的全体组成的集合记为  $\mathbb{R}$ .

注. 定义中的条件 (1) 是说  $\alpha$  为  $\mathbb{Q}$  的非空真子集, 而 (3) 是说  $\alpha$  中无最大数, 这一条不是本质的: 如果  $\alpha$  满足条件 (1) 和 (2), 且有最大数, 将此最大数去掉后  $\alpha$  就是满足所有三个条件的分割了.

**命题 1.4.1.** 设  $\alpha$  为  $\mathbb{Q}$  的一个分割. 则

- (1) 如果  $p < q, q \in \alpha$ , 则  $p \in \alpha$ ;
- (2) 设  $w > 0$ , 则存在整数  $n$ , 使得  $nw \in \alpha, (n+1)w \in \alpha^c$ .

**证明.** (1) (反证法) 如果  $p \in \alpha^c$ , 则由分割定义的第二条即知  $q < p$ , 这和假设相矛盾.

(2) 取  $r \in \alpha$ , 则当  $m < r/w$ , 即  $mw < r$  时, 由 (1) 即知  $mw \in \alpha$ . 再取  $s \in \alpha^c$ , 当  $m > s/w$  时  $mw \in \alpha^c$ . 这说明, 下面的整数子集

$$\{m \in \mathbb{Z} \mid mw \in \alpha\}$$

是非空且有上界的集合, 因此有最大数  $n$ ,  $n$  就是满足要求的整数. □

**例 1.4.1.** 有理数对应的分割.

设  $r \in \mathbb{Q}$  为一个有理数, 记

$$r^* = \{s \in \mathbb{Q} \mid s < r\},$$

则容易验证  $r^*$  是一个分割, 称为由有理数  $r$  决定的分割.

**例 1.4.2.** 考虑  $\mathbb{Q}$  的子集  $\alpha = \{r \in \mathbb{Q} \mid r^2 < 2\} \cup \{r \in \mathbb{Q} \mid r \leq 0\}$ , 则  $\alpha$  是一个分割.

事实上, 容易看出  $\alpha$  为非空子集. 分割定义的第二条也是容易验证的, 我们来看分割定义的第三条, 即  $\alpha$  中没有最大数: 如果  $r \leq 0$ , 则  $r < 1$ , 而  $1 \in \alpha$ ; 如果  $r > 0$ ,  $r^2 < 2$ , 则

$$r < s = r - \frac{r^2 - 2}{r + 2} = \frac{2r + 2}{r + 2},$$

且

$$s^2 - 2 = \frac{2(r^2 - 2)}{(r + 2)^2} < 0,$$

即  $s \in \alpha$ , 且  $r < s$ .

如果递归地定义有理数列  $x_n$  如下:

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{2x_n + 2}{x_n + 2}, \quad n \geq 0,$$

则根据刚才的讨论,  $\{x_n\}$  为严格单调递增数列 (即  $x_n < x_{n+1}$ ), 且

$$0 < 2 - x_{n+1}^2 = \frac{2(2 - x_n^2)}{(x_n + 2)^2} < \frac{1}{4}(2 - x_n^2),$$

由此得到下面的估计

$$0 < 2 - x_n^2 < \frac{1}{4^n}, \quad n \geq 1. \quad (1.2)$$

下面我们把有理数  $\mathbb{Q}$  所满足的基本性质都推广到  $\mathbb{R}$  上, 首先看次序如何定义.

**次序关系** 设  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , 如果  $\alpha$  为  $\beta$  的真子集, 则称  $\alpha$  小于  $\beta$ , 记为  $\alpha < \beta$ . 我们也用记号  $\alpha \leq \beta$  表示  $\alpha$  为  $\beta$  的子集, 此时  $\alpha = \beta$  或  $\alpha < \beta$ . 次序关系的性质有

- 如果  $\alpha < \beta$ ,  $\beta < \gamma$ , 则  $\alpha < \gamma$ . 这是因为真子集的真子集还是真子集.
- 任给  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , 下面的三种关系有且仅有一个成立:

$$\alpha < \beta, \quad \alpha = \beta, \quad \beta < \alpha$$

事实上, 设前两个关系不成立, 则  $\alpha$  不是  $\beta$  的子集, 因此存在  $r \in \alpha$ , 但  $r \notin \beta$ . 如果  $s \in \beta$ , 则  $s < r$ , 从而  $s \in \alpha$ , 这就说明  $\beta$  为  $\alpha$  的子集, 由于  $\alpha \neq \beta$ , 故  $\beta$  为  $\alpha$  的真子集.

如果  $r, s \in \mathbb{Q}$ , 则当  $r = s$  时  $r^* = s^*$ , 当  $r < s$  时  $r^* < s^*$ . 因此我们定义的次序关系是自然的. 有了次序就可以定义上界.

**上界和上确界** 设  $A \subset \mathbb{R}$  为  $\mathbb{R}$  的非空子集,  $\beta \in \mathbb{R}$ . 如果任给  $\alpha \in A$ , 均有  $\alpha \leq \beta$ , 则称  $\beta$  为  $A$  的一个上界. 设  $\gamma$  为  $A$  的一个上界, 如果任给  $A$  的另一上界  $\gamma'$ , 均有  $\gamma \leq \gamma'$ , 则称  $\gamma$  为  $A$  的最小上界或上确界, 记为  $\sup A$ . 易见, 上确界如果存在则必定是惟一的.

**定理 1.4.2** (确界原理).  $\mathbb{R}$  的非空子集如果有上界则必有上确界.

**证明.** 设  $A$  为  $\mathbb{R}$  的非空子集,  $\beta$  为  $A$  的一个上界, 记

$$\gamma = \bigcup_{\alpha \in A} \alpha \subset \mathbb{Q},$$

下面先说明  $\gamma$  为一个分割.  $\gamma$  显然是非空子集, 由于  $\beta$  为  $A$  的一个上界, 故  $\gamma \subset \beta$ , 这说明  $\gamma \neq \mathbb{Q}$ . 这验证了分割定义的第一条.

设  $r \in \gamma, s \notin \gamma$ . 于是存在  $\alpha \in A$ , 使得  $r \in \alpha$ , 此时  $s \notin \alpha$ , 因此  $r < s$ . 这验证了分割定义的第二条. 第三条: 设  $r \in \gamma$ , 于是存在  $\alpha \in A$ , 使得  $r \in \alpha$ , 此时存在  $s \in \alpha$ , 使得  $r < s$ , 由  $\gamma$  的定义即知  $s \in \gamma$ .

其次我们说明  $\gamma$  为  $A$  的最小上界. 根据  $\gamma$  的构造, 显然  $\gamma$  为  $A$  的一个上界. 如果  $\gamma'$  为另一上界, 则  $\alpha \subset \gamma', \forall \alpha \in A$ . 这说明  $\gamma \subset \gamma'$ .  $\square$

**例 1.4.3.** 实数表示为某个非空子集的上确界.

如果  $r \in \mathbb{Q}$  为有理数, 令

$$A = \{s^* \in \mathbb{R} \mid s < r, s \in \mathbb{Q}\} = \{s^* \mid s \in r^*\},$$

则  $r^* = \sup A$ . 事实上, 由定义有

$$\sup A = \bigcup_{s < r} s^* = \bigcup_{s < r} \{t \in \mathbb{Q} \mid t < s\} = \{t \in \mathbb{Q} \mid t < r\} = r^*.$$

一般地, 如果  $\alpha \in \mathbb{R}$  为一个分割, 则

$$\alpha = \sup\{r^* \mid r \in \alpha\}.$$

下面我们把  $\mathbb{Q}$  中的四则运算推广到  $\mathbb{R}$  中.

**加法运算** 设  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , 定义

$$\alpha + \beta = \{r + s \mid \forall r \in \alpha, s \in \beta\},$$

显然,  $\alpha + \beta$  是  $\mathbb{Q}$  的非空子集. 取  $r' \in \alpha^c, s' \in \beta^c$ , 则任给  $r \in \alpha, s \in \beta$ , 均有  $r < r', s < s'$ , 从而有  $r + s < r' + s'$ , 这说明  $r' + s' \notin \alpha + \beta$ , 即  $\alpha + \beta \neq \mathbb{Q}$ .

设  $p = r + s \in \alpha + \beta$ , 其中  $r \in \alpha, s \in \beta$ . 如果  $q \in (\alpha + \beta)^c$ , 我们要说明  $p < q$ . 事实上, 如果  $q \leq p$ , 则  $q - s \leq r$ , 从而  $q - s \in \alpha, q = (q - s) + s \in \alpha + \beta$ , 这就得到矛盾, 因此只能有  $p < q$ .

$\alpha + \beta$  中无最大数: 设  $p = r + s \in \alpha + \beta$ , 取  $t \in \alpha$ , 使得  $r < t$ , 则  $q = t + s \in \alpha + \beta$ , 且  $p < q$ . 总之,  $\alpha + \beta$  是一个分割, 称为  $\alpha$  与  $\beta$  的和. 求和运算具有以下性质:

- 如果  $r, s \in \mathbb{Q}$ , 则  $r^* + s^* = (r + s)^*$ . 这由定义不难得到.
- (交换律)  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ . 这可从  $\mathbb{Q}$  中加法具有交换律以及  $\alpha + \beta$  和  $\beta + \alpha$  的定义推出.
- (结合律)  $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ . 这可从  $\mathbb{Q}$  中加法具有结合律推出.
- (零元)  $\alpha + 0^* = \alpha$ . 如果  $r \in \alpha$ ,  $s \in 0^*$ , 则  $s < 0$ ,  $r + s < r$ , 因此  $r + s \in \alpha$ , 这说明  $\alpha + 0^* \subset \alpha$ . 反之, 设  $r \in \alpha$ , 取  $r' \in \alpha$ , 使得  $r < r'$ . 此时  $r - r' \in 0^*$ , 从而  $r = r' + (r - r') \in \alpha + 0^*$ , 这又说明  $\alpha \subset \alpha + 0^*$ , 因此  $\alpha + 0^* = \alpha$ .  $0^*$  称为零元.
- (负元) 设  $\alpha \in \mathbb{R}$ , 令

$$\beta = \{r \in \mathbb{Q} \mid \text{存在 } s > 0, \text{ 使得 } -r - s \in \alpha^c\}.$$

我们先来说明  $\beta$  为一个分割. 取  $q \in \alpha^c$ ,  $r = -q - 1$ , 则  $-r - 1 = q \in \alpha^c$ , 因此  $r \in \beta$ , 这说明  $\beta$  是非空子集. 如果  $p \in \alpha$ ,  $r \in \beta$ , 则存在  $s > 0$ , 使得  $-r - s \in \alpha^c$ , 因此  $p < -r - s$ ,  $r < -p - s < -p$ , 特别地,  $-p \in \beta^c$ , 即  $\beta \neq \mathbb{Q}$ . 分割定义的其他两条可类似验证.

我们来说明  $\alpha + \beta = 0^*$ . 如果  $p \in \alpha$ ,  $r \in \beta$ , 则同上所述, 存在  $s > 0$ , 使得  $-r - s \in \alpha^c$ , 因此  $p < -r - s$ ,  $p + r < -s < 0$ , 于是  $p + r \in 0^*$ ,  $\alpha + \beta \subset 0^*$ . 反之, 取  $t \in 0^*$ , 则  $-t/2 > 0$ , 取整数  $n$ , 使得  $-nt/2 \in \alpha$ ,  $-(n+1)t/2 \in \alpha^c$ . 令  $r = (n+2)t/2$ , 则  $-r - (-t/2) \in \alpha^c$ , 因此  $r \in \beta$ , 且

$$t = -nt/2 + r \in \alpha + \beta,$$

这说明  $0^* \subset \alpha + \beta$ .

我们称  $\beta$  为  $\alpha$  的负元, 记为  $\beta = -\alpha$ .

**乘法运算** 令  $\mathbb{R}^+ = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid 0^* < \alpha\}$ , 如果  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ , 令

$$\alpha\beta = \{p \in \mathbb{Q} \mid \text{存在 } 0 < r \in \alpha, 0 < s \in \beta \text{ 使得 } p < rs\},$$

可以验证这是一个分割, 且  $\alpha\beta \in \mathbb{R}^+$ .

**例 1.4.4.** 考虑分割  $\alpha = \{r \in \mathbb{Q} \mid r^2 < 2\} \cup \{r \in \mathbb{Q} \mid r \leq 0\}$ , 则  $\alpha^2 = \alpha\alpha = 2^*$ , 因此记为  $\sqrt{2} = \alpha$ .

事实上, 根据定义, 有

$$\alpha\alpha = \{p \in \mathbb{Q} \mid \text{存在 } 0 < r, s \in \mathbb{Q}, r^2 < 2, s^2 < 2, \text{ 使得 } p < rs\}.$$

当  $r, s > 0, r^2, s^2 < 2$  时  $(rs)^2 < 4$ , 因此  $rs < 2$ , 这说明  $\alpha\alpha \subset 2^*$ . 反之, 如果  $t \in 2^*$ , 取正整数  $n > (2-t)^{-1}$ , 则有

$$4^n > n > (2-t)^{-1},$$

根据例 1.4.2 中的构造和 (1.2) 式, 有

$$0 < 2 - x_n^2 < 4^{-n} < 2 - t,$$

即有  $t < x_n \cdot x_n, 0 < x_n \in \mathbb{Q}, x_n^2 < 2$ , 这说明  $t \in \alpha\alpha$ , 从而  $2^* \subset \alpha\alpha$ . □

对于  $\alpha \in \mathbb{R}$ , 我们规定  $\alpha 0^* = 0^* \alpha = 0^*$ . 对于一般的情形, 令

$$\alpha\beta = \begin{cases} (-\alpha)(-\beta), & \alpha < 0^*, \beta < 0^*, \\ -[(-\alpha)(\beta)], & \alpha < 0^*, 0^* < \beta, \\ -[\alpha(-\beta)], & 0^* < \alpha, \beta < 0^*. \end{cases}$$

这样我们对所有的情形都定义了乘法运算. 乘法运算具有以下性质:

- 如果  $r, s \in \mathbb{Q}$ , 则  $(rs)^* = r^*s^*$ . 以  $r, s > 0$  为例: 根据定义可以看出,

$$\begin{aligned} r^*s^* &= \{p \in \mathbb{Q} \mid \text{存在 } r', s' \in \mathbb{Q}, 0 < r' < r, 0 < s' < s \text{ 使得 } p < r's'\} \\ &= \{p \in \mathbb{Q} \mid p < rs\} = (rs)^*. \end{aligned}$$

- (交换律)  $\alpha\beta = \beta\alpha$ . 这可从有理数乘法的交换律得到, 下面的结合律也一样.
- (结合律)  $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ .
- (单位元)  $\alpha 1^* = \alpha$ . 以  $0^* < \alpha$  为例: 根据定义可以看出,

$$\begin{aligned} \alpha 1^* &= \{p \in \mathbb{Q} \mid p < rs, \text{ 存在 } 0 < r \in \alpha, 0 < s < 1\} \\ &= \{p \in \mathbb{Q} \mid \text{存在 } 0 < r \in \alpha \text{ 使得 } p < r\} = \alpha. \end{aligned}$$

- (逆元) 如果  $\alpha \neq 0^*$ , 则存在  $\beta \in \mathbb{R}$ , 使得  $\alpha\beta = 1^*$ . 事实上, 不妨设  $0^* < \alpha$ , 定义  $\beta$  为

$$\beta = \{s \in \mathbb{Q} \mid \text{存在 } r \in \alpha^c \text{ 使得 } s < r^{-1}\},$$

不难验证这是一个分割, 且  $\alpha\beta = 1^*$ . 我们称  $\beta$  为  $\alpha$  的逆元, 记为  $\beta = \alpha^{-1}$ . 如果  $r$  为非零有理数, 则  $(r^*)^{-1} = (r^{-1})^*$ .

- (分配律)  $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ .



用高等代数的语言来说, 我们迄今为止所做的工作表明, 配备了加法运算和乘法运算的集合  $\mathbb{R}$  是一个域, 称为实数域. 当然, 有理数集合  $\mathbb{Q}$  也是一个域, 并且通过映射

$$f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}, \quad r \mapsto r^*$$

我们还知道  $\mathbb{Q}$  可以看成  $\mathbb{R}$  的子域, 或实数域  $\mathbb{R}$  是有理数域  $\mathbb{Q}$  的一个扩张, 扩张以后的域除了具有有理数域的基本性质以外, 还具备了重要的确界原理, 它使得实数填满了有理数在数轴上所留下的空隙, 因此实数集合  $\mathbb{R}$  也称为实数连续统或实数系. 为了强调实数系的连续性质, 我们再看两个结论.

**定理 1.4.3** (Archimedes 原理). 设  $0 < x \in \mathbb{R}$ , 则任给  $y \in \mathbb{R}$ , 存在正整数  $n$ , 使得  $y < nx$ .

**证明.** 我们不再区分有理数  $r$  与分割  $r^*$ . 考虑  $\mathbb{R}$  的子集

$$A = \{nx \mid n \in \mathbb{N}\},$$

我们说明  $A$  没有上界. (反证法) 如果有上界, 则由确界原理知  $A$  有上确界, 记为  $\alpha$ . 因为  $0 < x$ , 故  $\alpha - x < \alpha$ , 从而存在正整数  $m$ , 使得  $\alpha - x < mx$ , 此时  $\alpha < (m+1)x \in A$ , 这和  $\alpha$  为  $A$  的上界相矛盾.

既然  $A$  没有上界,  $y$  就不是  $A$  的上界, 从而存在正整数  $n$ , 使得  $y < nx$ .  $\square$

**推论 1.4.4** (有理数的稠密性). 任给  $a < b \in \mathbb{R}$ , 存在  $c \in \mathbb{Q}$ , 使得  $a < c < b$ .

**证明.** 由  $a < b$  知  $0 < b - a$ , 由 Archimedes 原理, 存在正整数  $n$ , 使得  $1 < n(b - a)$ . 再由 Archimedes 原理, 存在正整数  $m_1, m_2$ , 使得  $na < m_1, -na < m_2$ . 这说明, 集合

$$A = \{m' \in \mathbb{Z} \mid na < m'\} \subset \mathbb{Z}$$

非空且有下界, 因而存在最小整数  $m \in A$ ,  $m$  满足条件

$$m - 1 \leq na < m.$$

此时就有

$$na < m \leq 1 + na < n(b - a) + na = nb,$$

即  $c = m/n \in \mathbb{Q}$  满足条件  $a < c < b$ .  $\square$

如同我们在本节开头所说的那样, 以上关于实数系的构造方法源于 Dedekind. 实数系还有其它的构造方法, 例如 Cantor 用小数表示以及利用 Cauchy 序列也完成了实数系的构造. 如果用抽象的语言来描述, 则这些构造出来的对象是所谓的具有确界原理的有序域, 这样的域都是互相同构的.

## 第二章 极限

在微积分的发展过程中, 逐渐出现了对导数, 微分, 积分等概念严格化的要求. 极限理论就是在这个背景下建立起来的, 极限理论所用的语言又以所谓的  $\varepsilon - N$  语言或  $\varepsilon - \delta$  语言著称. 我们在今后的课程中会遇到各种各样的极限, 本章将研究最简单的一种情形, 即数列的极限. 这将涉及极限的计算, 极限存在性的判断, 极限的基本性质等等, 它们又和实数系的基本性质密切相关.

### §2.1 数列极限

极限运算可以看成是从一列已知的数出发构造新数的一种手段, 它不同于初等的加减乘除等四则运算, 但却有着类似的性质, 正如确界不同于最大 (小) 数, 但有类似性质一样.

#### §2.1.1 数列极限的定义

按顺序排列的一列数

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

称为一个**数列**, 记为  $\{a_n\}$ .  $a_n$  称为该数列的第  $n$  项, 有时也称为一般项或通项. 作为集合, 如果

$$\{a_n \mid n = 1, 2, \dots\}$$

是有界的, 则称数列  $\{a_n\}$  是有界的, 此时存在  $M$ , 使得

$$|a_n| \leq M, \quad \forall n \geq 1.$$

注. 数列  $\{a_n\}$  可以看成定义在  $\mathbb{N}$  上的函数  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , 其中  $f(n) = a_n$ .

通过考察当  $n$  变大时数列通项  $a_n$  的变化趋势, 我们就得到了数列极限的概念.

**定义 2.1.1** (数列极限). 设  $\{a_n\}$  为数列,  $A \in \mathbb{R}$ . 如果任给  $\varepsilon > 0$ , 都存在正整数  $N = N(\varepsilon)$ , 使得当  $n > N$  时, 有

$$|a_n - A| < \varepsilon,$$

则称  $\{a_n\}$  以  $A$  为极限, 或称  $\{a_n\}$  收敛于  $A$ , 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \quad \text{或} \quad a_n \rightarrow A \quad (n \rightarrow \infty).$$

从直观上看, 如果将数列看成实数轴上的一列点, 则极限就是这样一个点, 当  $n$  越来越大时,  $a_n$  越来越靠近这个点. 为了用准确的数学语言来代替“越来越靠近”

和“当  $n$  越来越大”这样的描述性语言,我们要用到定义中的  $\varepsilon$  和  $N$ , 这里的  $N$  一般是依赖于给定的  $\varepsilon$  的. 这种定义极限的方法也称为  $\varepsilon - N$  语言法.

按照定义, 我们也可以这样来描述极限:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$  当且仅当对于任意  $\varepsilon > 0$ , 数列  $\{a_n\}$  只有至多有限项位于区间  $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$  之外. 因此, 如果存在  $\varepsilon_0 > 0$ , 使得  $\{a_n\}$  中有无限项位于区间  $(A - \varepsilon_0, A + \varepsilon_0)$  之外, 则数列  $\{a_n\}$  不以  $A$  为极限 (这时该数列的极限可能不存在, 如果存在则极限也不等于  $A$ ).

当然, 我们也可以用  $\varepsilon - N$  语言给出数列  $\{a_n\}$  不以  $A$  为极限的定义: 如果存在  $\varepsilon_0 > 0$ , 使得任给正数  $N$ , 均存在  $n_0 > N$  满足不等式  $|a_{n_0} - A| \geq \varepsilon_0$ , 则  $\{a_n\}$  不以  $A$  为极限.

**命题 2.1.1.** 如果数列  $\{a_n\}$  有极限, 则其极限是惟一的.

**证明.** 如果数列  $\{a_n\}$  既以  $A$  为极限, 又以  $B$  为极限, 则任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N_1, N_2$ , 使得当  $n > N_1$  时

$$|a_n - A| < \varepsilon,$$

当  $n > N_2$  时

$$|a_n - B| < \varepsilon.$$

因此, 当  $n > \max\{N_1, N_2\}$  时, 有

$$2\varepsilon > |a_n - A| + |a_n - B| \geq |A - B|.$$

如果  $A \neq B$ , 则对于  $\varepsilon = |A - B|/2$ , 上式不可能成立, 因此只能  $A = B$ . □

如果数列没有极限, 则称它是发散的. 讨论数列的收敛与发散的问题简称为数列的敛散性问题. 从定义不难看出, 改变数列的有限项的值不改变其敛散性, 如果收敛的话也不改变极限的值.

**例 2.1.1.** 对于常数数列  $\{a_n\}$ , 其中  $a_n = a$ ,  $a$  为常数, 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

**证明.** 任给  $\varepsilon > 0$ , 有

$$|a_n - a| = 0 < \varepsilon, \quad \forall n \geq 1.$$

按数列极限的定义,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . □

**例 2.1.2.** 研究数列  $\{(-1)^n\}$  的敛散性.

**解.** 这个数列是发散的. 这是因为, 对任意的  $x_0 \in \mathbb{R}$ , 数 1 和  $-1$  不能同时落在区间  $(x_0 - 1, x_0 + 1)$  中, 因此总有无穷多项  $(-1)^n$  在此区间之外. □

**例 2.1.3.** 设  $|q| < 1$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ .

**证明.**  $q = 0$  时结论显然成立. 设  $0 < |q| < 1$ , 任给  $\varepsilon > 0$ , 取正整数  $N > \log_{|q|} \varepsilon$ , 则当  $n > N$  时,

$$|q^n - 0| = |q|^n < |q|^N < \varepsilon,$$

因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ .

上面的这个证明用到了对数函数的性质. 下面我们还可以用更初等的不等式估计的办法另给一个证明如下: 当  $0 < |q| < 1$  时,  $\frac{1}{|q|} > 1$ . 记  $\alpha = \frac{1}{|q|} - 1 > 0$ . 任给  $\varepsilon > 0$ , 取正整数  $N > \frac{1}{\alpha\varepsilon}$ , 当  $n > N$  时,

$$|q^n - 0| = |q|^n = \frac{1}{(1 + \alpha)^n} < \frac{1}{n\alpha} < \varepsilon,$$

其中, 我们用到不等式

$$(1 + \alpha)^n = 1 + n\alpha + \frac{1}{2}n(n-1)\alpha^2 + \cdots + \alpha^n > n\alpha.$$

这说明  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ . □

我们在下面会列举更多用不等式估计求极限的例子.

**例 2.1.4.** 设  $\alpha > 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$ .

**证明.** 任给  $\varepsilon > 0$ , 取  $N > \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}$ , 当  $n > N$  时

$$\left| \frac{1}{n^\alpha} - 0 \right| = \frac{1}{n^\alpha} < \frac{1}{N^\alpha} < \varepsilon,$$

由定义,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$ . □

**例 2.1.5.** 设  $q > 0, q \neq 1$ . 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log_q n} = 0$ .

**证明.** 不妨设  $q > 1$ . 任给  $\varepsilon > 0$ , 取  $N > q^{\frac{1}{\varepsilon}}$ , 则当  $n > N$  时

$$\left| \frac{1}{\log_q n} - 0 \right| = \frac{1}{\log_q n} < \frac{1}{\log_q N} < \varepsilon,$$

因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log_q n} = 0$ . □

**例 2.1.6.** 设  $C$  为常数, 如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} Ca_n = 0$ .

**证明.** 任给  $\varepsilon > 0$ , 记  $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{|C| + 1}$ . 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 故存在  $N$ , 当  $n > N$  时

$$|a_n| < \varepsilon_0,$$

从而当  $n > N$  时, 有

$$|Ca_n| = |C||a_n| \leq |C|\varepsilon_0 < \varepsilon,$$

因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} Ca_n = 0$ . □

下面的结果在计算极限时十分有用.

**定理 2.1.2 (夹逼原理).** 设  $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$  均为数列, 且

$$a_n \leq b_n \leq c_n, \quad \forall n \geq N_0,$$

其中  $N_0$  为一正整数. 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n,$$

则  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$ .

**证明.** 任给  $\varepsilon > 0$ , 因为  $\{a_n\}$  和  $\{c_n\}$  均收敛到  $A$ , 故存在  $N_1, N_2$ , 当  $n > N_1$  时

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon,$$

当  $n > N_2$  时

$$A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon.$$

取  $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$ , 则当  $n > N$  时, 由于  $a_n \leq b_n \leq c_n$ , 我们就有

$$A - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < A + \varepsilon,$$

这说明  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$ . □

**注.** 如果  $|a_n| \leq b_n$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$  时  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . 这只要注意到夹逼不等式  $-b_n \leq a_n \leq b_n$  即可.

**例 2.1.7.** 考虑无限循环小数  $A = 0.99999\cdots$ , 问:  $A$  是否小于 1?

**解.** 要比较大小, 必须先说清楚  $A$  是一个什么样的实数. 作为小数,  $A$  有无限位非零. 一个合理的看法就是,  $A$  应被视为一系列有限小数  $\{a_n\}$  的极限, 其中  $a_n = 0.99\cdots 9$  ( $n$  个 9). 由于

$$|a_n - 1| = 10^{-n},$$

根据夹逼原理,  $\{a_n\}$  收敛到 1. 因为极限具有惟一性, 这说明  $A = 1$ . □

**注.** 直观上看, 似乎  $A$  总应该比 1 小才对. 然而, 这种直观上得来的经验只对有限小数有效, 对于无限的情形往往要用极限来处理才行.

**例 2.1.8.** 设  $0 < \alpha < 1$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} [(n+1)^\alpha - n^\alpha] = 0$ .

**证明.** 当  $n \geq 1$  时, 有

$$\begin{aligned} 0 < (n+1)^\alpha - n^\alpha &= n^\alpha \left[ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - 1 \right] \\ &\leq n^\alpha \left[ \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 \right] = \frac{1}{n^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

根据前面的例子和夹逼原理即知  $\lim_{n \rightarrow \infty} [(n+1)^\alpha - n^\alpha] = 0$ . □

**例 2.1.9.** 设  $\alpha > 0$ ,  $a > 1$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$ .

**证明.** 记  $a^{\frac{1}{\alpha}} = 1 + \beta$ ,  $\beta > 0$ . 由于  $n > 1$  时, 有

$$(1 + \beta)^n = 1 + n\beta + \frac{1}{2}n(n-1)\beta^2 + \cdots + \beta^n > \frac{1}{2}n(n-1)\beta^2,$$

故

$$0 < \frac{n^\alpha}{a^n} = \left[ \frac{n}{(1 + \beta)^n} \right]^\alpha < \left[ \frac{2}{(n-1)\beta^2} \right]^\alpha,$$

由夹逼原理和前面的例子即知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$ . □

**例 2.1.10.** 设  $a > 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ .

**证明.** 取正整数  $N_0 > |a|$ , 则当  $n > N_0$  时, 有

$$\left| \frac{a^n}{n!} \right| = \frac{|a|^{N_0}}{N_0!} \frac{|a|}{N_0+1} \cdots \frac{|a|}{n} \leq \frac{|a|^{N_0}}{N_0!} \frac{|a|}{n},$$

由夹逼原理即知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ . □

**例 2.1.11.** 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$ .

**证明.** 注意到当  $1 \leq k \leq n$  时  $(k-1)(n-k) \geq 0$ , 从而  $k(n-k+1) \geq n$ , 我们就有

$$(n!)^2 = (1 \cdot n)(2(n-1)) \cdots (k(n-k+1)) \cdots (n \cdot 1) \geq n^n, \quad \forall n \geq 1.$$

因此

$$0 < \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \forall n \geq 1.$$

由夹逼原理即知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$ . □

**例 2.1.12.** 设  $a > 0$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ .

**证明.** 当  $a \geq 1$  时, 记  $\sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n$ ,  $\alpha_n \geq 0$ . 则有

$$a = (1 + \alpha_n)^n = 1 + n\alpha_n + \cdots + \alpha_n^n > n\alpha_n,$$

因此

$$1 \leq \sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n < 1 + \frac{a}{n},$$

由夹逼原理即知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ .

当  $0 < a < 1$  时, 根据上面的估计, 有

$$1 < \sqrt[n]{\frac{1}{a}} < 1 + \frac{1}{na},$$

即

$$1 - \frac{1}{1 + na} < \sqrt[n]{a} < 1,$$

由夹逼原理即知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ . □

**例 2.1.13.** 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .

**证明.** 记  $\sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n$ , 当  $n > 1$  时,

$$n = (1 + \alpha_n)^n = 1 + n\alpha_n + \frac{1}{2}n(n-1)\alpha_n^2 + \cdots + \alpha_n^n > \frac{1}{2}n(n-1)\alpha_n^2,$$

从而有估计

$$0 < \alpha_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

因此, 当  $n > 1$  时, 有

$$1 < \sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n < 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}},$$

由夹逼原理即知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ . □

**例 2.1.14.** 设  $a, b > 0$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max\{a, b\}$ .

**证明.** 不妨设  $a \geq b$ , 则

$$a = \sqrt[n]{a^n} \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq \sqrt[n]{2a^n} = a\sqrt[n]{2},$$

根据前面的例子以及夹逼原理即知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = a = \max\{a, b\}$ . □

**例 2.1.15.** (\*) 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = A$ .

**证明.** 任给  $\varepsilon > 0$ , 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ , 故存在  $N_0$ , 使得当  $n > N_0$  时, 有

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

令

$$N > \max \{N_0, 2\varepsilon^{-1}|a_1 + \cdots + a_{N_0} - N_0 A|\},$$

则当  $n > N$  时, 有

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - A \right| &= \left| \frac{a_1 + \cdots + a_{N_0} - N_0 A}{n} + \frac{(a_{N_0+1} - A) + \cdots + (a_n - A)}{n} \right| \\ &\leq \frac{|a_1 + \cdots + a_{N_0} - N_0 A|}{n} + \frac{|a_{N_0+1} - A| + \cdots + |a_n - A|}{n} \\ &\leq \frac{|a_1 + \cdots + a_{N_0} - N_0 A|}{N} + \frac{n - N_0}{n} \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

这说明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = A$ . □

**注.** 这个例子说明, 如果一个数列收敛到  $A$ , 则其前  $n$  项的平均值也收敛到  $A$ . 反之则不然, 例如, 考虑数列  $\{a_n = (-1)^n\}$ , 容易看出, 这个数列前  $n$  项的平均值收敛到 0, 但  $\{a_n\}$  本身并不收敛.

**例 2.1.16. (\*)** 任何实数都是某个有理数列的极限.

**证明.** 设  $A$  为实数. 如果  $A$  为有理数, 则令  $a_n = A$  ( $n \geq 1$ ) 即可. 如果  $A$  为无理数, 令

$$a_n = \frac{[nA]}{n}, \quad \forall n \geq 1.$$

其中  $[x]$  表示不超过  $x$  的最大整数, 因此  $a_n$  都是有理数. 因为  $A$  不是有理数, 故

$$nA - 1 < [nA] < nA, \quad \forall n \geq 1.$$

即

$$A - \frac{1}{n} < a_n = \frac{[nA]}{n} < A, \quad \forall n \geq 1.$$

由夹逼原理知  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ . □

### §2.1.2 数列极限的基本性质

为了更好地判断数列极限的存在性和计算数列极限, 我们来研究数列极限的基本性质.

**命题 2.1.3 (有界性).** 设数列  $\{a_n\}$  收敛, 则  $\{a_n\}$  有界.



**证明.** 设  $\{a_n\}$  收敛到  $A$ . 取  $\varepsilon = 1$ , 则由极限定义, 存在  $N$ , 当  $n > N$  时

$$|a_n - A| \leq 1,$$

即

$$|a_n| \leq |A| + 1, \quad \forall n > N.$$

令

$$M = \max \{|a_i| \ (1 \leq i \leq N), |A| + 1\},$$

则  $|a_n| \leq M, \forall n \geq 1$ . □

由此命题立知, 无界数列必定发散. 对于无界的数列, 我们有时也可以考察其变化趋势. 为此, 设  $\{a_n\}$  为数列, 如果任给  $A > 0$ , 均存在  $N$ , 使得当  $n > N$  时,  $a_n > A$ , 则称  $\{a_n\}$  发散到  $+\infty$ , 或称  $\{a_n\}$  的极限为  $+\infty$ , 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty, \quad \text{或} \quad a_n \rightarrow +\infty \ (n \rightarrow \infty).$$

类似地, 如果任给  $A < 0$ , 均存在  $N$ , 使得当  $n > N$  时,  $a_n < A$ , 则称  $\{a_n\}$  发散到  $-\infty$ , 或称  $\{a_n\}$  的极限为  $-\infty$ , 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty, \quad \text{或} \quad a_n \rightarrow -\infty \ (n \rightarrow \infty).$$

如果  $\{a_n\}$  发散到  $+\infty$ , 则称  $\{a_n\}$  发散到  $\infty$ , 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \quad \text{或} \quad a_n \rightarrow \infty \ (n \rightarrow \infty).$$

**例 2.1.17.** 设  $|q| > 1$ , 研究数列  $\{q^n\}$  的敛散性.

**解.** 当  $q > 1$  时, 令  $\alpha = q - 1 > 0$ . 任给  $A > 0$ , 取  $N > \frac{A}{\alpha}$ , 当  $n > N$  时, 有

$$q^n = (1 + \alpha)^n = 1 + n\alpha + \cdots + \alpha^n > n\alpha > N\alpha > A,$$

因此  $q^n \rightarrow +\infty \ (n \rightarrow \infty)$ .

当  $q < -1$  时, 同理可证  $|q|^n \rightarrow +\infty$ , 因此  $q^n \rightarrow \infty \ (n \rightarrow \infty)$ . □

**例 2.1.18.** 设  $q > 1$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_q n = +\infty$ .

**证明.** 任给  $A > 0$ , 取  $N > q^A$ , 则当  $n > N$  时, 有

$$\log_q n > \log_q N > A,$$

因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_q n = +\infty$ . □

象有限极限的夹逼原理一样, 无限极限也有夹逼原理, 我们留给读者自己完成它的叙述和证明. 我们仍然回到有限极限的情形.

**命题 2.1.4** (绝对值性质). 设数列  $\{a_n\}$  收敛到  $A$ , 则  $\{|a_n|\}$  收敛到  $|A|$ .

**证明.** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ , 则任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N$ , 当  $n > N$  时

$$|a_n - A| < \varepsilon,$$

从而

$$||a_n| - |A|| \leq |a_n - A| < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

即  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |A|$ . □

**推论 2.1.5.** 数列  $\{a_n\}$  收敛到 0 当且仅当  $|a_n|$  收敛到 0; 数列  $\{a_n\}$  收敛到  $A$  当且仅当  $|a_n - A|$  收敛到 0.

**证明.** 利用极限的绝对值性质和极限的定义即可. □

**命题 2.1.6** (保序性质). 设数列  $\{a_n\}$  收敛到  $A$ ,  $\{b_n\}$  收敛到  $B$ , 则有

- (1) 如果存在  $N_0$ , 当  $n > N_0$  时  $a_n \geq b_n$ , 则  $A \geq B$ ;
- (2) 反之, 如果  $A > B$ , 则存在  $N$ , 使得当  $n > N$  时  $a_n > b_n$ .

**证明.** (1) 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N_1, N_2$ , 使得

$$|a_n - A| < \varepsilon, \quad \forall n > N_1; \quad |b_n - B| < \varepsilon, \quad \forall n > N_2.$$

令  $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$ , 则  $n > N$  时, 有

$$A - B = (A - a_n) + (a_n - b_n) + (b_n - B) \geq (A - a_n) + (b_n - B) \geq -2\varepsilon,$$

因为  $\varepsilon$  是任意取的, 上式表明  $A - B \geq 0$ , 即  $A \geq B$ .

(2) 如果  $A > B$ , 取  $\varepsilon = \frac{A-B}{2} > 0$ , 则存在  $N_1, N_2$ , 使得

$$|a_n - A| < \varepsilon, \quad \forall n > N_1; \quad |b_n - B| < \varepsilon, \quad \forall n > N_2.$$

令  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , 则  $n > N$  时, 有

$$a_n - b_n = (a_n - A) + (A - B) + (B - b_n) > -\varepsilon + (A - B) - \varepsilon = 0,$$

即  $a_n > b_n$ ,  $\forall n > N$ . □

**推论 2.1.7.** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ , 如果  $A \neq 0$ , 则存在  $N$ , 使得当  $n > N$  时, 有

$$\frac{1}{2}|A| < |a_n| < \frac{3}{2}|A|.$$

**证明.** 由极限的绝对值性质, 有

$$\frac{1}{2}|A| < \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |A| < \frac{3}{2}|A|,$$

再由极限的保序性质即得欲证结论.  $\square$

**例 2.1.19.** 设  $q > 1$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_q n}{n} = 0$ .

**解.** 任给  $\varepsilon > 0$ , 利用前一小节中的例子, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 < q^\varepsilon,$$

由极限的保序性质, 存在  $N$ , 当  $n > N$  时, 有

$$\sqrt[n]{n} < q^\varepsilon,$$

即

$$\frac{\log_q n}{n} < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

这说明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_q n}{n} = 0$ .  $\square$

**命题 2.1.8** (四则运算). 设数列  $\{a_n\}$  收敛到  $A$ ,  $\{b_n\}$  收敛到  $B$ , 则有

- (1)  $\{\alpha a_n + \beta b_n\}$  收敛到  $\alpha A + \beta B$ , 其中  $\alpha, \beta$  为常数;
- (2)  $\{a_n b_n\}$  收敛到  $AB$ ;
- (3) 当  $B \neq 0$  时,  $\{a_n/b_n\}$  收敛到  $A/B$ .

**证明.** (1) 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N_1, N_2$ , 使得

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2|\alpha| + 1}, \quad \forall n > N_1; \quad |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2|\beta| + 1}, \quad \forall n > N_2.$$

令  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , 则  $n > N$  时, 有

$$\begin{aligned} |(\alpha a_n + \beta b_n) - (\alpha A + \beta B)| &\leq |\alpha||a_n - A| + |\beta||b_n - B| \\ &\leq |\alpha| \frac{\varepsilon}{2|\alpha| + 1} + |\beta| \frac{\varepsilon}{2|\beta| + 1} \\ &< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

这说明  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B$ .

(2) 利用极限的有界性质, 存在  $M$ , 使得

$$|b_n| \leq M, \quad \forall n \geq 1.$$

因此有

$$0 \leq |a_n b_n - AB| = |(a_n - A)b_n + A(b_n - B)| \leq M|a_n - A| + |A||b_n - B|,$$

利用 (1) 和夹逼原理即知  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = AB$ .

(3) 根据 (2), 我们只要证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{B}$  即可. 根据极限保序性质的推论, 存在  $N$ , 当  $n > N$  时,  $|b_n| > \frac{|B|}{2}$ . 因此

$$0 \leq \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{B} \right| = \frac{|b_n - B|}{|b_n||B|} \leq \frac{2}{|B|^2} |b_n - B|, \quad \forall n > N.$$

由夹逼原理即知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{B}$ . □

**例 2.1.20.** 求数列极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n}{4n^2 - 3n + 1}$ .

**解.** 由前一小节的例子以及极限的四则运算性质, 有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n}{4n^2 - 3n + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{4 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{1 - 0}{4 - 0 - 0} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

下面我们引入数列的子列的概念, 并研究数列的极限和其子列的极限之间的关系. 设

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

是数列, 如果

$$1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$$

是一列严格递增的正整数, 则称数列

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}, \dots$$

为原数列  $\{a_n\}$  的子列, 记为  $\{a_{n_k}\}$ . 两个特殊的子列  $\{a_{2k}\}$  和  $\{a_{2k-1}\}$  分别称为偶子列与奇子列.

**命题 2.1.9.** (1) 设  $\{a_n\}$  收敛到  $A$ , 则它的任何子列  $\{a_{n_k}\}$  也收敛到  $A$ .

(2) 如果  $\{a_n\}$  的偶子列与奇子列均收敛到  $A$ , 则  $\{a_n\}$  也收敛到  $A$ .

**证明.** 用极限的定义即可, 略. □

**例 2.1.21.** 研究数列  $\{a_n = \frac{1}{2}[1 + (-1)^n]\}$  的敛散性.

**解.** 因为  $a_{2k} = 1$ ,  $a_{2k-1} = 0$ , 故  $\{a_n\}$  的偶子列和奇子列的极限不同, 这说明  $\{a_n\}$  是发散的. □

**例 2.1.22.** (\*) 研究数列  $\{\sin n\}$  的敛散性.

解. 这个数列是发散的. (反证法) 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n = A$ , 则

$$2 \sin 1 \cos n = \sin(n+1) - \sin(n-1) \rightarrow A - A = 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

因为  $\sin 1 \neq 0$ , 上式表明  $\cos n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$ , 从而

$$\sin 2n = 2 \sin n \cos n \rightarrow 2A \cdot 0 = 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

这说明  $A = 0$ , 此时

$$\sin^2 n + \cos^2 n \rightarrow 0 + 0 = 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

这和恒等式  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  相矛盾. □

### 习题 2.1

1. 根据数列极限的定义, 判断下列论断是否正确并说明理由:

- (1) 如果任给  $\varepsilon > 0$ , 均存在实数  $N$ , 当  $n \geq N$  时,  $|a_n - A| \leq \varepsilon$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ ;
- (2) 如果任给  $\varepsilon \in (0, 1)$ , 均存在  $N$ , 当  $n > N$  时,  $|a_n - A| < \varepsilon$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ ;
- (3) 如果任给  $\varepsilon > 0$ , 均存在  $N$ , 当  $n > N$  时,  $|a_n - A| \leq 2\varepsilon$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ ;
- (4) 如果对任意正整数  $m$ , 均存在  $N$ , 当  $n > N$  时,  $|a_n - A| \leq \frac{1}{m}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ ;

2. 按照数列极限的定义证明:

$$\begin{aligned} (1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n}{2n^2 - 1} &= \frac{3}{2}; & (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(n+1)} &= 0; \\ (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 2n}}{n} &= 1; & (4) \lim_{n \rightarrow \infty} \arctan n &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

3. 判断下列数列的敛散性:

$$\begin{aligned} (1) \{ \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \}; & \quad (2)^* \{ \sin(n^2) \}; & (3) \{ \sqrt[n]{n^2 + 1} \}; \\ (4) \{ \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{n^2} \}; & \quad (5)^* \{ \cos n \}; & (6) \{ (-1)^n + \frac{1}{n} \}. \end{aligned}$$

4. 求下列数列的极限

$$\begin{aligned} (1) \{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \}; & \quad (2) \{ \frac{2n-1}{3n-2} \}; & (3) \{ \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \}; \\ (4) \{ \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) \}; & \quad (5) \{ n^2 2^{-n} \}; & (6) \{ \sum_{k=1}^n 2^{-k} \}. \end{aligned}$$

5. 试用极限的语言给出数列  $\{a_n\}$  不发散到  $+\infty$  的定义.

6. 按照数列极限的定义证明:

$$\begin{aligned} (1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n - \sqrt{n}} &= +\infty; & (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 4n + 1}{2n - 1} &= +\infty; \\ (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - (n+1)^3}{n+1} &= -\infty; & (4) \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n (\sqrt{n} - 1) &= 0. \end{aligned}$$

7. 设  $a_n \leq A \leq b_n$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

8. 设  $a, b, c > 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} = \max\{a, b, c\}$ .

9. (\*) 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = A$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = A$ .

10. (\*) 证明:

- (1) 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = A > 1$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ ;
- (2) 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A > 1$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ;
- (3) 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = +\infty$ ;
- (4) 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ ,  $a_n > 0$  ( $n \geq 1$ ), 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = +\infty$ .
- (5) 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ,  $a_n > 0$  ( $n \geq 1$ ), 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = 0$ .

11. (\*) 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ , 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n) = \frac{1}{2}A.$$

12. 求下列数列极限:

- (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log_2(n+1) - \log_2 n)$ ;
- (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \right)$ ;
- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$ ;
- (4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{2^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{3^2} \right) \cdots \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right)$ ;
- (5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (1 + 2 + \cdots + n)$ ;
- (6)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$ .

13. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 0$ , 则存在  $N$ , 当  $n \geq N$  时  $a_n > 0$ .
14. 设  $\{a_n\}$  均为正数且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{A}$ .
15. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [na_n] = A$ , 其中  $[x]$  表示不超过  $x$  的最大整数.
16. (\*) 设  $a_n > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = A$ .
17. 证明, 数列  $\{a_n\}$  收敛当且仅当它的奇子列和偶子列收敛到同一极限.
18. 设  $\{a_n | n = 1, 2, \dots\}$  无上界, 则  $\{a_n\}$  存在子列  $\{a_{n_k}\}$  发散到  $+\infty$ .

## §2.2 单调数列的极限

在前面一节里, 我们讨论了数列极限的很多例子. 然而, 在一般情况下, 数列极限无法确切地计算出来, 并且有时我们也不需要知道极限的准确值, 只需判断极限是否存在以及了解极限的性质即可. 现在我们就给出一种特殊情况下数列极限存在性的判别法, 它依赖于实数的一个基本性质, 即在第一章中我们已经提到过的**确界原理**: 非空的数集如果有上界则必有上确界, 如果有下界则必有下确界.

设  $\{a_n\}$  为实数列, 如果

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots,$$

则称  $\{a_n\}$  是单调递增数列, 当上式中的 “ $\leq$ ” 号换成 “ $<$ ” 号时称  $\{a_n\}$  是严格单调递增的; 如果

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots,$$

则称  $\{a_n\}$  是单调递减数列, 当上式中的 “ $\geq$ ” 号换成 “ $>$ ” 号时称  $\{a_n\}$  是严格单调递减的; 单调递增数列和单调递减数列统称为单调数列.

**定理 2.2.1** (单调数列的极限). 设  $\{a_n\}$  为单调数列.

- (1) 如果  $\{a_n\}$  为单调递增数列, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_k | k \geq 1\}$ ;  
 (2) 如果  $\{a_n\}$  为单调递减数列, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_k | k \geq 1\}$ .

**证明.** (1) 记  $M = \sup\{a_k | k \geq 1\}$ , 先考虑  $M$  有限的情形. 任给  $\varepsilon > 0$ , 由上确界的定义, 存在  $a_N$ , 使得

$$M - \varepsilon < a_N \leq M,$$

因为  $\{a_n\}$  是单调递增数列, 故当  $n > N$  时

$$M - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq M < M + \varepsilon,$$

由数列极限的定义即知  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = M = \sup\{a_k \mid k \geq 1\}$ .

如果  $M = +\infty$ , 则任给  $A > 0$ , 由上确界的定义, 存在  $a_N$ , 使得  $a_N > A$ . 由于  $\{a_n\}$  是单调递增数列, 故当  $n > N$  时有  $a_n \geq a_N > A$ , 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty = \sup\{a_k \mid k \geq 1\}.$$

(2) 可同 (1) 一样类似证明, 也可考虑  $\{-a_n\}$  然后直接利用 (1). □

从定理立即得到下面的推论:

**推论 2.2.2.** 单调有界数列必有 (有限) 极限.

**例 2.2.1.** (\*) 任何收敛数列都有单调的收敛子列.

**证明.** 设  $\{a_n\}$  收敛到  $A$ . 如果  $\{a_n\}$  中有无限项等于  $A$ , 则它们构成了所需单调子列. 否则, 考虑  $\{a_n\}$  中下面两类项, 一类满足条件  $a_n < A$ , 另一类满足条件  $a_n > A$ . 这两类中至少有一类含有无限项, 不妨设有无限项  $\{a_n\}$  满足条件  $a_n < A$ , 他们构成了一个收敛子列. 为了简单起见, 下面我们假设  $a_n < A, \forall n \geq 1$ . 我们要从  $\{a_n\}$  中找一个单调递增的子列出来.

这个子列可以这样构造: 取  $n_1 = 1$ . 由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ , 故存在  $n_2 > n_1 = 1$ , 使得  $a_{n_2} \in (a_1, A)$ . 同理, 存在  $n_3 > n_2$ , 使得  $a_{n_3} \in (a_{n_2}, A)$ . 如此继续, 我们就找到了 (严格) 单调递增的子列  $\{a_{n_k}\}$ . □

**例 2.2.2.** 设  $a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, n \geq 1$ . 研究数列  $\{a_n\}$  的极限.

**解.** 用数学归纳法容易验证  $\sqrt{2} \leq a_n < 2, \forall n \geq 1$ . 因此

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} > \sqrt{2a_n} > a_n,$$

即  $\{a_n\}$  是单调递增有界数列, 从而收敛, 记其极限为  $A$ , 则  $A \geq \sqrt{2} > 0$ . 我们有

$$2 + A = \lim_{n \rightarrow \infty} (2 + a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}^2 = A^2,$$

上式的惟一正解为  $A = 2$ , 这说明  $\{a_n\}$  的极限为 2. □

**例 2.2.3.** 设  $a_1 > 0, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n}), n \geq 1$ . 研究数列  $\{a_n\}$  的极限.

**解.** 由数学归纳法易见  $a_n > 0, \forall n \geq 1$ . 进一步有

$$a_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n} - 2) = \frac{1}{2}(\sqrt{a_n} - \frac{1}{\sqrt{a_n}})^2 \geq 0,$$

因此当  $n \geq 2$  时, 有

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n}) \leq \frac{1}{2}(a_n + a_n) = a_n,$$



即  $\{a_n\}$  从  $n \geq 2$  开始单调递减且有下界, 因此收敛. 其极限记为  $A$ , 则  $A \geq 1$ . 另一方面,

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{1}{a_n} \right) = \frac{1}{2} \left( A + \frac{1}{A} \right),$$

上式的惟一正解为  $A = 1$ , 这说明  $\{a_n\}$  的极限为 1.  $\square$

**例 2.2.4.** 设  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$ ,  $n \geq 1$ . 研究数列  $\{a_n\}$  的极限.

**解.** 利用数学归纳法易见  $\frac{1}{2} \leq a_n \leq 1$ , 并且  $\{a_{2k-1}\}$  单调递减,  $\{a_{2k}\}$  单调递增, 因此它们都是收敛的, 极限分别记为  $A, B$ . 则

$$\begin{aligned} B &= \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{1+a_{2k-1}} = \frac{1}{1+A}, \\ A &= \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{1+a_{2k}} = \frac{1}{1+B}, \end{aligned}$$

从上式解出惟一的正解  $A = B = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ , 因此  $\{a_n\}$  的极限为  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .  $\square$

下面我们讨论本课程中的一个重要极限. 考虑

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n \geq 1.$$

我们来说明  $\{a_n\}$  是严格单调递增的,  $\{b_n\}$  是严格单调递减的. 事实上,

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{n^k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \\ &= a_{n+1}, \end{aligned}$$

这说明  $\{a_n\}$  严格单调递增. 另一方面, 当  $n > 1$  时, 有

$$\begin{aligned} 0 &< a_n < 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \\ &\leq 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)k} \\ &= 2 + \sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 3 - \frac{1}{n} < 3. \end{aligned}$$

因此  $\{a_n\}$  收敛, 其极限记为  $e$ , 称为自然对数的基底. 我们在第五章第七节中将证明这是一个无理数, 计算表明 (关于近似计算, 请参考本书第五章第八节以及第九章第四节)

$$e = 2.7182818284590 \dots$$

另一方面, 由

$$\left(\frac{1 + \frac{1}{n-1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^n > 1 + \frac{n}{n^2 - 1} > 1 + \frac{1}{n}$$

得

$$b_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n,$$

即  $\{b_n\}$  严格单调递减, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e,$$

因此有下面的不等式

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < e < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad \forall n \geq 1. \quad (2.1)$$

**例 2.2.5.** 证明  $\{e_n\}$  收敛到  $e$ , 其中

$$e_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}.$$

**证明.** 从前一段的讨论我们已经知道  $a_n < e_n, \forall n > 1$ . 对于任意固定的  $k > 1$ , 当  $n > k$  时, 有

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\ &> 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right), \end{aligned}$$

在上式中令  $n \rightarrow \infty$ , 得

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}.$$

由于  $k$  可以任意固定, 我们就有

$$a_n < e_n < e, \quad \forall n > 1.$$

根据夹逼原理立知  $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = e$ . □

**例 2.2.6.** 证明:

$$(1) \left(\frac{n+1}{e}\right)^n < n! < e \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}, \quad \forall n \geq 1.$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

证明. 由 (2.1), 对  $k = 1, 2, \dots, n$ , 均有

$$\left(\frac{k+1}{k}\right)^k < e < \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+1},$$

将这  $n$  个不等式相乘, 得

$$\frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!},$$

整理后就是 (1) 中要证的不等式. (2) 可由 (1) 及夹逼原理得到.  $\square$

以  $e$  为基底的对数函数记为  $\ln x$ , 由 (2.1) 可得

$$k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) < 1 < (k+1) \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right),$$

即

$$\frac{1}{k+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k}, \text{ 或 } \frac{1}{k+1} < \ln(1+k) - \ln k < \frac{1}{k}.$$

对  $k = 1, 2, \dots, n$ , 将上述不等式相加, 得

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

如果令

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n,$$

则  $c_n > \ln(n+1) - \ln n > 0$ , 且

$$c_{n+1} - c_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0,$$

这说明  $\{c_n\}$  收敛, 其极限记为  $\gamma$ , 称为 Euler 常数, 计算表明

$$\gamma = 0.5772156649 \dots$$

**例 2.2.7.** 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}\right)$ .

解. 利用  $c_n$  的收敛性, 有

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)\right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [(c_{2n} + \ln(2n)) - (c_n + \ln n)] \\ &= \gamma - \gamma + \ln 2 = \ln 2. \end{aligned}$$

下面, 我们利用单调数列来研究一般的有界数列. 设  $\{a_n\}$  为有界数列, 我们要研究它的收敛性. 我们不知道  $a_n$  是否逐渐趋于某个数, 一个好的想法就是去考虑

$n$  很大时  $\{a_n\}$  中“最大”的项和“最小”的项, 看看它们是否相近. 当然, “最大”和“最小”项不一定存在, 但我们可以用“上确界”和“下确界”来分别代替它们. 为此, 令

$$\underline{a}_n = \inf\{a_k \mid k \geq n\}, \quad \bar{a}_n = \sup\{a_k \mid k \geq n\}.$$

由命题 1.2.4 易见  $\{\underline{a}_n\}$  和  $\{\bar{a}_n\}$  分别是单调递增和单调递减的数列, 且

$$\underline{a}_n \leq a_n \leq \bar{a}_n.$$

单调数列  $\{\underline{a}_n\}$  和  $\{\bar{a}_n\}$  的极限分别称为  $\{a_n\}$  的下极限和上极限, 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{a}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{a}_n.$$

**例 2.2.8.** 计算数列  $\left\{a_n = \frac{(-1)^n}{n}\right\}$  的上极限和下极限.

**解.** 按照下确界的定义, 当  $n$  为奇数时

$$\underline{a}_n = \inf\left\{-\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, -\frac{1}{n+2}, \cdots\right\} = -\frac{1}{n};$$

当  $n$  为偶数时,

$$\underline{a}_n = \inf\left\{\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \cdots\right\} = -\frac{1}{n+1};$$

即

$$\{\underline{a}_n\} = \left\{-1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \cdots\right\},$$

从而  $\{a_n\}$  的下极限为 0. 类似地有

$$\{\bar{a}_n\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \cdots\right\},$$

从而  $\{a_n\}$  的上极限也为 0. □

**例 2.2.9.** 计算数列  $\left\{a_n = [1 + (-1)^n]\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$  的上极限和下极限.

**解.** 按照下确界的定义易见  $\underline{a}_n = 0, \forall n \geq 1$ . 因此  $\{a_n\}$  的下极限为 0. 按照上确界的定义以及数列  $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$  单调性和收敛性不难看出  $\bar{a}_n = 2e, \forall n \geq 1$ . 因此  $\{a_n\}$  的上极限为  $2e$ . □

下面的定理给出了有界数列是否收敛的一个判别方法.

**定理 2.2.3.** 设  $\{a_n\}$  为有界数列, 则下列命题等价:

- (1)  $\{a_n\}$  收敛;
- (2)  $\{a_n\}$  的上极限和下极限相等;
- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{a}_n - \underline{a}_n) = 0$ .

**证明.** (1)  $\implies$  (2): 设  $\{a_n\}$  收敛到  $A$ . 则任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N$ , 当  $n > N$  时, 有

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon.$$

由确界的定义立得

$$A - \varepsilon \leq \underline{a}_n \leq \bar{a}_n \leq A + \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

这说明  $\{\underline{a}_n\}$  和  $\{\bar{a}_n\}$  均收敛到  $A$ .

(2)  $\implies$  (1): 利用  $\underline{a}_n \leq a_n \leq \bar{a}_n$  和夹逼原理即可.

(2) 和 (3) 的等价是显然的. □

一般来说, 上极限和下极限不再满足四则运算的等式, 不过保序性仍然成立.

**命题 2.2.4.** 设  $\{a_n\}, \{b_n\}$  为有界数列.

(1) 如果存在  $N_0$ , 当  $n > N_0$  时  $a_n \geq b_n$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n;$$

(2)  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n.$

**证明.** (1) 当  $n > N_0$  时

$$\underline{b}_n \leq b_k \leq a_k, \quad \forall k \geq n,$$

关于  $k$  取下确界, 得

$$\underline{b}_n \leq \underline{a}_n, \quad \forall n > N_0,$$

由极限的保序性即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

上极限的情形可类似证明.

(2) 利用不等式  $a_n + b_n \leq \bar{a}_n + \bar{b}_n$  以及极限的保序性即可. □

**例 2.2.10.** 设  $a_n > 0, a_n \rightarrow A (n \rightarrow \infty)$ . 记  $b_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A.$$

**证明.** 由已知条件, 任取  $\varepsilon > 0$ , 则存在  $N$ , 当  $n > N$  时,

$$0 < a_n < A + \varepsilon.$$

于是当  $n > N$  时, 有

$$b_n \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_N (A + \varepsilon)^{\frac{n-N}{n}}} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_N (A + \varepsilon)^{-N} (A + \varepsilon)},$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n \leq A + \varepsilon.$$

同理可证

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n \geq A - \varepsilon,$$

因为  $\varepsilon$  是任取的, 从而必有

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n = A = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

这说明  $\{b_n\}$  收敛到  $A$ . □

**例 2.2.11.** 设  $b_n > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = A$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n} = A.$$

**证明.** 令  $a_1 = b_1$ ,  $a_{n+1} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$ ,  $n \geq 1$ . 由题设,  $\{a_n\}$  收敛到  $A$ . 因此由上例, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = A.$$

**例 2.2.12.** (\*) 设数列  $\{a_n\}$  满足以下条件:

$$a_n \geq 0, \quad a_{m+n} \leq a_m + a_n, \quad \forall m, n \geq 1.$$

证明数列  $\{\frac{a_n}{n}\}$  收敛.

**证明.** 由归纳法易见  $0 \leq a_n \leq na_1$ , 因此  $\{\frac{a_n}{n}\}$  为有界数列. 设  $k$  是任一固定的正整数, 当  $n \geq k$  时,  $n$  可以表示为

$$n = mk + l, \quad 0 \leq l \leq k - 1.$$

因此

$$a_n \leq a_{mk} + a_l \leq ma_k + la_1 \leq \frac{n}{k}a_k + (k-1)a_1,$$

即

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{a_k}{k} + \frac{k-1}{n}a_1, \quad \forall n \geq k.$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k}{k} + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{k-1}{n}a_1 = \frac{a_k}{k}.$$

因为  $k$  是任取的, 在上式中令  $k \rightarrow \infty$ , 得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \leq \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{k},$$

这说明  $\{\frac{a_n}{n}\}$  的上下极限一定是相等的, 从而是收敛的.  $\square$

### 习题 2.2

1. 研究下列数列的单调性并求极限:

$$\begin{aligned} (1) \quad & a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{2a_n}; & (2) \quad & a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{a_n}{1+a_n}; \\ (3) \quad & a_1 > 0, \quad a_{n+1} = \frac{6(1+a_n)}{7+a_n}; & (4) \quad & a_1 \in (0, 1), \quad a_{n+1} = a_n(1-a_n). \end{aligned}$$

2. 设  $c > 0$ ,  $a_1 = \sqrt{c}$ ,  $a_{n+1} = \sqrt{c+a_n}$ , 求数列  $\{a_n\}$  的极限.

3. 设  $a_1 \geq 0$ ,  $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ , 研究数列  $\{a_n\}$  的极限.

4. 设  $c, a_1 > 0$ ,  $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{c}{a_n})$ , 研究数列  $\{a_n\}$  的极限.

5. 设  $a_1 \geq 0$ ,  $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$ , 研究数列  $\{a_n\}$  的极限.

6. 设  $a_1 = c > 0$ ,  $a_{n+1} = c + \frac{1}{a_n}$ , 研究数列  $\{a_n\}$  的极限.

7. 研究下列数列的单调性并求极限:

$$\begin{aligned} (1) \quad & a_1 > 0, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{a_n}; & (2) \quad & a_1 > 0, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{5}{8a_n}; \\ (3) \quad & a_1 \in (0, \sqrt{2}), \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}a_n(1 - \frac{1}{2}a_n^2). \end{aligned}$$

8. 用归纳法证明 Bernoulli 不等式  $(1+x)^n \geq 1+nx$  ( $x \geq -1$ ), 对  $x = -\frac{1}{(1+n)^2}$  应用 Bernoulli 不等式说明  $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$  的严格单调性.

9. 求下列极限:

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n})^n; \quad (2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n+1}{n+2})^n; \quad (3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n^2})^n.$$

10. (\*) 求下列极限:

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2n})^n; \quad (2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{n})^n; \quad (3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})^n.$$

11. 证明极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} [1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}] = \ln 2$ .

12. 计算下列数列的上极限和下极限:

$$(1) \quad \{a_n = 1 + (-1)^n\}; \quad (2) \quad \left\{a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n}\right\}.$$

13. 设  $\{a_n\}$  为有界数列, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = -\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = -\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

14. 用上下极限的思想证明, 如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = A.$$

15. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1) = AB.$$

16. (\*) 设  $0 < a < b$ ,  $a_1 = a$ ,  $b_1 = b$ .

(1) 如果  $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ ,  $b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ , 则  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  收敛于同一极限.

(2) 如果  $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ ,  $b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}$ , 则  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  收敛于同一极限.

## §2.3 Cauchy 准则

在前一节我们对于单调数列给出了极限存在性的判别方法. 现在我们对一般的数列给出极限存在与否的一个判别方法, 基本的想法与考虑上下极限时是类似的: 如果  $a_n$  逐渐趋于某个数, 则  $n$  很大时  $a_n$  之间的差别应该很小. 为此我们引入下面的定义.

**定义 2.3.1.** 设  $\{a_n\}$  为数列, 如果任给  $\varepsilon > 0$ , 均存在  $N = N(\varepsilon)$ , 当  $m, n > N$  时, 有

$$|a_m - a_n| < \varepsilon,$$

则称  $\{a_n\}$  为 *Cauchy* 数列或基本列.

**例 2.3.1.** 对于  $n \geq 1$ , 定义

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n},$$

则  $\{a_n\}$  不是 *Cauchy* 列.

**证明.** 对于  $n \geq 1$ , 我们有

$$\begin{aligned} a_{2n} - a_n &= \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &\geq \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

由定义即知  $\{a_n\}$  不是 *Cauchy* 数列. □



**例 2.3.2.** 对于  $n \geq 1$ , 定义

$$a_n = 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt{n}},$$

则  $\{a_n\}$  是 *Cauchy* 列.

**证明.** 首先我们注意到不等式

$$\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} > \frac{1}{2(n+1)\sqrt{n+1}},$$

因此, 当  $m > n$  时,

$$\begin{aligned} a_m - a_n &= \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{m\sqrt{m}} \\ &< 2\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) + 2\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}}\right) + \cdots \\ &= \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{m}} < \frac{2}{\sqrt{n}}, \end{aligned}$$

由此可以看出  $\{a_n\}$  是 *Cauchy* 列. □

**例 2.3.3.** 设  $\{a_n\}$  为数列, 如果存在常数  $\alpha \geq 0$ ,  $0 \leq q < 1$ , 以及  $N_0$ , 使得当  $n > N_0$  时, 有

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \alpha q^n,$$

则  $\{a_n\}$  为 *Cauchy* 数列.

**证明.** 当  $m > n > N_0$  时, 有

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &\leq |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \\ &\leq \alpha q^{m-1} + \alpha q^{m-2} + \cdots + \alpha q^n \\ &= \alpha q^n (q^{m-n-1} + q^{m-n-2} + \cdots + q + 1) \\ &\leq \alpha \frac{q^n}{1-q}. \end{aligned}$$

上式对  $m = n$  当然也成立. 由于  $q^n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ), 故任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N_1$ , 使得

$$\alpha \frac{q^{N_1}}{1-q} < \varepsilon.$$

于是, 当  $m, n > N = \max\{N_0, N_1\}$  时, 不妨设  $m \geq n$ , 有

$$|a_m - a_n| \leq \alpha \frac{q^n}{1-q} \leq \alpha \frac{q^{N_1}}{1-q} < \varepsilon,$$

这说明  $\{a_n\}$  为 *Cauchy* 数列. □

**命题 2.3.1.** *Cauchy 数列必定是有界数列.*

**证明.** 按定义, 取  $\varepsilon = 1$ , 则存在  $N$ , 当  $m, n > N$  时, 有

$$|a_m - a_n| < 1$$

令  $M = \max\{|a_k| + 1 \mid 1 \leq k \leq N+1\}$ , 则当  $n \leq N$  时显然  $|a_n| \leq M$ ; 而当  $n > N$  时, 有

$$|a_n| \leq |a_n - a_{N+1}| + |a_{N+1}| < 1 + |a_{N+1}| \leq M,$$

这说明  $\{a_n\}$  是有界数列. □

下面的定理是本节主要结果, 它反映了实数系的完备性质.

**定理 2.3.2** (Cauchy 准则).  $\{a_n\}$  为 *Cauchy* 数列当且仅当它是收敛的.

**证明.** 充分性: 设  $\{a_n\}$  收敛到  $A$ . 则任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N$ , 当  $n > N$  时, 有

$$|a_n - A| < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

因此, 当  $m, n > N$  时, 有

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - A| + |A - a_n| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon,$$

这说明  $\{a_n\}$  为 Cauchy 数列.

必要性: 设  $\{a_n\}$  为 Cauchy 数列, 由命题 2.3.1,  $\{a_n\}$  是有界数列, 记  $A$  为其上极限. 我们来说明  $\{a_n\}$  收敛到  $A$ .

事实上, 由于  $\{a_n\}$  为 Cauchy 数列, 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N$ , 当  $m, n > N$  时, 有

$$|a_m - a_n| < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

即

$$-\frac{1}{2}\varepsilon < a_m - a_n < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \forall m, n > N.$$

在上式中令  $m \rightarrow \infty$ , 利用上极限的保序性, 得

$$-\frac{1}{2}\varepsilon \leq \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} a_m - a_n \leq \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \forall n > N.$$

即

$$|A - a_n| \leq \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon, \quad \forall n > N,$$

这说明  $\{a_n\}$  收敛到  $A$ . □

注. (1) Cauchy 列未必是单调数列, 例如数列  $\left\{a_n = \frac{(-1)^n}{n}\right\}$  就是这样的例子.

(2) Cauchy 准则的重要性在于, 在不了解数列的单调性或极限的具体形式时往往也能判断极限的存在性. 以后凡是涉及极限的场合都有相应的 Cauchy 准则.

### 习题 2.3

1. 判断下面的数列是否为 Cauchy 列:

$$(1) a_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n};$$

$$(2) a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}};$$

$$(3) a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

2. 设  $\{a_n\}$  满足条件

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+p} - a_n| = 0, \quad \forall p \geq 1,$$

则  $\{a_n\}$  是否必为 Cauchy 数列? (提示: 考虑本节例子.)

3. 定义  $a_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{n!}$ , 用 Cauchy 准则证明  $\{a_n\}$  是收敛的.

4. 设  $|q| < 1$ , 定义  $a_n = \sum_{k=1}^n q^n$ , 用 Cauchy 准则证明  $\{a_n\}$  是收敛的.

5. 定义  $a_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$ , 用 Cauchy 准则证明  $\{a_n\}$  是收敛的.

6. 设  $\{b_n\}$  为单调递增有界数列. 如果数列  $\{a_n\}$  满足条件

$$|a_{n+1} - a_n| \leq b_{n+1} - b_n, \quad \forall n \geq 1,$$

则  $\{a_n\}$  为 Cauchy 数列, 从而是收敛的.

7. 设  $0 \leq q < 1$  为常数, 数列  $\{a_n\}$  满足条件

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q|a_n - a_{n-1}|, \quad \forall n \geq 2,$$

证明  $\{a_n\}$  为 Cauchy 数列. 请用本题结论重新考察前节相关习题.

8. (\*) 设  $\{a_n\}$  为数列. 如果存在常数  $M$ , 使得

$$|a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \leq M, \quad \forall n \geq 1,$$

则称  $\{a_n\}$  为有界变差数列. 证明, 有界变差数列均为 Cauchy 数列.

9. (\*) 设  $a_0 = a, a_1 = b$ , 定义

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}), \quad \forall n \geq 2,$$

证明  $\{a_n\}$  为有界变差数列, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{3}(a + 2b)$ .

## §2.4 Stolz 公式



在初次阅读本章时, 本节内容可以略过, 也可以结合第五章第六节一起阅读.

在这一节我们给出计算极限的一个比较方便的办法, 它可以用来处理满足特定条件的两个数列的商的极限. 先介绍一个引理.

**引理 2.4.1.** 设  $b_k > 0$  ( $1 \leq k \leq n$ ), 且

$$m \leq \frac{a_k}{b_k} \leq M, \quad \forall 1 \leq k \leq n,$$

则有

$$m \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \leq M.$$

**证明.** 由已知条件, 得

$$mb_k \leq a_k \leq Mb_k, \quad \forall 1 \leq k \leq n,$$

将这些不等式从  $k = 1$  到  $n$  加起来, 即得

$$m(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \leq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \leq M(b_1 + b_2 + \cdots + b_n),$$

由此易得欲证不等式. □

**定理 2.4.2** (Stolz 公式之一). 设  $\{x_n\}, \{y_n\}$  为数列, 且  $\{y_n\}$  严格单调地趋于  $+\infty$ . 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = A,$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = A.$$

**证明.** 分情况讨论.

(1)  $A$  为有限实数. 任给  $\varepsilon$ , 由已知条件, 存在  $N$ , 当  $n > N$  时, 有

$$A - \varepsilon < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < A + \varepsilon.$$

利用上面的引理, 当  $n > N$  时, 有

$$A - \varepsilon < \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} = \frac{(x_n - x_{n-1}) + \cdots + (x_{N+1} - x_N)}{(y_n - y_{n-1}) + \cdots + (y_{N+1} - y_N)} < A + \varepsilon,$$

从而有

$$\begin{aligned} \left| \frac{x_n}{y_n} - A \right| &= \left| \left( \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - A \right) \frac{y_n - y_N}{y_n} + \frac{x_N - Ay_N}{y_n} \right| \\ &\leq \varepsilon + \frac{|x_N - Ay_N|}{|y_n|}. \end{aligned}$$

在上式中令  $n \rightarrow \infty$ , 利用  $y_n \rightarrow +\infty$ , 得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_n}{y_n} - A \right| \leq \varepsilon,$$

因为  $\varepsilon$  是任意取的, 故有

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_n}{y_n} - A \right| \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_n}{y_n} - A \right| = 0,$$

这说明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = A$ .

(2)  $A = +\infty$ . 此时, 存在  $N$ , 当  $n > N$  时

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > 1,$$

即

$$x_n - x_{n-1} > (y_n - y_{n-1}) > 0, \quad \forall n > N.$$

特别地,  $n > N$  时  $\{x_n\}$  也是严格单调递增的, 且

$$\begin{aligned} x_n - x_N &= (x_n - x_{n-1}) + \cdots + (x_{N+1} - x_N) \\ &> (y_n - y_{n-1}) + \cdots + (y_{N+1} - y_N) = y_n - y_N, \end{aligned}$$

由  $y_n \rightarrow +\infty$  得  $x_n \rightarrow +\infty$ . 将 (1) 中  $x_n$  和  $y_n$  的位置互换, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \right)^{-1} = 0,$$

于是有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{y_n}{x_n} \right)^{-1} = +\infty.$$

(3)  $A = -\infty$ . 这时只要将  $x_n$  换成  $-x_n$ , 然后利用 (2) 即可.  $\square$

**定理 2.4.3** (Stolz 公式之二). 设数列  $\{y_n\}$  严格单调递减趋于 0, 数列  $\{x_n\}$  也收敛到 0. 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = A,$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = A.$$

**证明.** 和前面定理的证明一样, 分情况讨论.

(1)  $A$  为有限实数. 我们把极限的条件改写为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} = A.$$

任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N$ , 当  $n > N$  时,

$$A - \varepsilon < \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} < A + \varepsilon,$$

和上面定理中 (1) 的证明一样, 当  $m > n > N$  时, 有

$$(A - \varepsilon)(y_n - y_m) \leq (x_n - x_m) \leq (A + \varepsilon)(y_n - y_m),$$

令  $m \rightarrow \infty$ , 得

$$(A - \varepsilon)y_n \leq x_n \leq (A + \varepsilon)y_n, \quad \forall n > N,$$

即

$$(A - \varepsilon) \leq \frac{x_n}{y_n} \leq (A + \varepsilon), \quad \forall n > N,$$

这说明  $x_n/y_n \rightarrow A$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

(2)  $A = +\infty$ . 任给  $M > 0$ , 存在  $N$ , 当  $n > N$  时, 有

$$\frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} > M.$$

类似上面的证明, 当  $m > n > N$  时, 有

$$x_n - x_m > M(y_n - y_m),$$

令  $m \rightarrow \infty$ , 得

$$x_n \geq My_n, \quad \forall n > N,$$

即

$$\frac{x_n}{y_n} \geq M, \quad \forall n > N,$$

这说明  $x_n/y_n \rightarrow +\infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

(3)  $A = -\infty$ . 将 (2) 中  $x_n$  换成  $-x_n$  即可. □

**例 2.4.1.** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \frac{A}{2}.$$

**证明.** 因为  $n^2$  关于  $n$  单调递增趋于  $+\infty$ , 故由 Stolz 公式, 得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{n^2 - (n-1)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} a_n = \frac{A}{2}. \end{aligned}$$

这个例子当然也可以直接用极限的定义证明. □

例 2.4.2. 设  $k$  为正整数, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{2}.$$

证明. 用 Stolz 公式, 有

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(k+1)(1^k + 2^k + \cdots + n^k) - n^{k+1}}{(k+1)n^k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(k+1)n^k - [n^{k+1} - (n-1)^{k+1}]}{(k+1)[n^k - (n-1)^k]} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}k(k+1)n^{k-1} + \cdots}{(k+1)kn^{k-1} + \cdots} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

这个结果对于  $k > -1$  的实数都是成立的, 这涉及下一章函数极限的内容. □

例 2.4.3. 设  $x_1 \in (0, 1)$ ,  $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$ ,  $\forall n \geq 1$ . 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = 1$ .

证明. 由归纳法易见  $0 < x_n < 1$ ,  $\forall n \geq 1$ . 从而

$$x_{n+1} = x_n(1 - x_n) < x_n,$$

即  $\{x_n\}$  是单调递减有界数列. 设  $x_n \rightarrow a$  ( $n \rightarrow \infty$ ), 在上式中令  $n \rightarrow \infty$ , 得

$$a = a \cdot (1 - a),$$

解出  $a = 0$ , 即  $x_n \rightarrow 0$ . 从而有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - x_n} = 1,$$

由 Stolz 公式, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - (n-1)}{\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}}} = 1.$$

请读者思考: 如果不用 Stolz 公式, 此极限怎样证明? □

#### 习题 2.4

1. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ ,  $k$  为非负整数, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{k+1}} (a_1 + 2^k a_2 + \cdots + n^k a_n) = \frac{A}{k+1}.$$

2. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - A) = B$ ,  $k$  为正整数, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{a_1 + 2^k a_2 + \cdots + n^k a_n}{n^{k+1}} - \frac{A}{k+1} \right) = \frac{B}{k} + \frac{A}{2}.$$

3. 设  $a_1 \in (0, 1)$ ,  $a_{n+1} = a_n(1 - a_n)$ ,  $k$  为正整数. 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} (a_1 + 2^k a_2 + \cdots + n^k a_n) = \frac{1}{k}.$$

4. 设  $k \geq 2$  为正整数, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{2n} \right) = \frac{k}{12}.$$

5. 证明下列等式:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{3}{2}} (1 + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}) = \frac{2}{3}; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=1}^n \sqrt{k} - \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{1}{2}.$$

6. 设  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2a_n}$ , 证明

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 1, \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 - n}{\ln n} = \frac{1}{4}.$$

7. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = A$ , 证明 ( $p$  为正整数):

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = A, \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^n k^{p-1} a_k = \frac{A}{p+1}.$$

8. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+2} - a_n) = A$ , 证明

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \frac{A}{2}, \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{n} = 0.$$

9. 利用二项式定理证明下面的估计:

$$1 + \frac{1}{n+2} + \frac{n-1}{2n(n+2)^2} \leq \left( 1 + \frac{1}{n(n+2)} \right)^n \leq 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{n-1}{2n(n+2)^2} + \frac{n-1}{2n(n+2)^3}.$$

10. 利用上一题和 Stolz 公式证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ e - \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] = \frac{1}{2}e.$$

11. (1) 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^n = 1$ ;

$$(2) \text{ 证明 } \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left[ \frac{1}{n} - \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right] = \frac{1}{2};$$

$$(3) \text{ 利用 Stolz 公式证明 } \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n - \gamma \right) = \frac{1}{2}.$$



## §2.5 实数系的基本性质

从前面几节的内容我们看到, 数列极限的存在性依赖于实数系的基本性质. 例如, 我们用确界原理导出了有界单调数列的极限存在性, 进而导出了 Cauchy 准则. 为了进一步研究的需要, 我们再介绍实数的几条基本性质, 并说明这些基本性质之间其实是互相等价的.

下面的结果通常称为“闭区间套原理”.

**定理 2.5.1** (Cantor). 设  $\{[a_n, b_n]\}$  为递减闭区间套序列, 即

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots.$$

如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ , 则存在惟一的点  $c$ , 使得  $c \in [a_n, b_n], \forall n \geq 1$ .

**证明.** 由已知条件我们知道, 数列  $\{a_n\}$  单调递增且有上界  $b_1$ ,  $\{b_n\}$  单调递减且有下界  $a_1$ . 这说明  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  都收敛, 设极限分别为  $a, b$ . 由极限的保序性, 有

$$a_n \leq a \leq b \leq b_n, \quad \forall n \geq 1.$$

即

$$0 \leq b - a \leq b_n - a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

这说明  $a = b$ . 于是  $c = a = b \in [a_n, b_n], \forall n \geq 1$ . 如果另有  $c' \in [a_n, b_n], \forall n \geq 1$ , 则由夹逼原理即知  $c' = a = b = c$ .  $\square$

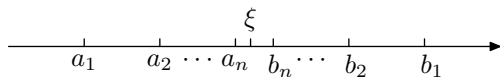


图 2.1 闭区间套

**注.** 把定理中的闭区间套换成开区间套时结论一般不再成立, 如

$$(0, 1) \supset (0, \frac{1}{2}) \supset \cdots \supset (0, \frac{1}{n}) \supset \cdots$$

是开区间套, 但这些开区间之交为空集.

**例 2.5.1.** 实数集  $\mathbb{R}$  是不可数集.

**证明.** 我们来证明  $[0, 1]$  是不可数的. (反证法) 显然,  $[0, 1]$  是无限集, 如果它不是不可数的, 则一定是无限可数集, 因此可以记为

$$[0, 1] = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}.$$

将  $[0, 1]$  三等分, 必有一个等分区间不含  $x_1$ , 记该区间为  $[a_1, b_1]$ . 再对  $[a_1, b_1]$  三等分, 必有一个等分区间不含  $x_2$ , 记该区间为  $[a_2, b_2]$ . 如此继续等分  $[a_2, b_2]$  等, 我们就得到闭区间套

$$[0, 1] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots,$$

使得  $b_n - a_n = \frac{b-a}{3^n} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ), 且  $x_n \notin [a_n, b_n]$ . 根据闭区间套原理, 存在  $\xi \in [a_n, b_n]$ ,  $\forall n \geq 1$ . 显然  $\xi \in [0, 1]$ , 但  $\xi \neq x_n, \forall n \geq 1$ . 这就导出了矛盾.  $\square$

这个例子说明无理数集是不可数的, 因此无理数远比有理数多, 因为下面的例子表明有理数集是可数的.

**例 2.5.2.** 有理数集  $\mathbb{Q}$  是可数集.

**证明.** 我们只要证明正有理数可数就可以了. 正有理数均可表示为形如  $p/q$  的分数, 其中  $p, q$  为正整数, 且  $p, q$  无大于 1 的公共因子. 按照  $p+q$  的大小, 依据通常的“字典法则”可将正有理数排成一列:

$$1 = 1/1, 1/2, 2/1, 1/3, 3/1, 1/4, 2/3, 3/2, 4/1, \cdots,$$

其中, 当  $p+q < r+s$ , 或  $p+q = r+s$  但  $p < r$  时将  $p/q$  排在  $r/s$  前面. 这样, 正有理数不重不漏地出现在这一列中, 这说明正有理数集是可数的.  $\square$

**定理 2.5.2** (Bolzano).  $\mathbb{R}$  中有界数列必有收敛子列.

**证明.** 设  $\{x_n\}$  为有界数列, 不妨设  $\{x_1, x_2, \cdots\} \subset [a, b]$ . 将  $[a, b]$  二等分, 必有一个小区间包含了数列  $\{x_n\}$  中的无限项, 记该小区间为  $[a_1, b_1]$ , 并取  $x_{n_1} \in [a_1, b_1]$ . 再将  $[a_1, b_1]$  二等分, 仍有一个小区间含有  $\{x_n\}$  中的无限项, 记该小区间为  $[a_2, b_2]$ , 取  $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$ , 且  $n_2 > n_1$ . 如此继续, 我们得到区间套

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_k, b_k] \supset \cdots, \quad b_k - a_k = \frac{1}{2^k}(b-a) \rightarrow 0,$$

以及  $\{x_n\}$  的子列  $\{x_{n_k}\}$ , 使得  $x_{n_k} \in [a_k, b_k], k = 1, 2, \cdots$ .

由闭区间套原理, 存在  $c \in [a_k, b_k], k = 1, 2, \cdots$ . 由  $|x_{n_k} - c| \leq (b_k - a_k)$  容易看出子列  $\{x_{n_k}\}$  以  $c$  为极限.  $\square$

Bolzano 定理涉及到闭区间的一个重要性质, 即紧致性. 为了描述它, 我们先引入几个预备性的概念.

设  $x_0 \in \mathbb{R}$ . 包含点  $x_0$  的一个开区间称为  $x_0$  的一个开邻域. 如果  $\delta > 0$ , 则  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  就是  $x_0$  的一个开邻域. 设  $A$  为数集, 如果对任意的点  $x_0 \in A$ , 均存在  $\delta > 0$ , 使得  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset A$ , 则称  $A$  为  $\mathbb{R}$  中的开集.  $\mathbb{R}$  本身当然是开集, 我们约定空集也是开集. 如果一个数集的补集是开集, 则称该数集为闭集. 按照我们的约定, 空集和  $\mathbb{R}$  既是开集, 也是闭集.

**例 2.5.3.** 在区间之中,  $(a, b)$ ,  $(a, +\infty)$  和  $(-\infty, b)$  为开集, 而  $[a, b]$ ,  $[a, +\infty)$ ,  $(-\infty, b]$  为闭集, 有限点集和整数集  $\mathbb{Z}$  也是闭集.  $[0, 1)$  既不是开集也不是闭集.

设  $\Gamma$  为一个集合, 如果对于每一个元素  $\alpha \in \Gamma$ , 都对应一个集合  $A_\alpha$ , 则称  $\{A_\alpha\}$  为以  $\Gamma$  为指标集的集合族, 或称  $\{A_\alpha\}$  是一族集合.

设  $A$  为  $\mathbb{R}$  的子集,  $A_\alpha$  ( $\alpha \in \Gamma$ ) 是数集族. 如果任给  $a \in A$ , 均存在某个  $\alpha$ , 使得  $a \in A_\alpha$ , 则称  $\{A_\alpha\}$  是  $A$  的一个覆盖; 当覆盖中的每一个  $A_\alpha$  均为开集时, 称  $\{A_\alpha\}$  是  $A$  的一个开覆盖. 如果  $\{A_\alpha\}$  是  $A$  的一个覆盖,  $\Gamma' \subset \Gamma$ , 且  $\{A_{\alpha'}\}$  ( $\alpha' \in \Gamma'$ ) 仍为  $A$  的覆盖, 则称  $\{A_{\alpha'}\}$  是  $\{A_\alpha\}$  的一个子覆盖. 如果  $A$  的任何开覆盖均存在有限子覆盖 (即指标集  $\Gamma'$  为有限集的子覆盖), 则称  $A$  是紧致集合.

**例 2.5.4.** 对于任意正整数  $n \geq 1$ , 定义  $A_n = (0, 2 - 1/n)$ . 则  $\{A_n | n = 1, 2, \dots\}$  为区间  $(0, 2)$  的开覆盖. 这个开覆盖不存在有限子覆盖, 因此开区间  $(0, 2)$  不是紧致集合. 同理可证半开半闭区间也不是紧致集合.

下面的结果表明闭区间是紧致集合.

**定理 2.5.3** (Heine-Borel). 闭区间  $[a, b]$  的任何开覆盖都有有限子覆盖.

**证明.** (反证法) 设  $\{A_\alpha\}$  为  $[a, b]$  的一个开覆盖. 如果  $[a, b]$  不能被有限个  $A_\alpha$  所覆盖, 则二等分  $[a, b]$  后必有一个小区间也不能被有限个  $A_\alpha$  所覆盖, 记该区间为  $[a_1, b_1]$ . 再将  $[a_1, b_1]$  二等分, 又必有一个小区间不能被有限个  $A_\alpha$  所覆盖, 记该区间为  $[a_2, b_2]$ . 如此继续下去, 得闭区间套

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots,$$

使得  $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ), 且每个  $[a_n, b_n]$  均不能被有限个  $A_\alpha$  覆盖. 根据闭区间套原理, 存在  $\xi \in [a_n, b_n]$ ,  $\forall n \geq 1$ . 因为  $\{A_\alpha\}$  为  $[a, b]$  的开覆盖, 故存在  $A_{\alpha_0}$ , 使得  $\xi \in A_{\alpha_0}$ . 因为  $A_{\alpha_0}$  为开集, 故存在  $\delta > 0$ , 使得

$$(\xi - \delta, \xi + \delta) \subset A_{\alpha_0}.$$

易见  $a_n, b_n \rightarrow \xi$  ( $n \rightarrow \infty$ ), 故存在  $N$ , 当  $n > N$  时

$$a_n, b_n \in (\xi - \delta, \xi + \delta).$$

这说明  $[a_n, b_n] \subset (\xi - \delta, \xi + \delta) \subset A_{\alpha_0}$  ( $n > N$ ), 这与  $[a_n, b_n]$  不能被有限个  $A_\alpha$  覆盖相矛盾.  $\square$

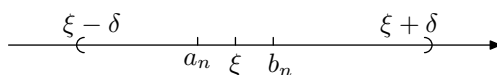


图 2.2 闭区间的紧性

**推论 2.5.4.**  $\mathbb{R}$  中的有界闭集都是紧致集合.

**证明.** 设  $A$  是有界闭集, 不妨设  $A \subset [-M, M]$ . 如果  $\{A_\alpha\}$  为  $A$  的一个开覆盖, 则

$$\{A^c \cap (-M-1, M+1), A_\alpha\}$$

是闭区间  $[-M, M]$  的一个开覆盖. 由 Heine-Borel 定理, 它存在有限子覆盖, 这个有限子覆盖当然也是  $A$  的覆盖, 从这个子覆盖中去掉  $A^c \cap (-M-1, M+1)$  后仍是  $A$  的覆盖.  $\square$

Heine-Borel 定理可以用来重新证明 Bolzano 定理. 证明如下: 设  $\{a_n\}$  为有界数列, 不妨设  $a_n$  均包含于  $[a, b]$ . 我们先证明存在  $c \in [a, b]$ , 使得  $c$  的任何开邻域中均含有  $\{a_n\}$  中无限项. (反证法) 假设不然, 则对任意  $x \in [a, b]$ , 存在  $\delta_x > 0$ , 使得  $(x - \delta_x, x + \delta_x) = I_x$  只含  $\{a_n\}$  中有限项. 显然,  $\{I_x\}_{x \in [a, b]}$  为闭区间  $[a, b]$  的一个开覆盖, 因此存在有限子覆盖, 从而  $[a, b]$  只含有  $\{a_n\}$  中有限项, 这和  $a_n$  均含于  $[a, b]$  中相矛盾.

其次, 我们可以如下选取  $\{a_n\}$  的子列, 使之收敛到  $c$ . 事实上, 先取  $a_{n_1} \in (c-1, c+1)$ . 再取  $n_2 > n_1$ , 使得  $a_{n_2} \in (c-1/2, c+1/2)$ . 如此继续, 我们得到子列  $\{a_{n_k}\}$ , 使得  $a_{n_k} \in (c-1/k, c+1/k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . 显然,  $\{a_{n_k}\}$  收敛到  $c$ .  $\square$

我们现在小结一下. 从实数系的确界原理出发, 我们得到了有界单调数列的收敛性, 以及本节的这几个新定理. 我们要说明的是, 这几个基本结果其实都是相互等价的. 等价的意思就是在承认其中一个结果的前提下可以推出另一结果, 即在构造实数系的时候, 我们只要验证它满足其中一个基本结果, 则其余的结果自然成立. 下面的定理将这个等价性补完整了:

**定理 2.5.5.** 下列命题之间有如下关系:

(1) (Bolzano 定理  $\implies$  Cauchy 准则) 如果  $\mathbb{R}$  中有界数列均有收敛子列, 则  $\mathbb{R}$  中 Cauchy 数列必收敛;

(2) (Cauchy 准则  $\implies$  确界原理) 如果  $\mathbb{R}$  中 Cauchy 数列均收敛, 则  $\mathbb{R}$  中有上 (下) 界的集合必有上 (下) 确界.

**证明.** (1) 设  $\{a_n\}$  为 Cauchy 列, 则  $\{a_n\}$  有界, 从而有收敛子列  $\{a_{n_k}\}$ , 记其极限为  $A$ . 根据 Cauchy 列和数列极限的定义, 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N_0, K$ , 使得当  $m, n > N_0, k > K$  时,

$$|a_m - a_n| < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad |a_{n_k} - A| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

取  $k > \max\{N_0, K\}$ , 则  $n_k \geq k > \max\{N_0, K\}$ . 于是当  $n > n_k$  时,

$$|a_n - A| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - A| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon,$$

这说明  $\{a_n\}$  收敛到  $A$ .

(2) 不妨设集合  $A$  有上界  $M$ . 如果  $M \in A$ , 则  $M$  就是  $A$  的上确界. 下设  $M \notin A$ . 取  $m \in A$ , 则闭区间  $[m, M]$  含有  $A$  中的数. 将  $[m, M]$  二等分, 如果  $[\frac{m+M}{2}, M]$  中含有  $A$  中的数, 则记  $a_1 = \frac{m+M}{2}$ ,  $b_1 = M$ ; 否则就记  $a_1 = m$ ,  $b_1 = \frac{m+M}{2}$ . 总之,  $[a_1, b_1]$  中含有  $A$  中的数,  $b_1$  为  $A$  的上界, 且  $b_1 \notin A$  (为什么?). 对  $[a_1, b_1]$  作同样的事情, 并如此继续, 我们就得到了两个数列  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$ , 满足条件:

- $[a_n, b_n] \cap A \neq \emptyset, \forall n \geq 1$ ;
- $b_n$  均为  $A$  的上界, 且  $b_n \notin A, \forall n \geq 1$ ;
- $b_n - a_n = \frac{M - m}{2^n}$ ;
- $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{M - m}{2^{n+1}}, |b_n - b_{n+1}| \leq \frac{M - m}{2^{n+1}}$ .

由例 2.3.3 知  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  均为 Cauchy 数列, 它们收敛到同一数  $c$ , 不难看出  $c$  为  $A$  的上确界.  $\square$



本节以下内容可以作为选读材料,  
也可以在今后用到时再读.

下面我们再来看几个相关的应用.

**例 2.5.5.** 设函数  $f(x)$  是闭区间  $[a, b]$  上的单调递增函数, 且

$$f(a) > a, f(b) < b.$$

证明存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f(\xi) = \xi$  (不动点).

**证明.** 将  $[a, b]$  二等分, 如果  $f(\frac{a+b}{2}) = \frac{a+b}{2}$ , 则不动点已经找到. 否则, 当  $f(\frac{a+b}{2}) < \frac{a+b}{2}$  时, 令  $a_1 = a, b_1 = \frac{a+b}{2}$ ; 当  $f(\frac{a+b}{2}) > \frac{a+b}{2}$  时, 令  $a_1 = \frac{a+b}{2}, b_1 = b$ , 总之仍有  $f(a_1) > a_1, f(b_1) < b_1$ . 再将  $[a_1, b_1]$  二等分, 如果  $f(\frac{a_1+b_1}{2}) = \frac{a_1+b_1}{2}$ , 则不动点已经找到. 否则, 当  $f(\frac{a_1+b_1}{2}) < \frac{a_1+b_1}{2}$  时, 令  $a_2 = a_1, b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$ ; 当  $f(\frac{a_1+b_1}{2}) > \frac{a_1+b_1}{2}$  时, 令  $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}, b_2 = b_1$ , 总之仍有  $f(a_2) > a_2, f(b_2) < b_2$ . 如此继续做区间等分, 如果在有限次之内都找不到不动点, 则我们就得到区间套

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0.$$

根据闭区间套原理, 存在  $\xi \in [a_n, b_n], \forall n \geq 1$ . 根据  $a_n, b_n$  的选取以及  $f$  的单调性, 我们有

$$a_n \leq f(a_n) \leq f(\xi) \leq f(b_n) \leq b_n, \quad \forall n \geq 1$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 由极限的夹逼原理即得  $f(\xi) = \xi$ . □

设  $A$  为数集,  $x_0 \in A$ . 如果存在  $\delta > 0$ , 使得  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset A$ , 则称  $x_0$  为  $A$  的内点.

**例 2.5.6.** 对于闭区间  $[a, b]$  来说,  $(a, b)$  中的点均为内点; 有理数集  $\mathbb{Q}$  和无理数集  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$  均无内点.

下面的结果称为 Baire 纲定理.

**定理 2.5.6 (Baire).** 如果  $\{A_n\}$  是一列没有内点的闭集, 则它们的并集

$$A = \bigcup_{n \geq 1} A_n = \{x \mid \text{存在 } n \geq 1 \text{ 使得 } x \in A_n\}$$

也没有内点.

**证明.** 用反证法. 设  $x_0 \in A$  为内点, 则存在  $\delta_0 > 0$ , 使得  $[x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0] \subset A$ . 因为  $A_1$  没有内点, 故存在  $x_1 \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) - A_1$ . 由于  $A_1$  为闭集, 故存在  $\delta_1 > 0$ , 使得

$$[x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1] \subset (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0), \quad [x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1] \cap A_1 = \emptyset.$$

不妨设  $\delta_1 < 1$ . 因为  $A_2$  没有内点, 故存在  $x_2 \in (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1) - A_2$ . 由于  $A_2$  为闭集, 故存在  $\delta_2 > 0$ , 使得

$$[x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2] \subset (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1), \quad [x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2] \cap A_2 = \emptyset.$$

不妨设  $\delta_2 < \frac{1}{2}$ . 如此继续, 我们得到闭区间套

$$[x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1] \supset [x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2] \supset \cdots \supset [x_n - \delta_n, x_n + \delta_n] \supset \cdots,$$

使得  $[x_n - \delta_n, x_n + \delta_n] \cap A_n = \emptyset, \delta_n < \frac{1}{n} (n \geq 1)$ . 根据闭区间套原理, 存在  $\xi \in [x_n - \delta_n, x_n + \delta_n], \forall n \geq 1$ . 因此

$$\xi \notin \bigcup_{n \geq 1} A_n = A,$$

这和  $\xi \in [x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1] \subset (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \subset A$  相矛盾. □

读者从 Baire 纲定理也可以马上看出实数全体  $\mathbb{R}$  是不可数的集合.

下面的例题给出了  $\mathbb{R}$  中紧致集合的刻画.

**例 2.5.7.**  $\mathbb{R}$  中的数集  $A$  为紧致集合当且仅当  $A$  为有界闭集.

**证明.** 充分性在前面已经证明过了. 必要性: 设  $A$  为紧致集合. 考虑开区间  $(-n, n)$  ( $n \geq 1$ ), 显然,

$$A \subset \mathbb{R} = \bigcup_{n \geq 1} (-n, n),$$

因此  $\{(-n, n)\}$  是  $A$  的开覆盖, 从而存在有限子覆盖  $\{(-n_i, n_i)\}_{i=1}^k$ . 令

$$N = \max\{n_i \mid i = 1, 2, \dots, k\}$$

则

$$A \subset \bigcup_{i=1}^k (-n_i, n_i) = (-N, N),$$

这说明  $A$  为有界集合. 为了说明  $A$  为闭集, 任取  $x_0 \in A^c$ , 则

$$A \subset \bigcup_{n \geq 1} (\mathbb{R} - [x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}]) = \mathbb{R} - \{x_0\},$$

同样由  $A$  的紧致性知, 存在  $n_j$  ( $1 \leq j \leq l$ ), 使得

$$A \subset \bigcup_{j=1}^l (\mathbb{R} - [x_0 - \frac{1}{n_j}, x_0 + \frac{1}{n_j}]) = \mathbb{R} - [x_0 - \frac{1}{M}, x_0 + \frac{1}{M}],$$

其中  $M = \max\{n_j \mid j = 1, 2, \dots, l\}$ . 这说明

$$(x_0 - \frac{1}{M}, x_0 + \frac{1}{M}) \subset [x_0 - \frac{1}{M}, x_0 + \frac{1}{M}] \subset A^c,$$

即  $x_0$  为  $A^c$  的内点, 因此  $A^c$  为开集,  $A$  为闭集. □

下面的例题描述的是  $\mathbb{R}$  的“连通”性, 以后我们将证明连续函数的介值定理, 它所依赖的就是  $\mathbb{R}$  和  $\mathbb{R}$  中区间的“连通”性.

**例 2.5.8.**  $\mathbb{R}$  中的非空数集  $A$  既是开集又是闭集当且仅当  $A = \mathbb{R}$ .

**证明.** 只要证明必要性即可. 设  $A$  既是开集又是闭集,  $x_0 \in A$ . 因为  $A$  为开集, 存在  $\delta > 0$ , 使得

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset A.$$

令

$$y_0 = \sup\{y \mid [x_0, y) \subset A\},$$

则  $y_0 > x_0$ ,  $[x_0, y_0) \subset A$ . 如果  $y_0 < +\infty$ , 则当  $y_0 \in A$  时, 存在  $\eta > 0$ , 使得

$$(y_0 - \eta, y_0 + \eta) \subset A,$$

从而  $(x_0, y_0 + \eta) \subset A$ , 这与  $y_0$  的定义相矛盾; 如果  $y_0 \in A^c$ , 因为  $A$  为闭集, 故存在  $\eta' > 0$ , 使得

$$(y_0 - \eta', y_0 + \eta') \subset A^c,$$

这与  $[x_0, y_0) \subset A$  相矛盾. 因此只能  $y_0 = +\infty$ , 即  $[x_0, +\infty) \subset A$ . 同理可证  $(-\infty, x_0] \subset A$ , 因此  $A = \mathbb{R}$ .  $\square$

**例 2.5.9.** 设  $f(x)$  为  $\mathbb{R}$  上定义的函数. 如果对任意的  $x_0 \in \mathbb{R}$ , 均存在  $\delta_0 > 0$  以及常数  $c_0$ , 使得

$$f(x) = c_0, \forall x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0),$$

则称  $f$  为局部常值函数. 证明,  $\mathbb{R}$  上的局部常值函数必为常值函数.

**证明.** 任取  $c \in f(\mathbb{R})$ , 考虑

$$f^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = c\}$$

根据题设知  $f^{-1}(c)$  为开集. 显然, 当  $c \neq c'$  时,  $f^{-1}(c) \cap f^{-1}(c') = \emptyset$ , 于是有

$$\mathbb{R} - f^{-1}(c) = \bigcup_{c' \neq c} f^{-1}(c'),$$

这说明  $\mathbb{R} - f^{-1}(c)$  也是开集, 即  $f^{-1}(c)$  既是开集又是闭集, 由前例,  $f^{-1}(c) = \mathbb{R}$ , 即  $f(x) \equiv c$ .  $\square$

## 习题 2.5

1. 设  $(a_n, b_n)$  为开区间套

$$(a_1, b_1) \supset (a_2, b_2) \supset \cdots \supset (a_n, b_n) \supset \cdots, \quad b_n - a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

如果数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  分别是严格单调递增和严格单调递减的, 则存在惟一的  $c \in (a_n, b_n)$ ,  $\forall n \geq 1$ .

2. 设  $A \subset \mathbb{R}$ , 令

$$d(A) = \sup \{|x' - x''| \mid x', x'' \in A\},$$

称为  $A$  的直径. 证明,  $A$  为有界集合当且仅当  $d(A) < \infty$ .

3. 设  $A$  为闭集,  $\{a_n\}$  为  $A$  中数列. 如果  $\{a_n\}$  收敛, 则其极限仍属于  $A$ .
4. 证明闭集套原理: 设  $A_n$  为  $\mathbb{R}$  上非空闭集套

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots,$$

如果  $d(A_n) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$ , 则存在惟一的点  $c \in A_n$ ,  $n = 1, 2, \cdots$ .



5. 如果给定一族两两不相交的区间, 则这些区间只有至多可数个 (提示: 在每一个区间内取一个有理点).

6. 设  $\{A_\alpha\} (\alpha \in \Gamma)$  是一族集合, 定义

$$\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha = \{x \mid \text{存在 } \alpha \in \Gamma, \text{ 使得 } x \in A_\alpha\},$$

称为这一族集合的并集. 类似地, 令

$$\bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha = \{x \mid x \in A_\alpha, \forall \alpha \in \Gamma\},$$

称为这一族集合的交集. 证明

$$\left(\bigcup_{\alpha} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha} A_\alpha^c, \quad \left(\bigcap_{\alpha} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha} A_\alpha^c.$$

7. 用定义证明一族开集的并集仍为开集, 一族闭集的交集仍为闭集.

8. (\*) 证明任何开区间  $(a, b)$  均不能写成一族两两不相交的闭区间的并.

9. 设  $A_n (n \geq 1)$  为一列可数集. 证明  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  为可数集.

10. 如果  $\{a_n\}$  是有界但发散的数列, 则它必有两个收敛于不同值的收敛子列. (提示: 先用 Bolzano 定理.)

11. 设  $\{a_n\}$  不是 Cauchy 列, 则存在  $\varepsilon_0 > 0$  以及子列  $\{a_{n_k}\}$ , 使得

$$|a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| \geq \varepsilon_0, \quad k = 1, 2, \dots$$

12. 设  $f(x)$  是定义在区间  $I$  中的函数, 如果对任意  $x \in I$ , 均存在  $\delta_x > 0$  以及  $M_x$ , 使得

$$|f(y)| \leq M_x, \quad \forall y \in (x - \delta_x, x + \delta_x) \cap I,$$

则称  $f$  是局部有界的. 证明, 闭区间上局部有界的函数都是有界函数.

13. 设  $f$  为  $\mathbb{R}$  上的局部单调递增函数, 即任给  $x_0 \in \mathbb{R}$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得  $f$  在  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  是单调递增的. 证明  $f$  在整个  $\mathbb{R}$  上也是单调递增的.

14. (\*) 不按照我们给出的证明顺序, 请证明关于实数系的几个基本定理的等价性.

15. (\*) 设每一点  $x \in \mathbb{R}$  均为函数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  的局部最小值点, 则  $f$  的值域  $f(\mathbb{R})$  是一个至多可数集.

## 第三章 连续函数

自然界的许多现象都是连续变化的, 例如在一定范围内的气温, 气压, 地球引力等等. 当用函数来描述这些现象的时候, 就自然地出现了函数的连续性概念. 我们将使用在前一章中发展起来的极限理论来定义连续性并研究连续函数的基本性质, 特别是闭区间上连续函数的介值定理和最值定理. 我们还将运用极限理论定义连续函数的积分运算.

### §3.1 函数的极限

如同数列的极限那样, 我们用  $\varepsilon - \delta$  语言来讨论当变量趋于某一点 (或无穷远) 时函数取值的变化趋势.

#### §3.1.1 函数极限的定义

设  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\delta > 0$ . 我们将开区间  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  称为  $x_0$  的一个开邻域, 两个开区间之并  $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$  称为  $x_0$  的一个去心开邻域或空心开邻域.

**定义 3.1.1.** 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的一个空心开邻域  $(x_0 - \delta_0, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta_0)$  中有定义. 如果存在  $A \in \mathbb{R}$ , 使得对任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 都存在  $0 < \delta < \delta_0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称函数  $f(x)$  在  $x_0$  处 (当  $x$  趋于  $x_0$  时) 有极限  $A$ , 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A \text{ (} x \rightarrow x_0 \text{)}.$$

需要注意的是,  $f$  在  $x_0$  处的极限与  $f$  在  $x_0$  处的值没有直接关系,  $f$  甚至可以在  $x_0$  处没有定义.

**例 3.1.1.** 研究函数  $\frac{x^2 - 1}{2x^2 - 3x + 1}$  在  $x_0 = 1$  处的极限.

**解.** 当  $x \neq 1$  时

$$\frac{x^2 - 1}{2x^2 - 3x + 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(2x-1)} = \frac{x+1}{2x-1},$$

因此, 任给  $\varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \min\{\frac{1}{4}, \frac{\varepsilon}{6}\}$ , 当  $0 < |x - 1| < \delta$  时

$$\left| \frac{x^2 - 1}{2x^2 - 3x + 1} - 2 \right| = \left| \frac{x+1}{2x-1} - 2 \right| = \left| \frac{3(x-1)}{2x-1} \right| < 6|x-1| < \varepsilon.$$

这说明该函数在  $x_0 = 1$  处的极限为 2. □

完全类似地, 我们也可以定义  $x_0$  处的单侧极限: 如果存在  $A \in \mathbb{R}$ , 使得对任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 都存在  $0 < \delta < \delta_0$ , 当  $-\delta < x - x_0 < 0$  时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称函数  $f(x)$  在  $x_0$  处 (当  $x$  趋于  $x_0^-$  时) 有左极限  $A$ , 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A \text{ (} x \rightarrow x_0^- \text{)}.$$

$f(x)$  在  $x_0$  处的左极限也记为  $f(x_0^-)$  或  $f(x_0 - 0)$ . 如果存在  $A \in \mathbb{R}$ , 使得对任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 都存在  $0 < \delta < \delta_0$ , 当  $0 < x - x_0 < \delta$  时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称函数  $f(x)$  在  $x_0$  处 (当  $x$  趋于  $x_0^+$  时) 有右极限  $A$ , 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A \text{ (} x \rightarrow x_0^+ \text{)}.$$

$f(x)$  在  $x_0$  处的右极限也记为  $f(x_0^+)$  或  $f(x_0 + 0)$ . 显然, 如果  $f$  在  $x_0$  处极限存在, 则其左右极限也存在且等于此极限.

**例 3.1.2.** 考虑函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

研究  $f$  在  $x_0 = 0$  处的极限.

**解.**  $f$  在 0 的左边为常数 0, 右边为常数 1, 故  $f$  在 0 处的左极限为 0, 右极限为 1. 因为左右极限不相等, 故  $f$  在 0 处的极限不存在.  $\square$

一般地, 我们有

**命题 3.1.1.**  $f$  在  $x_0$  处有极限的充分必要条件是  $f$  在  $x_0$  的左极限和右极限都存在且相等.

**证明.** 只要证明充分性即可. 设  $f$  在  $x_0$  处的左极限和右极限均为  $A$ . 由定义, 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta_1 > 0$ ,  $\delta_2 > 0$ , 使得

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \quad x \in (x_0 - \delta_1, x_0); \quad |f(x) - A| < \varepsilon, \quad x \in (x_0, x_0 + \delta_2).$$

记  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , 则

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \quad 0 < |x - x_0| < \delta,$$

因此  $f$  在  $x_0$  处的极限为  $A$ .  $\square$

**例 3.1.3.** 研究函数  $f(x) = [x]$  的极限.

**解.** 当  $k \leq x < k+1$  ( $k$  为整数) 时,  $f(x) = k$ . 这说明, 当  $x_0$  不是整数时,  $f$  在  $x = x_0$  处的极限等于  $f(x_0) = [x_0]$ ; 当  $x_0$  为整数时,  $f$  在  $x = x_0$  处的左极限为  $x_0 - 1$ , 右极限为  $x_0$ .  $\square$

数列极限的许多结果都可以推广到函数极限的情形, 如下面的夹逼原理和极限的惟一性.

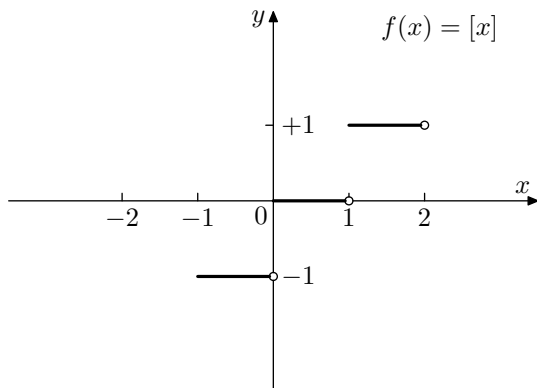


图 3.1  $[x]$  的图像

**命题 3.1.2** (夹逼原理). 设在  $x_0$  的一个空心开邻域内有

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x).$$

如果  $f_1, f_2$  在  $x_0$  的处的极限存在且等于  $A$ , 则  $f$  在  $x_0$  处的极限也等于  $A$ .

**证明.** 与数列极限的夹逼原理完全类似, 用定义证明即可, 略.  $\square$

**命题 3.1.3** (极限的惟一性). 设  $A, B$  均为  $f$  在  $x_0$  处的极限, 则  $A = B$ .

**证明.** 利用不等式

$$0 \leq |A - B| \leq |f(x) - A| + |f(x) - B|$$

和夹逼原理即可.  $\square$

**命题 3.1.4** (绝对值的极限). 设  $f$  在  $x_0$  处的极限  $A$ , 则  $|f|$  在  $x_0$  处的极限为  $|A|$ .

**证明.** 利用不等式

$$0 \leq ||f(x)| - |A|| \leq |f(x) - A|$$

和夹逼原理即可.  $\square$

下面的函数极限是本课程中的一个基本极限.

**例 3.1.4.** 研究函数  $\frac{\sin x}{x}$  在  $x_0 = 0$  处的极限.

**解.** 先考虑  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  的情形. 作半径为 1 的圆 (单位圆),  $O$  为圆心,  $A, D$  为圆周上的点, 角  $\angle AOD$  大小为  $x$ ,  $DC, BA$  均与  $OA$  垂直,  $B$  在  $OD$  的延长线上. 比较三角形  $\triangle OAD$ , 扇形  $OAD$  以及三角形  $\triangle OAB$  的面积大小, 得

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x,$$

即

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

由于  $\cos x$  和  $\frac{\sin x}{x}$  为偶函数, 故上式对  $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$  也成立. 因此当  $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$  时, 有

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \leq 2 \left( \frac{x}{2} \right)^2 = \frac{x^2}{2}.$$

由夹逼原理得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

注. 当  $|x| \geq \frac{\pi}{2}$  时,

$$|\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq |x|,$$

因此我们得到下面的不等式:

$$|\sin x| \leq |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

等号仅在  $x = 0$  处成立.

**例 3.1.5.** 证明

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

**证明.** (1) 任给  $\varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \varepsilon$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin x_0| &= 2 \left| \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \\ &\leq 2 \left| \frac{x - x_0}{2} \right| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon. \end{aligned}$$

(2) 关于  $\cos x$  的极限可象 (1) 一样证明, 也可这样做:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \lim_{x \rightarrow x_0} \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right) = \sin \left( \frac{\pi}{2} - x_0 \right) = \cos x_0.$$

我们再来看两个关于函数极限的例子.

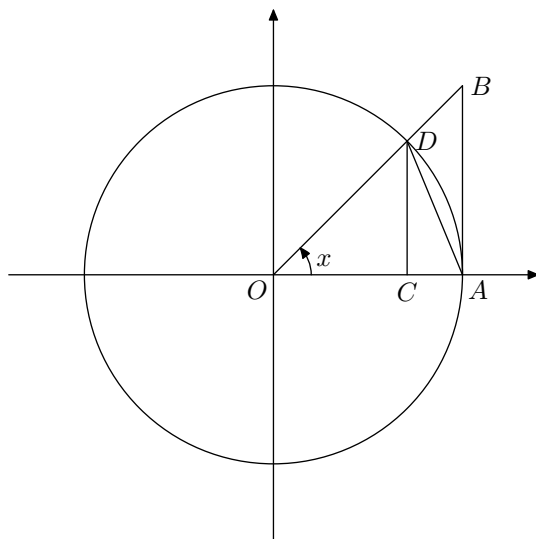


图 3.2 基本极限之一

**例 3.1.6.** 设  $x_0 \geq 0$ . 研究函数  $f(x) = \sqrt{x}$  在  $x_0$  处的极限.

**解.** 当  $x_0 = 0$  时, 任给  $\varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \varepsilon^2$ , 当  $0 < x < \delta$  时

$$|\sqrt{x} - 0| = \sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \varepsilon,$$

因此  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$ .

当  $x_0 > 0$  时, 任给  $\varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \varepsilon\sqrt{x_0}$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \leq \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \varepsilon,$$

因此  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$ . □

**例 3.1.7.** 研究函数  $\sqrt{x} \sin \frac{1}{x}$  在  $x_0 = 0$  处的右极限.

**解.** 当  $x > 0$  时

$$\left| \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} \right| \leq \sqrt{x},$$

因此由上例及夹逼原理知

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} = 0.$$

**例 3.1.8.** 设  $a > 0$ . 研究函数  $a^x$  在  $x_0 = 0$  的极限.

**解.** 当  $a = 1$  时  $a^x = 1$ , 因此  $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$ ; 当  $a > 1$  时, 任给  $1 > \varepsilon > 0$ , 取

$$\delta = \min\{-\log_a(1 - \varepsilon), \log_a(1 + \varepsilon)\},$$

当  $0 < |x| < \delta$  时

$$\log_a(1 - \varepsilon) < x < \log_a(1 + \varepsilon),$$

即

$$1 - \varepsilon < a^x < 1 + \varepsilon,$$

也就是

$$|a^x - 1| < \varepsilon,$$

这说明  $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$ .

当  $0 < a < 1$  时, 任给  $1 > \varepsilon > 0$ , 取

$$\delta = \min\{|\log_a(1 - \varepsilon)|, |\log_a(1 + \varepsilon)|\},$$

当  $0 < |x| < \delta$  时, 有

$$\log_a(1 + \varepsilon) < x < \log_a(1 - \varepsilon),$$

即

$$1 - \varepsilon < a^x < 1 + \varepsilon,$$

也就是

$$|a^x - 1| < \varepsilon,$$

这说明  $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$ . □

**例 3.1.9.** 设  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ . 研究  $f(x) = \log_a x$  在  $x_0 = 1$  处的极限.

**解.** 不妨设  $a > 1$ . 任给  $\varepsilon > 0$ , 必存在  $\delta > 0$ , 使得

$$a^{-\varepsilon} < 1 - \delta < 1 + \delta < a^\varepsilon,$$

当  $0 < |x - 1| < \delta$  时, 有

$$a^{-\varepsilon} < 1 - \delta < x < 1 + \delta < a^\varepsilon,$$

即

$$|\log_a x - 0| < \varepsilon,$$

从而  $\lim_{x \rightarrow 1} \log_a x = 0$ . □

下面我们讨论函数在涉及无穷大或无穷远时的极限.

**定义 3.1.2.** 设  $f$  在  $x_0$  的一个空心开邻域中有定义. 如果任给  $A > 0$ , 均存在  $\delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有  $f(x) > A$ , 则称  $f$  在  $x_0$  处的极限为  $+\infty$ , 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow x_0).$$

如果任给  $A < 0$ , 均存在  $\delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有  $f(x) < A$ , 则称  $f$  在  $x_0$  处的极限为  $-\infty$ , 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow -\infty \quad (x \rightarrow x_0).$$

对于这种极限, 夹逼原理和惟一性仍然成立. 我们也可以完全类似地给出  $f$  在  $x_0$  处的左极限或右极限为无穷大的定义, 这里不赘述. 有时, 当我们说  $f$  在  $x_0$  处的极限为无穷大是指  $|f|$  在  $x_0$  处的极限为  $+\infty$ .

**定义 3.1.3.** 设  $f$  在  $+\infty$  的一个开邻域  $(a, +\infty)$  中有定义. 如果存在  $A \in \mathbb{R}$ , 使得对于任给的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $M > a$ , 当  $x > M$  时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称  $f$  在  $+\infty$  处有极限  $A$ , 记为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow +\infty).$$

类似地, 设  $f$  在  $-\infty$  的一个开邻域  $(-\infty, a)$  中有定义. 如果存在  $A \in \mathbb{R}$ , 使得对于任给的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $m < a$ , 当  $x < m$  时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称  $f$  在  $-\infty$  处有极限  $A$ , 记为

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow -\infty).$$

如果  $f$  在  $-\infty$  以及  $+\infty$  处的极限均为  $A$ , 则称  $f$  在  $\infty$  (无穷远) 处有极限  $A$ , 记为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow \infty).$$

我们可以类似地给出  $f$  在无穷远处极限为无穷大的定义, 这里也不再赘述.

下面的函数极限是本课程的另一个重要的基本极限.

**例 3.1.10.** 研究函数  $(1 + \frac{1}{x})^x$  在无穷远处的极限.

**解.** 当  $x \geq 1$  时,

$$\left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x]} \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x] + 1},$$

其中  $[x]$  是不超过  $x$  的最大整数. 因此

$$\left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x] + 1} \left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{-1} \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right).$$

利用数列极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

以及夹逼原理得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

类似可证  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ . □

### §3.1.2 函数极限的性质

我们来讨论函数极限存在与否的判别方法和计算方法, 主要以有限极限为例.

**定理 3.1.5 (Heine).** 设函数  $f$  在  $x_0$  的一个空心开邻域内有定义, 则  $f$  在  $x_0$  处的极限为  $A$  当且仅当对任何收敛点列  $x_n \rightarrow x_0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) 且  $x_n \neq x_0$  ( $\forall n$ ), 均有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$



**证明.** 先证必要性. 由定义, 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

现在设  $x_n \rightarrow x_0, x_n \neq x_0$ . 仍由极限定义, 对于上述  $\delta$ , 存在  $N$ , 使得当  $n > N$  时  $0 < |x_n - x_0| < \delta$ . 因此当  $n > N$  时, 有

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon,$$

这说明  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ .

我们用反证法来证明充分性. 如果  $f$  在  $x_0$  处极限不为  $A$  (极限可能不存在), 则存在  $\varepsilon_0 > 0$ , 使得对任何  $\delta > 0$ , 都存在  $x_\delta$ , 使得

$$0 < |x_\delta - x_0| < \delta, \quad |f(x_\delta) - A| \geq \varepsilon_0.$$

特别地, 对  $\forall n \geq 1$ , 均存在  $x_n$ , 使得

$$0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}, \quad |f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0.$$

这说明  $x_n \rightarrow x_0, x_n \neq x_0$ , 但  $f(x_n)$  不收敛到  $A$ . □

注. (1) Heine 定理可以改述成下面应用起来较为方便的形式:

$$f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 处有极限} \iff \forall x_n \rightarrow x_0 (x_n \neq x_0), \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \text{ 存在}.$$

这时充分性的证明是这样的: 只要说明如果  $f(x_n)$  均收敛, 则它们的极限必定都相同. (反证法) 如果存在  $x'_n \rightarrow x_0, x'_n \neq x_0, f(x'_n) \rightarrow A$  以及  $x''_n \rightarrow x_0, x''_n \neq x_0, f(x''_n) \rightarrow B$ . 当  $B \neq A$  时, 考虑新的点列  $x_n$ , 使得  $x_{2k} = x'_{2k}, x_{2k-1} = x''_{2k-1} (k \geq 1)$ , 则  $x_n \rightarrow x_0, x_n \neq x_0$  但  $f(x_n)$  不收敛, 这就得到矛盾.

(2) 对于单侧极限, 无穷远处的极限以及极限为无穷大的情形, 有完全类似的 Heine 型定理.

**例 3.1.11.** 研究函数  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  在  $x_0 = 0$  处的极限.

**解.** 我们选取点列  $x_n = \frac{1}{n\pi}$  以及  $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ , 则  $x_n, y_n \rightarrow 0, x_n, y_n \neq 0$ , 且  $f(x_n) = 0, f(y_n) = 1$ , 根据刚才的注记就知道  $f$  在  $x_0 = 0$  的极限不存在. □

**定理 3.1.6 (Cauchy 准则).** 设  $f$  在  $x_0$  的一个空心开邻域中有定义, 则  $f$  在  $x_0$  处存在有限极限当且仅当任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得当  $0 < |x' - x_0| < \delta, 0 < |x'' - x_0| < \delta$  时, 有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

**证明.** 必要性: 设  $f$  在  $x_0$  处的极限为  $A$ , 则任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时,  $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ . 因此, 当  $0 < |x' - x_0| < \delta, 0 < |x'' - x_0| < \delta$  时, 有

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - A| + |f(x'') - A| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

充分性: 我们用 Heine 定理来证. 设  $x_n \rightarrow x_0, x_n \neq x_0$ , 则已知条件告诉我们  $\{f(x_n)\}$  是一个 Cauchy 列, 根据数列极限的 Cauchy 准则,  $\{f(x_n)\}$  收敛. 于是由 Heine 定理知  $f$  在  $x_0$  处的极限存在 (且有限).  $\square$

**注.** (1) 对于无穷远处极限为有限的情形, Cauchy 准则仍然成立.

(2) 从证明过程可以看出,  $f$  在  $x_0$  处不存在有限极限当且仅当存在  $\varepsilon_0 > 0$ , 使得对任意  $\delta > 0$ , 总有  $x', x''$ , 使得

$$0 < |x' - x_0| < \delta, 0 < |x'' - x_0| < \delta, |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0.$$

**例 3.1.12.** 研究 Dirichlet 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \end{cases}$$

的极限.

**解.** 在任何一点  $x_0$  附近都有点取值为 0 或 1, 取  $\varepsilon = 1$ , 由刚才的注记 (2) 即知  $D$  在  $x_0$  处极限不存在.  $\square$

**定理 3.1.7** (单调有界原理). 设函数在  $(x_0 - \delta, x_0)$  中有定义, 如果  $f$  单调递增且有上界, 或单调递减且有下界, 则  $f$  在  $x_0$  的左极限存在 (且有限).

**证明.** 利用数列的单调性原理以及 Heine 定理即可.  $\square$

**注.** 如果  $f$  单调递增又无上界, 则  $f$  在  $x_0$  处的左极限为  $+\infty$ ; 如果  $f$  单调递减又无下界, 则  $f$  在  $x_0$  处的左极限为  $-\infty$ ; 对于函数的右极限有完全类似的结论.

下面我们叙述函数极限的一些基本性质, 它们和数列极限相应的性质十分类似, 因此我们省略其证明.

**定理 3.1.8.** (1) (局部有界性) 如果  $f$  在  $x_0$  处有有限极限, 则  $f$  在  $x_0$  的一个空心开邻域内有界.

(2) (保序性) 设  $f, g$  在  $x_0$  处的极限分别为  $A, B$ . 如果  $f(x) \geq g(x)$  在  $x_0$  的一个空心开邻域内成立, 则  $A \geq B$ ; 反之, 如果  $A > B$ , 则在  $x_0$  内一个空心开邻域内  $f(x) > g(x)$ ; 特别地, 如果  $A > 0$ , 则在  $x_0$  的一个空心开邻域内  $f(x) > 0$ .

(3) (四则运算) 设  $f, g$  在  $x_0$  处有有限极限, 则

$$\bullet \lim_{x \rightarrow x_0} [\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \beta \lim_{x \rightarrow x_0} g(x), \text{ 其中 } \alpha, \beta \text{ 为常数};$$

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)/g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) / \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$  其中  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0.$

注. 对于无穷远处的极限有完全类似的结论成立.

下面关于复合函数的极限也很有用.

**定理 3.1.9** (复合函数的极限). 设  $f(y)$  在  $y_0$  处的极限为  $A$ ,  $g(x)$  在  $x_0$  处的极限为  $y_0$ , 且存在  $x_0$  的一个空心开邻域, 在此开邻域内  $g(x) \neq y_0$ , 则复合函数  $f(g(x))$  在  $x_0$  处的极限为  $A$ .

**证明.** 任给  $\varepsilon > 0$ , 由  $\lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = A$  知, 存在  $\delta > 0$ , 当  $0 < |y - y_0| < \delta$  时, 有

$$|f(y) - A| < \varepsilon.$$

又因为  $g(x) \rightarrow y_0$  ( $x \rightarrow x_0$ ), 对于这个  $\delta$ , 存在  $\eta > 0$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \eta$  时, 有

$$0 < |g(x) - y_0| < \delta,$$

此时有

$$|f(g(x)) - A| < \varepsilon,$$

这说明  $f(g(x))$  在  $x_0$  处的极限为  $A$ . □

注. (1) 定理中的条件  $g(x) \neq y_0$  一般不能去掉, 下面的函数就是例子: 令

$$f(y) = \begin{cases} 1, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases}$$

以及  $g(x) \equiv 0$ , 则  $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 1$ , 但  $f(g(x)) = 0$ . 不过, 当  $f(y_0) = A$  时这个条件是可以去掉的 (为什么?).

(2) 对于无穷远处的极限以及极限为无穷大的情形也有完全类似的结果.

我们再来计算一些函数极限的例子, 有些例子在后面的课程中可能会用到.

**例 3.1.13.** 研究函数  $(1+x)^{\frac{1}{x}}$  在  $x=0$  处的极限.

**解.** 作变量替换  $y = \frac{1}{x}$ , 则

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y$$

当  $x \rightarrow 0$  时  $y \rightarrow \infty$ , 由复合函数的极限以及例 3.1.10, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e.$$

**例 3.1.14.** 设  $a > 0, a \neq 1$ . 研究  $f(x) = \log_a x$  在  $x_0 > 0$  处的极限.

**解.** 上一小节已证  $\lim_{x \rightarrow 1} \log_a x = 0$ , 因此

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0 + \lim_{x \rightarrow x_0} \log_a \left( \frac{x}{x_0} \right) = \log_a x_0.$$

**例 3.1.15.** 设  $a > 0$ , 研究函数  $\frac{a^x - 1}{x}$  在  $x_0 = 0$  处的极限.

**解.** 不妨设  $a \neq 1$ . 作变量替换  $y = a^x - 1$ , 则  $x \rightarrow 0$  时  $y \rightarrow 0$ . 于是

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log_a(1+y)} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\log_a[(1+y)^{\frac{1}{y}}]} \\ &= \frac{1}{\log_a e} = \ln a. \end{aligned}$$

**例 3.1.16.** 设  $a > 1, k \in \mathbb{R}$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{a^x} = 0.$$

**证明.** 当  $k \geq 0, x > 1$  时,

$$0 < \frac{x^k}{a^x} \leq \frac{([x] + 1)^k}{a^{[x]}} = \frac{([x] + 1)^k}{a^{[x] + 1}} a,$$

由前一章例 2.1.9 和夹逼原理知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{a^x} = 0.$$

当  $k < 0, x > 1$  时,

$$0 < \frac{x^k}{a^x} < a^{-x} \leq a^{-[x]},$$

仍由夹逼原理知极限为零. □

**例 3.1.17.** 设  $P(x), Q(x)$  是次数相同的多项式, 求极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x)/Q(x)$ .

**证明.** 设  $P(x), Q(x)$  次数为  $n$ . 记

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n, \quad Q(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n,$$

其中  $a_0, b_0 \neq 0$ . 由

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x^{-1} + \cdots + a_n x^{-n}}{b_0 + b_1 x^{-1} + \cdots + b_n x^{-n}}$$

以及极限的四则运算性质可得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0}{b_0}.$$

## 习题 3.1

1. 给出下列几种函数极限的定义:

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty, \quad (2) \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty, \\ (3) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \quad (4) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty. \end{aligned}$$

2. 按照极限的定义证明

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x^2-3} = \frac{1}{3}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x-4}{x^2-1} = 2; \quad (3) \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{4-x^2} = 0; \\ (4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-3}{x^2-5} = 1; \quad (5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x^2-4} = \infty; \quad (6) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = 0; \\ (7) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} = 0; \quad (8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x}{x+2} = \infty; \quad (9) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2-a}) = 0. \end{aligned}$$

3. 求下列函数极限 ( $m, n$  为正整数)

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-1}{x-1}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2-h^2}{x}; \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{3x+1}; \\ (4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{2x^2-x-1}; \quad (5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+2}{3x^2+4x}; \quad (6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^m}{1-x^n}; \\ (7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n-1}{x}; \quad (8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a^2+x}-|a|}{x}; \quad (9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}. \end{aligned}$$

4. 求下列函数极限 ( $m, n$  为正整数)

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt{x}-1}; \\ (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^{\frac{1}{n}} - (1+nx)^{\frac{1}{m}}}{x}; \quad (4) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right). \end{aligned}$$

5. 求下列函数极限

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2}; \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}; \\ (4) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x^2}; \quad (5) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x-a}; \quad (6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^3)}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

6. 求下列函数极限 ( $k > 0$ )

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow 0} x \left[ \frac{1}{x} \right]; \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[x]}{x}; \quad (3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^k}; \\ (4) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\frac{1}{x}}; \quad (5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1+x}{3+x} \right)^x; \quad (6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x}. \end{aligned}$$

7. 求下列极限

$$\begin{aligned} (1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1}); \quad (2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}); \\ (3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos^n \frac{x}{\sqrt{n}}; \quad (4) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \right); \\ (5) \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n}; \quad (6) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+x}{n-1} \right)^n. \end{aligned}$$

8. 设  $0 < a < 1$ , 求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(1+x)^a - x^a]$ .

9. 求极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(\sin(\cdots(\sin x)))$  ( $n$  次复合函数).

10. 求极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} R(x)$ , 其中  $R(x)$  为 Riemann 函数:

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}, p, q \text{ 为互素正整数, } p < q; \\ 1, & x = 0, 1; \\ 0, & x \text{ 为 } (0, 1) \text{ 中的无理数.} \end{cases}$$

11. 设  $f$  为周期函数, 如果  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = C$ , 则  $f \equiv C$ .

12. (\*) 设  $f, g$  为两个周期函数, 如果  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = 0$ , 则  $f = g$ .

13. (\*) 设  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} [f(2x) - f(x)] = 0$ , 证明  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ .

### §3.2 无穷小 (大) 量的阶

在对两个变化量进行比较时, 我们有时不需要知道它们的确切大小, 而只需了解它们之间的量级关系, 我们现在可以用极限来刻画这些量级关系.

**定义 3.2.1** (无穷小量与无穷大量). 如果函数  $f$  在  $x_0$  处的极限为 0, 则称  $f$  在  $x \rightarrow x_0$  时为无穷小量, 记为  $f(x) = o(1)$  ( $x \rightarrow x_0$ ); 如果  $x \rightarrow x_0$  时  $|f| \rightarrow +\infty$ , 则称  $f$  在  $x \rightarrow x_0$  时为无穷大量.

**注.** (1) 无穷小 (大) 量不是一个数, 而是在某点邻域内有特定性质的函数. 在无穷远处也可以类似定义无穷小量与无穷大量;

(2) 对于数列也可以定义无穷小量与无穷大量: 设  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  为两个数列, 如果  $a_n/b_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ), 则称  $\{a_n\}$  关于  $\{b_n\}$  是无穷小量, 记为  $a_n = o(b_n)$ ; 无穷大量可类似定义.

**例 3.2.1.** 说明  $\sqrt{x+1} - 1 = o(1)$  ( $x \rightarrow 0$ ).

解. 因为

$$\sqrt{x+1}-1 = \frac{x}{\sqrt{x+1}+1} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0),$$

故由定义知  $\sqrt{x+1}-1$  在  $x \rightarrow 0$  时为无穷小量.  $\square$

我们可以利用无穷小量和无穷大量来比较函数. 例如, 设  $f, g$  在  $x \rightarrow x_0$  时均为无穷小 (大) 量, 则

(1) 如果  $f/g$  在  $x \rightarrow x_0$  时是无穷小量, 则称当  $x \rightarrow x_0$  时  $f$  是  $g$  的高 (低) 阶无穷小 (大) 量, 记为

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \rightarrow x_0);$$

(2) 如果  $f/g$  在  $x_0$  的一个空心邻域中有界, 则记

$$f(x) = O(g(x)) \quad (x \rightarrow x_0);$$

(3) 如果  $f/g$  在  $x_0$  处的极限为  $A \neq 0$ , 则称当  $x \rightarrow x_0$  时  $f$  和  $g$  是同阶无穷小 (大) 量, 记为

$$f(x) = O^*(g(x)) \quad (x \rightarrow x_0);$$

特别地, 如果  $A = 1$ , 则称当  $x \rightarrow x_0$  时  $f$  和  $g$  是等价无穷小 (大) 量, 记为

$$f \sim g \quad (x \rightarrow x_0).$$

(4) 设  $k > 0$ . 如果

$$|f(x)| = O^*(|x - x_0|^k) \quad (x \rightarrow x_0),$$

则称当  $x \rightarrow x_0$  时  $f$  是  $k$  阶无穷小量; 如果

$$|f(x)| = O^*(|x - x_0|^{-k}) \quad (x \rightarrow x_0),$$

则称当  $x \rightarrow x_0$  时  $f$  是  $k$  阶无穷大量.  $k$  为正整数时也可将定义中的绝对值去掉.

注. 这些量级的比较也可在无穷远处进行, 此时  $f(x)$  可与  $x^k$  进行比较.

**例 3.2.2.** 证明  $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \quad (x \rightarrow 0)$ .

**证明.** 根据前节的结果, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2}x}{x^2} = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

**例 3.2.3.** 设  $P(x)$  是  $n$  次多项式, 则  $P(x) = O^*(x^n) \quad (x \rightarrow \infty)$ .

**证明.** 在前一节最后一例中取  $Q(x) = x^n$  即可.  $\square$

下面的结果在计算极限的时候十分有用.

**定理 3.2.1** (等价代换). 设  $x \rightarrow x_0$  时,  $f \sim f_1, g \sim g_1$ . 如果  $f_1/g_1$  在  $x_0$  处有极限, 则  $f/g$  在  $x_0$  处有极限, 且极限相等; 反之亦然.

**证明.** 只要注意到

$$f/g = (f/f_1)(f_1/g_1)(g_1/g),$$

以及当  $x \rightarrow x_0$  时  $f/f_1 \rightarrow 1, g/g_1 \rightarrow 1$  即可. □

**注.** 等价代换在无穷远处也可进行.

**例 3.2.4.** 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$ .

**解.** 因为当  $x \rightarrow 0$  时  $\sin \alpha x \sim \alpha x, \sin \beta x \sim \beta x$ , 故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha x}{\beta x} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

**例 3.2.5.** 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ .

**解.** 当  $x \rightarrow 0$  时,

$$\tan x - \sin x = \frac{\sin x}{\cos x} (1 - \cos x) \sim x \left( \frac{1}{2} x^2 \right) = \frac{1}{2} x^3,$$

故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

需要注意的是, 等价代换不能用于加法和减法运算, 例如在上面的例子中, 当  $x \rightarrow 0$  时, 有

$$\tan x \sim \sin x \sim x,$$

但  $\tan x - \sin x$  不能代换为零. □

**例 3.2.6.** 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\tan^2 x}$ .

**解.** 先来说明

$$\ln(1+x) \sim x \quad (x \rightarrow 0).$$

事实上, 根据前一节例 3.1.13, 有

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln[(1+x)^{\frac{1}{x}}] \rightarrow \ln e = 1 \quad (x \rightarrow 0).$$

于是, 当  $x \rightarrow 0$  时, 有

$$\ln \cos x = \ln[1 - (1 - \cos x)] \sim -(1 - \cos x) \sim -\frac{1}{2} x^2.$$

另一方面

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \sim x^2 \quad (x \rightarrow 0),$$



利用等价代换得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\tan^2 x} = -\frac{1}{2}.$$

### 习题 3.2

1. 证明下列各式:

$$\begin{aligned} (1) & x \sin \sqrt{x} \sim x^{\frac{3}{2}} \quad (x \rightarrow 0^+); & (2) & \sqrt{1 + \sqrt{x}} - 1 = o(1) \quad (x \rightarrow 0); \\ (3) & \sqrt{1 + x^2} - 1 \sim \frac{x^2}{2} \quad (x \rightarrow 0); & (4) & \frac{1}{1 - x^2} = 1 + x^2 + O(x^4) \quad (x \rightarrow 0). \end{aligned}$$

2. 当  $x \rightarrow 0^+$  时, 求下列无穷小量的阶并写出等价无穷小量:

$$\begin{aligned} (1) & \sqrt{x \sin x}; & (2) & \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}; & (3) & \ln(1+x) - \ln(1-x); \\ (4) & \sqrt[3]{1+3x} - 1; & (5) & 4x^2 - 5x + 10x^6; & (6) & \sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}. \end{aligned}$$

3. 当  $x \rightarrow +\infty$  时, 讨论下列无穷大量的阶:

$$\begin{aligned} (1) & x - 5x^3 + x^6; & (2) & \frac{x^5 + 1}{x^4 + 1}; & (3) & \frac{x^4}{x^2 - x + 1}; \\ (4) & \sqrt{x^2 + \sqrt{x}}; & (5) & \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}; & (6) & x \ln^2 x. \end{aligned}$$

4. 设  $f(x) = o(1) \quad (x \rightarrow x_0)$ , 证明当  $x \rightarrow x_0$  时

$$\begin{aligned} (1) & o(f(x)) + o(f(x)) = o(f(x)); \\ (2) & o(cf(x)) = o(f(x)), \text{ 其中 } c \text{ 为常数}; \\ (3) & g(x) \cdot o(f(x)) = o(f(x)g(x)), \text{ 其中 } g(x) \text{ 为有界函数}; \\ (4) & [o(f(x))]^k = o(f^k(x)); \\ (5) & \frac{1}{1+f(x)} = 1 - f(x) + o(f(x)). \end{aligned}$$

5. 用等价替换求极限:

$$\begin{aligned} (1) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x}{1 - \cos x}; & (2) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^4} - 1}{1 - \cos^2 x}; \\ (3) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\tan x)}{x}; & (4) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{\sin 2x}. \end{aligned}$$

6. 设  $P(x)$  为多项式, 如果  $P(x) = o(x^n) \quad (x \rightarrow \infty)$ , 则  $P(x)$  的次数小于  $n$ .

7. 设  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  满足条件  $f(2x) = f(x)$ ,  $f(x) = o(1) \quad (x \rightarrow +\infty)$ . 证明  $f \equiv 0$ .

8. (\*) 设  $f(x) = o(1)$ ,  $f(2x) - f(x) = O(x) \quad (x \rightarrow 0)$ . 证明  $f(x) = O(x) \quad (x \rightarrow 0)$ .

### §3.3 连续函数

连续变化的量用数学的语言来刻画就是连续函数,这是本课程的主要研究对象之一.

#### §3.3.1 连续函数的定义

**定义 3.3.1** (连续性). 如果  $f$  在  $x_0$  的一个邻域中有定义且  $f$  在  $x_0$  处的极限等于  $f(x_0)$ , 则称  $f$  在  $x_0$  处连续,  $x_0$  称为  $f$  的一个连续点; 如果  $f$  在  $x_0$  处的左极限等于  $f(x_0)$ , 则称  $f$  在  $x_0$  处左连续; 如果  $f$  在  $x_0$  处的右极限等于  $f(x_0)$ , 则称  $f$  在  $x_0$  处右连续; 在定义域内每一点都连续的函数称为连续函数.

注. (1) 如果  $x_0$  不是  $f$  的连续点, 则称  $x_0$  是  $f$  的一个间断点. 显然,  $f$  在  $x_0$  处连续当且仅当  $f$  在  $x_0$  处左连续和右连续. 我们还可以用 Heine 定理来描述连续性:  $f$  在  $x_0$  处连续当且仅当对任意收敛到  $x_0$  的点列  $x_n$ , 均有  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

(2) 用  $\varepsilon - \delta$  的语言来描述  $f$  在  $x_0$  处连续就是: 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 当  $|x - x_0| < \delta$  时, 有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

(3)\* 上半连续和下半连续: 如果任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 当  $|x - x_0| < \delta$  时, 有

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon,$$

则称  $f$  在  $x_0$  处下半连续; 如果任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 当  $|x - x_0| < \delta$  时, 有

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon,$$

则称  $f$  在  $x_0$  处上半连续.

(4) 连续点和连续性的概念可以推广到在  $\mathbb{R}$  的子集  $X$  上定义的函数  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  上:  $x_0 \in X$  为  $f$  的连续点是指当  $x \in X$ ,  $x \rightarrow x_0$  时  $f(x) \rightarrow f(x_0)$ . 因此, 当  $X = [a, b]$  时,  $f$  为  $[a, b]$  上的连续函数是指  $f$  在  $(a, b)$  中每一点都连续, 且在  $a$  处右连续, 在  $b$  处左连续.

**例 3.3.1.** 根据前面两节的计算, 我们已经知道下面的初等函数都是连续的:

$$C \text{ (常值函数)}, x, \sin x, \cos x, \sqrt{x}, \log_a x \text{ (} a > 0, a \neq 1 \text{)}.$$

**例 3.3.2.** 如果  $f$  为连续函数, 则  $|f|$  也是连续函数.

解. 设  $f$  在  $x_0$  处连续, 则由

$$0 \leq ||f(x)| - |f(x_0)|| \leq |f(x) - f(x_0)|$$

以及夹逼原理知  $|f(x)|$  在  $x_0$  处连续.  $\square$

我们再看两个初等的连续函数的例子.

**例 3.3.3.** 研究函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  ( $x \neq 0$ ) 的连续性.

**解.** 设  $x_0 > 0$ . 任给  $\varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \min\{\frac{1}{2}x_0, \frac{1}{2}x_0^2\varepsilon\}$ , 当  $|x - x_0| < \delta$  时

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{|xx_0|} \leq \frac{2|x - x_0|}{x_0^2} < \varepsilon,$$

因此  $f(x)$  在  $x_0$  处连续. 完全类似地可证明, 当  $x_0 < 0$  时,  $f$  在  $x_0$  处也连续. 因此  $\frac{1}{x}$  为连续函数.  $\square$

**例 3.3.4.** 研究函数  $f(x) = a^x$  ( $a > 0$ ) 的连续性.

**解.**  $a = 1$  时  $f(x) = 1$  为常值函数, 因此是连续函数. 设  $a \neq 1$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = \lim_{x \rightarrow x_0} a^{x_0} a^{x-x_0} = a^{x_0} \lim_{y \rightarrow 0} a^y = a^{x_0}.$$

因此  $f(x)$  为连续函数.  $\square$

利用下面的两个定理可以得到连续函数的更多例子.

**定理 3.3.1** (连续函数的四则运算). 设  $f(x), g(x)$  都在  $x_0$  处连续, 则

- (1)  $\alpha f(x) + \beta g(x)$  在  $x_0$  处连续, 其中  $\alpha, \beta$  为常数;
- (2)  $f(x)g(x)$  在  $x_0$  处连续;
- (3) 当  $g(x_0) \neq 0$  时,  $f(x)/g(x)$  在  $x_0$  处连续.

**证明.** 由函数极限的四则运算性质即可得到.  $\square$

**例 3.3.5.** 如果  $f, g$  为连续函数, 则  $\max\{f, g\}$  和  $\min\{f, g\}$  均为连续函数.

**解.** 当  $f, g$  连续时,  $f + g, f - g$  均连续. 并且可以直接验证

$$\max\{f, g\} = \frac{1}{2}\{(f + g) + |f - g|\}, \quad \min\{f, g\} = \frac{1}{2}\{(f + g) - |f - g|\}.$$

于是  $\max\{f, g\}$  和  $\min\{f, g\}$  均为连续函数.  $\square$

**例 3.3.6.** 有理函数的连续性.

因为  $f(x) = x$  为连续函数, 因此  $x^2 = x \cdot x, x^3 = x \cdot x \cdot x, \dots, x^n$  ( $n \geq 1$ ) 都是连续函数; 同理, 因为  $f(x) = x^{-1}$  连续, 因此  $x^n$  ( $n \leq -1$ ) 也是连续函数. 进一步, 有理函数 (即两个多项式之商) 在定义域内均为连续函数.  $\square$

**例 3.3.7.** 三角函数的连续性.

因为  $\sin x, \cos x$  为连续函数, 故三角函数

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}, \sec x = \frac{1}{\cos x}, \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

在定义域内均为连续函数. □

**定理 3.3.2** (复合函数的连续性). 设函数  $f(y)$  在  $y_0$  处连续, 函数  $g(x)$  在  $x_0$  处的极限为  $y_0$ , 则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right) = f(y_0),$$

特别地, 当  $g$  在  $x_0$  处连续时, 复合函数  $f(g(x))$  在  $x_0$  处也连续.

**证明.** 因为函数  $f(y)$  在  $y_0$  处连续, 故任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 当  $|y - y_0| < \delta$  时,

$$|f(y) - f(y_0)| < \varepsilon.$$

对于这个  $\delta$ , 因为  $g(x) \rightarrow y_0$  ( $x \rightarrow x_0$ ), 故存在  $\eta > 0$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \eta$  时,

$$|g(x) - y_0| < \delta,$$

从而

$$|f(g(x)) - f(y_0)| < \varepsilon,$$

即  $f(g(x)) \rightarrow f(y_0) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right)$ . □

**例 3.3.8.** 设  $\alpha \neq 0$ , 研究幂函数  $f(x) = x^\alpha$  的连续性.

**解.** 设  $\alpha > 0$ . 先来说明  $f(x)$  在  $x = 0$  处是连续的. 事实上, 任给  $\varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}$ , 当  $|x| < \delta$  时

$$|x^\alpha - 0| = (|x|)^\alpha \leq (\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha = \varepsilon.$$

因此  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续.

如果  $x > 0$ , 则  $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ , 根据复合函数的连续性, 我们知道  $f(x)$  连续; 如果  $x < 0$ , 则  $x^\alpha = (-1)^\alpha e^{\alpha \ln |x|}$ , 仍由复合函数的连续性知  $f(x)$  连续.

如果  $\alpha < 0$ , 则

$$x^\alpha = \left(\frac{1}{x}\right)^{-\alpha},$$

因此当  $x \neq 0$  时函数是连续的. 总之, 在定义域内, 幂函数是连续的. □

## §3.3.2 间断点与单调函数

单调函数和可逆函数之间有很密切的联系, 我们先来研究单调函数的连续性.

**例 3.3.9.** 研究单调函数  $f(x) = [x]$  的连续性, 其中  $[x]$  表示不超过  $x$  的最大整数.

**解.** 当  $k \leq x < k+1$  ( $k$  为整数) 时,  $[x] = k$ . 因此, 当  $x$  不是整数时,  $f(x)$  在  $x$  处连续. 当  $x = k$  为整数时,  $f(x)$  在  $k$  处的左极限为  $k-1$ , 右极限为  $k$ . 这说明  $f(x)$  的间断点恰为所有的整数点.  $\square$

**定义 3.3.2.** 设  $x_0$  为  $f(x)$  的一个间断点. 如果  $f(x)$  在  $x_0$  处的左极限  $f(x_0-0)$  和右极限  $f(x_0+0)$  都存在且有限, 则称  $x_0$  为第一类间断点; 其它的间断点都称为第二类间断点.

左极限和右极限不相等的第二类间断点称为跳跃间断点; 左极限和右极限相等的第一类间断点称为可去间断点.

根据定义, 函数  $f(x) = [x]$  的间断点都是跳跃间断点.

**例 3.3.10.** 研究 Riemann 函数

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}, \text{ } p, q \text{ 为互素正整数, } p < q; \\ 1, & x = 0, 1; \\ 0, & x \text{ 为 } (0, 1) \text{ 中的无理数.} \end{cases}$$

的连续性.

**解.** 设  $x_0 \in [0, 1]$ , 我们说明  $R(x)$  在  $x_0$  处的极限为 0, 因而  $f(x)$  的间断点为有理点, 它们都是可去间断点.

任给  $\varepsilon > 0$ , 因为满足条件  $\frac{1}{p} \geq \varepsilon$  (即  $p \leq \frac{1}{\varepsilon}$ ) 的正整数只有有限多个, 相应的分数  $\frac{q}{p}$  ( $q \leq p$ ) 也只有有限多个, 记为  $\{x_i\}_{i=1}^k$ . 令

$$\delta = \min\{|x_i - x_0| \mid x_i \neq x_0, i = 1, 2, \dots, k\},$$

当  $x \in [0, 1]$ ,  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 如果  $x$  为无理数, 则  $R(x) = 0$ ; 如果  $x = \frac{q}{p}$  为有理数, 则

$$R(x) = \frac{1}{p} < \varepsilon,$$

总之, 均有

$$|R(x) - 0| = R(x) < \varepsilon,$$

这说明  $R(x)$  在  $x_0$  处的极限为 0.  $\square$

**例 3.3.11.** 研究  $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  的连续性.

**解.** 我们已经知道  $f(x)$  在  $x = 0$  处无极限, 因此  $x = 0$  为  $f(x)$  的第二类间断点. 其它的点均为  $f(x)$  的连续点.  $\square$

下面的结果说明单调函数在定义域内部的间断点都是跳跃间断点.

**命题 3.3.3.** 设  $f(x)$  是区间  $(a, b)$  中的单调函数,  $x_0 \in (a, b)$ . 如果  $x_0$  为  $f(x)$  的间断点, 则  $x_0$  是跳跃间断点.

**证明.** 由单调性知  $f(x)$  在  $x_0$  处的左极限和右极限都存在且有限, 当  $f$  单调递增时, 有

$$f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0),$$

当  $f$  单调递减时, 有

$$f(x_0 - 0) \geq f(x_0) \geq f(x_0 + 0).$$

因此, 如果  $x_0$  为  $f(x)$  的间断点, 则  $x_0$  必为跳跃间断点.  $\square$

**命题 3.3.4.** (\*) 设  $f(x)$  是定义在区间  $I$  中的单调函数, 则  $f(x)$  的间断点为至多可数多个.

**证明.** 不妨设  $f(x)$  单调递增, 且  $I$  为开区间. 假设  $x_1 < x_2$  为间断点, 则

$$f(x_1 - 0) \leq f(x_1) \leq f(x_1 + 0) \leq f(x_2 - 0) \leq f(x_2) \leq f(x_2 + 0).$$

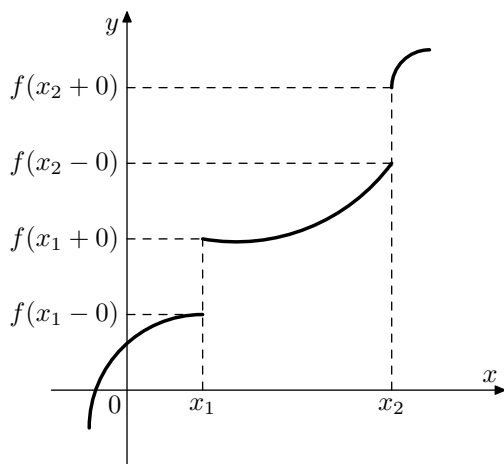


图 3.3 单调函数的间断点

因此, 区间  $(f(x_1 - 0), f(x_1 + 0))$  和  $(f(x_2 - 0), f(x_2 + 0))$  不相交. 如果我们把每一个间断点  $x$  均对应到开区间  $(f(x - 0), f(x + 0))$ , 则这些开区间互不相交. 这样的开区间只有至多可数多个, 因此  $f(x)$  的间断点也至多可数.  $\square$

从以上命题的证明可以得到

**命题 3.3.5.** 设  $f(x)$  是定义在区间  $I$  中的严格单调函数, 则  $f(x)$  连续当且仅当  $f(I)$  也是区间.

**证明.** 不妨设  $f(x)$  严格单调递增. 如果  $f(I)$  为区间, 则  $f(x)$  没有间断点, 这是因为间断点  $x_0$  对应的区间  $(f(x_0 - 0), f(x_0 + 0))$  不在值域内, 从而会分割值域. 即值域为区间时  $f$  是连续的.

如果  $f$  连续, 则由下一节的介值定理知  $f(I)$  为区间.  $\square$

**推论 3.3.6.** 定义在区间  $I$  中的严格单调连续函数  $f(x)$  一定是可逆的, 且其逆也是严格单调连续的.

**证明.** 不妨设  $f(x)$  严格单调递增. 由上一命题知  $f(I) = J$  是区间. 因为映射  $f: I \rightarrow J$  是一一映射, 故它是可逆的. 设  $y_1 < y_2 \in J$ , 记  $x_1 = f^{-1}(y_1)$ ,  $x_2 = f^{-1}(y_2)$ . 如果  $x_1 \geq x_2$ , 则因为  $f$  单调递增, 故  $y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$ , 这就得到矛盾. 这说明

$$x_1 = f^{-1}(y_1) < x_2 = f^{-1}(y_2),$$

因此  $f^{-1}$  是  $J$  上的严格单调递增函数. 因为  $f^{-1}(J) = I$  为区间, 由上一命题即知  $f^{-1}$  连续.  $\square$

**注.** 利用下一节的介值定理可以证明, 区间上的连续函数可逆当且仅当它是严格单调的.

**定理 3.3.7.** 初等函数在其定义域内均为连续函数.

**证明.** 我们已经证明了常值函数, 三角函数, 幂函数, 指数函数与对数函数在其定义域内是连续的. 根据上面的推论, 反三角函数在其定义域内也是连续的. 这些基本初等函数在四则运算以及复合之下也都是连续函数.  $\square$

利用初等函数的连续性, 求函数极限的时候通常就可以直接代入定义域内的变量值来计算.

**例 3.3.12.** 求函数  $f(x) = \left(\frac{2+x}{1+x}\right)^{1+\sqrt{1+\sqrt{2x-1}}}$  在  $x_0 = 1$  处的极限.

**解.**  $f(x)$  是连续函数, 因此

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = \left(\frac{3}{2}\right)^{1+\sqrt{1+\sqrt{2-1}}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{1+\sqrt{2}}.$$

## 习题 3.3

1. 研究下列函数在  $x = 0$  处的连续性:

$$(1) f(x) = \sqrt{|x|}, \quad (2) f(x) = \sin([x]), \quad (3) f(x) = \frac{[x] \ln(1+x)}{1 + \sin x}.$$

2. 研究下列函数的连续性:

$$(1) f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases} \quad (2) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sin x}, & x \neq k\pi, \\ 1, & x = k\pi. \end{cases}$$

3. 求下列函数的间断点并判断间断点的类型:

$$(1) f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ 为有理数}, \\ -x, & x \text{ 为无理数}. \end{cases} \quad (2) f(x) = \begin{cases} (1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

4. 求下列函数的间断点并判断间断点的类型:

$$(1) f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \quad (2) f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x), & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

5. 求  $a, b, c$  的值, 使得下面的函数是连续函数:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq -1, \\ ax^2 + bx + c, & |x| < 1, x \neq 0, \\ 2, & x = 0, \\ 3, & x \geq 1. \end{cases}$$

6. 证明, 如果  $f^2$  为连续函数, 则  $|f|$  也是连续函数.

7. 设函数  $f(x)$  在  $x_0$  处连续, 且  $f(x_0) > 0$ , 证明, 存在  $\delta > 0$ , 当  $|x - x_0| \leq \delta$  时  $f(x) > \frac{1}{2}f(x_0)$ .

8. 证明, 如果一个连续函数在有理数上取值为零, 则它恒为零; 两个连续函数如果在有理点上取值相同, 则它们是相等的函数. (提示: 无理数可以用有理数逼近.)



9. 设  $f(x)$  为  $[a, b]$  上的连续函数, 且任给  $x \in [a, b]$ , 均存在  $y \in [a, b]$ , 使得

$$f(y) \leq \frac{1}{2}f(x),$$

证明, 存在  $\xi \in [a, b]$ , 使得  $f(\xi) \leq 0$ .

10. 设  $f(x)$  为连续函数,  $c > 0$  为任意给定的常数, 证明函数

$$f_c(x) = \begin{cases} -c, & \text{当 } f(x) < -c \text{ 时,} \\ f(x), & \text{当 } |f(x)| \leq c \text{ 时,} \\ c, & \text{当 } f(x) > c \text{ 时} \end{cases}$$

也是连续函数.

11. 设  $f$  为  $[a, b]$  上的连续函数, 定义

$$M(x) = \sup_{a \leq t \leq x} f(t), \quad m(x) = \inf_{a \leq t \leq x} f(t), \quad x \in [a, b],$$

则  $M(x)$  和  $m(x)$  也是  $[a, b]$  上的连续函数.

12. (\*) 设  $f(x)$  为  $[0, 1]$  上的连续函数, 且存在  $\alpha > 0$ , 使得

$$|f(2x) - f(x)| \leq x^\alpha, \quad \forall x \in [0, 1],$$

证明, 存在常数  $C$ , 使得

$$|f(x) - f(0)| \leq Cx^\alpha, \quad \forall x \in [0, 1].$$

13. (\*) 设  $f(x)$  是  $(a, b)$  中定义的无第二类间断点的函数, 如果对任意的两点  $x, y \in (a, b)$ , 均有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[f(x) + f(y)],$$

则  $f$  为  $(a, b)$  中的连续函数.

14. (\*) 设  $\mathbb{R}$  上定义的函数  $f$  满足条件

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

则当  $f$  连续或单调时, 必存在常数  $c$ , 使得  $f(x) = cx, \forall x \in \mathbb{R}$ .

15. (\*) 设  $f$  为  $\mathbb{R}$  上的连续函数, 如果对任意的  $x, y \in \mathbb{R}$  均有  $f(x+y) = f(x)f(y)$ , 则要么  $f$  恒为零, 要么存在常数  $a > 0$ , 使得  $f(x) = a^x, \forall x \in \mathbb{R}$ .

### §3.4 闭区间上连续函数的性质

前面一节已经涉及到在区间上定义的连续函数的性质, 我们现在做进一步的研究. 我们将会发现, 函数的性质密切依赖于实数系的基本性质.

#### §3.4.1 最值定理和介值定理

连续函数的性质实际上是实数系的基本性质的某种反映. 对于本节中的几个重要定理, 我们一般给出两个不同的证明, 读者可以从中体会关于实数性质的基本结果是如何运用来研究连续函数的.

**定理 3.4.1 (有界性定理).** 设  $f(x)$  为闭区间  $[a, b]$  上的连续函数, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界.

**证明.** 我们用两种方法来证明.

**证法一:** 用反证法. 假设  $f(x)$  无界, 则存在点列  $\{x_n\} \subset [a, b]$ , 使得

$$|f(x_n)| \geq n, \quad n = 1, 2, \dots$$

因为  $\{x_n\}$  为有界点列, 故存在收敛子列  $\{x_{n_i}\}$ , 使得

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_i} = x_0 \in [a, b].$$

又因为  $f(x)$  在  $x_0$  处连续, 故

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f(x_{n_i}) = f(x_0).$$

特别地,  $\{f(x_{n_i})\}$  是有界点列, 这和  $|f(x_{n_i})| \geq n_i$  ( $\forall i \geq 1$ ) 相矛盾.

**证法二:** 任取  $x \in [a, b]$ , 因为  $f$  在  $x$  处连续, 故存在  $\delta_x > 0$ , 使得

$$|f(x') - f(x)| \leq 1, \quad \forall x' \in (x - \delta_x, x + \delta_x) \cap [a, b].$$

区间族  $\{(x - \delta_x, x + \delta_x)\}_{x \in [a, b]}$  组成了闭区间  $[a, b]$  的一个开覆盖, 因此存在有限子覆盖, 记为

$$\{(x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x_i}), \quad i = 1, 2, \dots, k\}.$$

令  $M = \max_{1 \leq i \leq k} \{|f(x_i)| + 1\}$ . 任取  $x \in [a, b]$ , 设  $x \in (x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x_i})$ , 则

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i)| \leq 1 + |f(x_i)| \leq M,$$

这说明  $f(x)$  是有界的. □

**注.** 闭区间的条件不能减弱, 例如函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  在  $(0, 1]$  上连续, 但无界.

**定理 3.4.2** (最值定理). 设  $f(x)$  为闭区间  $[a, b]$  上的连续函数, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上必取到最大值和最小值, 即存在  $x_*, x^* \in [a, b]$ , 使得

$$f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*), \quad \forall x \in [a, b].$$

**证明.** 我们用两种方法证明.

**证法一:** 根据有界性定理,  $f(x)$  有界, 因此  $f([a, b])$  必有上确界和下确界. 记上确界为  $M$ , 则存在点列  $\{x_n\} \subset [a, b]$ , 使得

$$M - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq M.$$

根据夹逼原理,  $f(x_n) \rightarrow M$  ( $n \rightarrow \infty$ ). 因为  $\{x_n\}$  为有界点列, 故存在收敛子列  $\{x_{n_i}\}$ , 使得

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_i} = x^* \in [a, b].$$

因为  $f(x)$  在  $x^*$  处连续, 故  $f(x_{n_i}) \rightarrow f(x^*)$  ( $i \rightarrow \infty$ ). 这说明  $M = f(x^*)$ ,  $M$  即为  $f(x)$  的最大值. 同理可证最小值可以取到, 或考虑  $-f$  的最大值即可.

**证法二:** 用反证法. 设  $M$  为  $f$  的上确界, 但  $f(x) \neq M, \forall x \in [a, b]$ . 考虑函数

$$F(x) = \frac{1}{M - f(x)}, \quad x \in [a, b].$$

$F(x)$  是  $[a, b]$  上的正的连续函数. 由有界性定理, 存在正数  $K > 0$ , 使得  $F(x) \leq K$ . 从而

$$f(x) \leq M - \frac{1}{K}, \quad \forall x \in [a, b].$$

这与  $M$  为  $f$  的上确界相矛盾, 因此  $M$  必被  $f(x)$  取到. 下确界的情形同理可证.  $\square$

**注.** 闭区间的条件不能减弱, 如  $f(x) = x, x \in (0, 1]$  是连续的, 但在  $(0, 1]$  上达不到最小值.

**定理 3.4.3** (零值定理, Bolzano). 设  $f(x)$  为闭区间  $[a, b]$  上的连续函数, 且  $f(a)f(b) < 0$ , 则存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f(\xi) = 0$ .

**证明.** 我们用两种方法证明.

**证法一:** 用闭区间套原理. 不妨设  $f(a) < 0, f(b) > 0$ . (反证法) 假设  $f(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$ . 将  $[a, b]$  二等分, 如果  $f(\frac{a+b}{2}) > 0$ , 则取  $a_1 = a, b_1 = \frac{a+b}{2}$ ; 如果  $f(\frac{a+b}{2}) < 0$ , 则取  $a_1 = \frac{a+b}{2}, b_1 = b$ , 总之  $f(a_1) < 0, f(b_1) > 0$ . 再将  $[a_1, b_1]$  二等分, 用  $[a_2, b_2]$  表示满足  $f(a_2) < 0, f(b_2) > 0$  的那一半小区间. 如此继续, 我们得到闭区间套

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots,$$

满足  $f(a_n) < 0$ ,  $f(b_n) > 0$ , 且

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

由闭区间套原理, 存在  $x_0 \in [a, b]$ , 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x_0.$$

根据  $f$  的连续性, 有

$$0 \geq \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq 0,$$

从而  $f(x_0) = 0$ . 显然  $x_0 \neq a, b$ , 这就导出了矛盾.

**证法二:** 不妨设  $f(a) < 0$ ,  $f(b) > 0$ . 令

$$A = \{x \in [a, b] \mid f(x) < 0\},$$

则  $a \in A$ . 记  $\xi$  为  $A$  的上确界, 由  $f$  的连续性易见  $\xi > a$ . 由确界的定义, 存在  $x_n \in [a, b]$ , 使得  $f(x_n) < 0$ ,  $x_n \rightarrow \xi$ . 因此

$$f(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq 0,$$

特别地,  $\xi < b$ . 由  $A$  的定义知  $f$  在  $(\xi, b]$  上非负, 由  $f$  的连续性知  $f(\xi) \geq 0$ , 这说明  $f(\xi) = 0$ . 显然  $\xi \in (a, b)$ .  $\square$

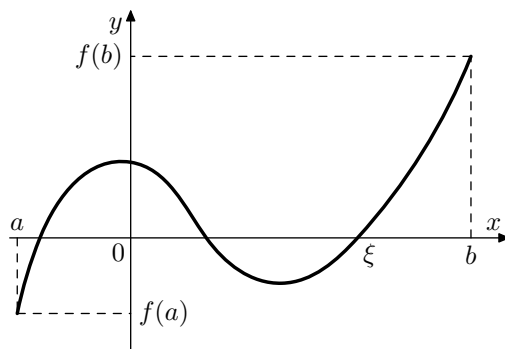


图 3.4 零值定理

**注.** 如果条件改为  $f(a)f(b) \leq 0$ , 则存在  $\xi \in [a, b]$ , 使得  $f(\xi) = 0$ . 事实上, 如果  $f(a)f(b) = 0$ , 则  $f(a) = 0$  或  $f(b) = 0$ , 从而取  $\xi = a$  或  $\xi = b$  即可; 当  $f(a)f(b) < 0$  时用零值定理的结论即可.

**定理 3.4.4 (介值定理).** 设  $f(x)$  为  $[a, b]$  上的连续函数,  $\mu$  是严格介于  $f(a)$  和  $f(b)$  之间的数, 则存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f(\xi) = \mu$ .

**证明.** 设  $\mu$  是严格介于  $f(a)$  和  $f(b)$  之间的数, 则  $(f(a) - \mu)(f(b) - \mu) < 0$ . 因此, 由零值定理, 连续函数  $f(x) - \mu$  在  $(a, b)$  内存在零点  $\xi$ , 即  $f(\xi) = \mu$ .  $\square$

**推论 3.4.5.** 设  $f(x)$  是  $[a, b]$  上的连续函数, 则  $f([a, b]) = [m, M]$ , 其中  $m, M$  分别是  $f$  在  $[a, b]$  上的最小值和最大值.

**证明.** 当  $m = M$  时  $f(x)$  为常值函数, 结论自然成立. 设  $m < M$ . 显然,  $f([a, b]) \subset [m, M]$ . 另一方面, 由最值定理, 存在  $x_*, x^*$ , 使得  $f(x_*) = m, f(x^*) = M$ . 由介值定理, 介于  $m$  和  $M$  之间的值也能被  $f(x)$  取到, 因此  $[m, M] \subset f([a, b])$ . 这说明  $f([a, b]) = [m, M]$ .  $\square$

**推论 3.4.6.** 设  $f(x)$  是区间  $I$  中的连续函数, 则  $f(I)$  也是区间 (可退化为一).  
点).

**证明.** 如果  $f(x)$  为常值函数, 则  $f(I)$  退化为一. 否则, 任取  $y_1 < y_2 \in f(I)$ , 设  $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$ , 在以  $x_1, x_2$  为端点的闭区间上用介值定理, 我们就知道  $[y_1, y_2] \subset f(I)$ . 由  $y_1, y_2$  的任意性知  $f(I)$  为一个区间.  $\square$

**推论 3.4.7.** 设  $f(x)$  是区间  $I$  中的连续函数, 则  $f(x)$  可逆当且仅当  $f(x)$  是严格单调函数.

**证明.** 只要证明必要性就可以了. 设  $x_1 < x_2 \in I$ . 因为  $f(x)$  可逆, 故  $f(x_1) \neq f(x_2)$ . 如果  $f(x_1) < f(x_2)$ , 我们将证明  $f(x)$  在  $[x_1, x_2]$  上是严格单调递增的. (反证法) 设  $x' < x'' \in [x_1, x_2]$ ,  $f(x') \geq f(x'')$ . 分情况讨论:

(1)  $f(x'') < f(x_1)$ . 这时  $f(x'') < f(x_1) < f(x_2)$ , 由介值定理, 存在  $\xi \in [x'', x_2]$ , 使得  $f(\xi) = f(x_1)$ , 这与  $f(x)$  可逆相矛盾;

(2)  $f(x'') > f(x_1)$ . 这时  $f(x') \geq f(x'') > f(x_1)$ , 由介值定理, 存在  $\xi \in [x_1, x']$ , 使得  $f(\xi) = f(x'')$ , 这与  $f(x)$  可逆相矛盾.

如果  $f(x_1) > f(x_2)$ , 完全类似地可以证明  $f(x)$  在  $[x_1, x_2]$  上是严格单调递减的. 总之,  $f(x)$  在任何闭区间上都是严格单调的, 从而不难得出  $f(x)$  在  $I$  中是严格单调的.  $\square$

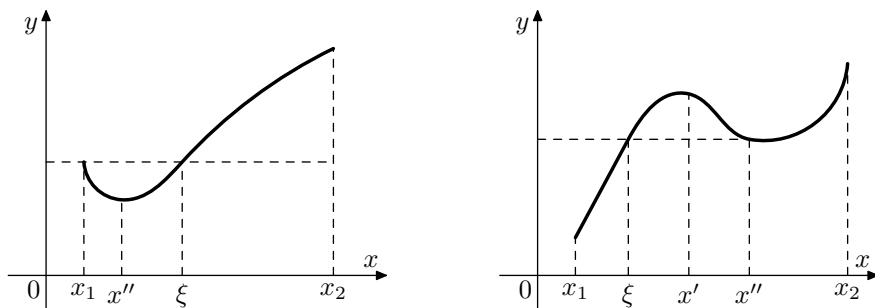


图 3.5 单调函数与可逆性质

**例 3.4.1.** 设  $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$  为连续函数, 则存在  $\xi \in [a, b]$ , 使得  $f(\xi) = \xi$ .

**证明.** 考虑函数  $F(x) = f(x) - x$ ,  $x \in [a, b]$ .  $F(x)$  仍为连续函数, 且

$$F(a)F(b) = (f(a) - a)(f(b) - b) \leq 0,$$

由零值定理及其注记知, 存在  $\xi \in [a, b]$ , 使得  $F(\xi) = 0$ , 此时  $f(\xi) = \xi$ . □

**例 3.4.2.** 证明奇数次的实系数多项式必有实根.

**证明.** 设  $P(x) = a_0x^{2n-1} + a_1x^{2n-2} + \cdots + a_{2n-2}x + a_{2n-1}$  是次数为  $2n-1$  ( $n \geq 1$ ) 的多项式,  $a_i \in \mathbb{R}$  ( $0 \leq i \leq 2n-1$ ),  $a_0 \neq 0$ . 不妨设  $a_0 > 0$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{x^{2n-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_{2n-1}}{x^{2n-1}} \right) = a_0 > 0,$$

从而存在  $x_1 < 0 < x_2 \in \mathbb{R}$ , 使得

$$\frac{P(x_1)}{x_1^{2n-1}} > 0, \quad \frac{P(x_2)}{x_2^{2n-1}} > 0,$$

此时  $P(x_1) < 0$ ,  $P(x_2) > 0$ . 因为多项式是连续函数, 由零值定理, 存在  $\xi \in (x_1, x_2)$ , 使得  $P(\xi) = 0$ . □

### §3.4.2 一致连续性

闭区间上的连续函数的另一条重要性质就是所谓的一致连续性.

**定义 3.4.1** (一致连续). 设函数  $f(x)$  定义在区间  $I$  中, 如果任给  $\varepsilon > 0$ , 均存在  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , 使得当  $x_1, x_2 \in I$ , 且  $|x_1 - x_2| < \delta$  时有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon,$$

则称  $f(x)$  在  $I$  中一致连续.

**注.** (1) 显然, 一致连续函数一定是连续函数. 一致连续性和连续性的区别就是, 用  $\varepsilon - \delta$  语言定义  $x_0$  处的连续性时, 定义中出现的  $\delta$  一般会依赖于连续点  $x_0$  以及  $\varepsilon$ , 而一致连续性定义中出现的  $\delta$  是不依赖于具体连续点的, 即对所有的连续点都能取到一个公共的  $\delta$ , 一致性就体现在这儿.

(2) 用逆反命题的形式改写定义, 就得到:  $f(x)$  在  $I$  中不一致连续当且仅当存在  $\varepsilon_0 > 0$ , 以及  $I$  中点列  $\{a_n\}, \{b_n\}$ , 使得  $a_n - b_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ), 且

$$|f(a_n) - f(b_n)| \geq \varepsilon_0.$$

**例 3.4.3.** 研究函数  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$  的一致连续性.

解. 取  $a_n = \frac{1}{2n\pi}$ ,  $b_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ ,  $\forall n \geq 1$ . 则

$$a_n - b_n = \frac{1}{2n\pi} - \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2n(4n+1)\pi} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

且有

$$|f(a_n) - f(b_n)| = 1, \quad \forall n \geq 1.$$

因此  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  中不是一致连续的. 利用下面的命题 3.4.8 可以说明, 对任意  $\delta > 0$ ,  $f(x)$  在  $[\delta, +\infty)$  中都是一致连续的.  $\square$

**例 3.4.4.** 研究函数  $f(x) = \sin x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  的一致连续性.

解. 任给  $\varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \varepsilon$ . 当  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , 且  $|x_1 - x_2| < \delta$  时, 有

$$\begin{aligned} |\sin x_1 - \sin x_2| &= \left| 2 \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \right| \\ &\leq 2 \left| \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \right| \\ &\leq |x_1 - x_2| < \varepsilon. \end{aligned}$$

这说明  $\sin x$  在  $(-\infty, +\infty)$  中是一致连续的.  $\square$

$\sin x$  是所谓 Lipschitz 函数的特殊情形.

**例 3.4.5.** 设  $f(x)$  是定义在区间  $I$  中的函数. 如果存在  $0 < \alpha \leq 1$ , 以及常数  $M$ , 使得

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|^\alpha, \quad \forall x_1, x_2 \in I,$$

则称  $f(x)$  是  $I$  中的  $\alpha$  阶 Hölder 函数. 当  $\alpha = 1$  时也称为 Lipschitz 函数.

Hölder 函数都是一致连续的: 任给  $\varepsilon > 0$ , 取

$$\delta = \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

则当  $x_1, x_2 \in I$ ,  $|x_1 - x_2| < \delta$  时, 有

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|^\alpha < M\left(\frac{\varepsilon}{M}\right) = \varepsilon.$$

下面的命题是关于一致连续函数性质的, 其证明留作习题.

**命题 3.4.8.** 设  $f(x)$ ,  $g(x)$  为区间  $I$  中的一致连续函数. 则

- (1)  $\alpha f(x) + \beta g(x)$  在  $I$  中也是一致连续的;
- (2) 如果  $f(x)$ ,  $g(x)$  为有界函数, 则  $f(x)g(x)$  也是一致连续的;
- (3) 如果  $f(x)$  有界, 且存在  $\varepsilon_0 > 0$ , 使得  $g(x) \geq \varepsilon_0$ ,  $\forall x \in I$ , 则  $f(x)/g(x)$  也是一致连续的;
- (4) 一致连续函数的复合函数仍为一致连续函数.

**定理 3.4.9** (Cantor). 闭区间上的连续函数是一致连续的.

**证明.** 我们用两种方法证明. 设  $f(x)$  是  $[a, b]$  上的连续函数.

**证法一:** (反证法) 如果  $f(x)$  不是一致连续的, 则存在  $\varepsilon_0 > 0$ , 以及点列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\} \subset [a, b]$ , 使得  $a_n - b_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ), 且

$$|f(a_n) - f(b_n)| \geq \varepsilon_0.$$

因为  $\{b_n\}$  为有界点列, 故存在收敛子列  $\{b_{n_i}\}$ , 设  $b_{n_i} \rightarrow x_0 \in [a, b]$ . 此时

$$a_{n_i} = (a_{n_i} - b_{n_i}) + b_{n_i} \rightarrow 0 + x_0 = x_0 \quad (i \rightarrow \infty).$$

因为  $f(x)$  在  $x_0$  处连续, 故

$$\varepsilon_0 \leq |f(a_{n_i}) - f(b_{n_i})| \rightarrow |f(x_0) - f(x_0)| = 0 \quad (i \rightarrow \infty),$$

这就导出了矛盾.

**证法二:** 任给  $\varepsilon > 0$ , 因为  $f(x)$  连续, 故对于任意  $x \in [a, b]$ , 存在  $\delta_x > 0$ , 使得

$$|f(x') - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x' \in (x - \delta_x, x + \delta_x) \cap [a, b].$$

显然,  $\{(x - \frac{\delta_x}{2}, x + \frac{\delta_x}{2})\}_{x \in [a, b]}$  为闭区间  $[a, b]$  的一个开覆盖, 因而存在有限子覆盖, 即存在  $x_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ), 使得

$$[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^k (x_i - \frac{\delta_{x_i}}{2}, x_i + \frac{\delta_{x_i}}{2}).$$

记

$$\delta = \min \left\{ \frac{\delta_{x_i}}{2} \mid i = 1, 2, \dots, k \right\},$$

则对于任意的  $x', x'' \in [a, b]$ , 如果  $|x' - x''| < \delta$ , 设

$$x' \in (x_i - \frac{\delta_{x_i}}{2}, x_i + \frac{\delta_{x_i}}{2}), \quad (\text{对某个 } i)$$

则

$$|x'' - x_i| \leq |x'' - x'| + |x' - x_i| < \delta + \frac{\delta_{x_i}}{2} \leq \delta_{x_i},$$

从而有  $x'' \in (x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x_i})$ . 因此, 我们有

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x'')| \leq 2 \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

这说明  $f(x)$  在  $[a, b]$  上是一致连续的. □

最后, 我们引进函数振幅的概念, 并利用它来刻画连续性和一致连续性. 某个变化量的振幅, 是指其“最大”和“最小”值的差. 如果这个变化量的值趋于一个定数, 则其振幅应趋于零. 我们在第二章研究数列极限的时候就曾经用过这种方法, 现在只不过将这种方法用于考察函数的连续性而已.



**定义 3.4.2** (振幅). 设  $f(x)$  在  $x_0$  的一个开邻域内有定义, 称

$$\omega_f(x_0, r) = \sup \{ |f(x') - f(x'')| \mid x', x'' \in (x_0 - r, x_0 + r) \} \quad (r > 0)$$

为  $f$  在区间  $(x_0 - r, x_0 + r)$  上的振幅. 显然,  $\omega_f(x_0, r)$  关于  $r \rightarrow 0^+$  单调递减, 因此

$$\omega_f(x_0) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \omega_f(x_0, r)$$

存在 (不一定有限), 称为  $f$  在  $x_0$  处的振幅.

注. (1)  $\omega_f(x_0, r)$  也可以定义为

$$\omega_f(x_0, r) = \sup_{x \in (x_0 - r, x_0 + r)} f(x) - \inf_{x \in (x_0 - r, x_0 + r)} f(x),$$

请读者自行验证两种定义的等价性.

(2) 也可类似地对闭区间以及  $x_0$  的一侧定义函数的振幅.

**例 3.4.6.** 研究函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

在  $x = 0$  处的振幅.

**解.** 因为

$$\omega_f(0, \frac{1}{n}) = n \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty),$$

故  $f$  在  $x = 0$  处的振幅为  $+\infty$ . □

**例 3.4.7.** 研究函数

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

在  $x = 0$  处的振幅.

**解.** 因为  $|f(x)| \leq 1$ , 故  $\omega_f(0) \leq 2$ . 另一方面, 对  $n \geq 1$ , 取

$$a_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, \quad b_n = \frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}},$$

则  $a_n, b_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ), 且

$$|f(a_n) - f(b_n)| = |1 - (-1)| = 2,$$

故  $f$  在  $x = 0$  处的振幅为 2. □

一般地, 不难看出,  $f(x)$  在  $x_0$  附近有界当且仅当  $\omega_f(x_0)$  是有限数. 下面的结果可以跟定理 2.2.3 对照起来看.

**命题 3.4.10.**  $f(x)$  在  $x_0$  处连续当且仅当  $\omega_f(x_0) = 0$ .

**证明.** 设  $f(x)$  在  $x_0$  处连续. 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 当  $|x - x_0| < \delta$  时

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此, 对于  $\forall x', x'' \in (x_0 - r, x_0 + r)$  ( $0 < r \leq \delta$ ), 有

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x'')| < 2 \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

即当  $0 < r \leq \delta$  时

$$\omega_f(x_0, r) \leq \varepsilon.$$

这说明  $\omega_f(x_0) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \omega_f(x_0, r) = 0$ .

反之, 设  $\lim_{r \rightarrow 0^+} \omega_f(x_0, r) = \omega_f(x_0) = 0$ , 则任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得

$$\omega_f(x_0, r) < \varepsilon, \quad \forall 0 < r \leq \delta.$$

特别地, 对于满足  $|x - x_0| < \delta$  的点  $x$ , 有

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \omega_f(x_0, \delta) < \varepsilon,$$

这说明  $f(x)$  在  $x_0$  处连续. □

我们可以类似地用振幅来刻画一致连续性. 设  $f$  定义在区间  $I$  中,  $r > 0$ . 令

$$\omega_f(r) = \sup \{|f(x') - f(x'')| \mid \forall x', x'' \in I, |x' - x''| < r\},$$

则  $\omega_f(r)$  关于  $r \rightarrow 0^+$  单调递减. 利用一致连续的定义可得

**命题 3.4.11.**  $f$  在  $I$  中一致连续当且仅当  $\lim_{r \rightarrow 0^+} \omega_f(r) = 0$ .

### 习题 3.4

1. 设  $f$  在  $[a, +\infty)$  中连续, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ , 则  $f$  在  $[a, +\infty)$  中有界, 且最大值和最小值中的一个必定能被  $f$  达到.
2. 证明, 如果  $f$  为  $[a, b]$  上连续函数, 且  $f(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$ . 则  $f$  在  $[a, b]$  上恒正或恒负, 且存在常数  $c > 0$ , 使得  $|f(x)| \geq c, \forall x \in [a, b]$ .
3. 设  $f(x)$  为  $[a, b]$  上的连续函数,  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 为  $[a, b]$  中的点. 则存在  $\xi \in [a, b]$ , 使得

$$f(\xi) = \frac{1}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)].$$

4. 设  $f$  在  $(a, b)$  中连续, 且  $f(a+0)f(b-0) < 0$ , 则存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f(\xi) = 0$ .
5. 证明方程  $x \sin x = 1$  有无穷多个解.
6. 证明三次多项式  $x^3 + 2x - 1$  只有惟一的实根, 且此根位于区间  $(0, 1)$  内.
7. 设  $f(x) = P(x)$  是奇数次实系数多项式. 证明,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  是满射.
8. 研究下列函数的一致连续性:

$$(1) \sqrt{x}, x \geq 0, \quad (2) x \cos \frac{1}{x}, x > 0, \quad (3) \cos(x^2), x \in \mathbb{R}.$$

9. 设  $f(x)$  为  $[a, +\infty)$  中的连续函数, 极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$  存在且有限. 证明  $f$  在  $[a, +\infty)$  中一致连续. (提示: 闭区间上一致连续, 无穷远有极限.)
10. 设  $f(x)$  为  $(a, b)$  中的连续函数. 证明,  $f(x)$  在  $(a, b)$  中一致连续当且仅当  $f$  在  $a$  处的右极限以及在  $b$  处的左极限均存在且有限. (提示: Cauchy 准则.)
11. 设  $f(x)$  为  $(a, b)$  中的有界函数,  $\delta > 0$ . 则有

$$\{x \in (a, b) \mid \omega_f(x) \geq \delta\} = \{x \in (a, b) \mid \forall r > 0, \text{ 均有 } \omega_f(x, r) \geq \delta\},$$

以及

$$\{x \in (a, b) \mid \omega_f(x) < \delta\} = \{x \in (a, b) \mid \text{存在 } r > 0, \text{ 使得 } \omega_f(x, r) < \delta\},$$

由此说明  $\{x \in (a, b) \mid \omega_f(x) < \delta\}$  是开集.

12. (\*) 设  $f$  为给定的有界函数. 证明振幅函数  $\omega_f(x)$  关于  $x$  是上半连续的.
13. 设  $f$  为  $\mathbb{R}$  上的连续函数, 且  $f(f(x)) = x$ . 证明, 存在  $\xi \in \mathbb{R}$ , 使得  $f(\xi) = \xi$ .
14. 设  $f(x)$  为  $\mathbb{R}$  上连续函数, 且  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(f(x)) = \infty$ , 证明  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ .
15. 是否存在  $\mathbb{R}$  上的连续函数  $f(x)$ , 使得  $f(f(x)) = e^{-x}$ ? (提示: 先证  $f$  单调.)
16. (\*) 设  $f(x)$  为  $[0, 1]$  上的连续函数,  $f(0) = f(1)$ . 证明, 对任意正整数  $n$ , 均存在  $\xi_n \in [0, 1]$ , 使得

$$f(\xi_n) = f\left(\xi_n + \frac{1}{n}\right).$$

17. (\*) 证明,  $\mathbb{R}$  上连续的周期函数是一致连续的; 利用这个结论说明  $\sin(x^2)$  不是周期函数.
18. (\*) 设  $a > 0$ ,  $f(x)$  为  $[a, +\infty)$  中的 Lipschitz 函数. 证明  $\frac{f(x)}{x}$  为  $[a, +\infty)$  中的一致连续函数.

## §3.5 连续函数的积分

现在我们介绍关于连续函数的不属于初等四则运算的一个新的运算, 叫做积分. 许多实际的应用问题都涉及到积分, 例如已知运动质点的速度求位移, 求曲线的长度, 求平面图形的面积, 求立体图形的体积等等都可以转化为相应的积分问题. 积分的内容占据了本课程的半壁江山, 在本节之中我们将介绍闭区间上连续函数的积分, 一般函数的积分请见第六章和第七章, 以及后面多元函数积分的章节.

## §3.5.1 积分的定义

设  $f$  为闭区间  $[a, b]$  上的连续函数, 我们考虑由  $f$  的图像, 直线  $x = a$ ,  $x = b$  以及  $y = 0$  ( $x$  轴) 在平面上所围成的曲边梯形的“面积”, 我们用记号  $\int_a^b f(x)dx$  表示这个“面积”的值, 称为  $f$  在  $[a, b]$  上的积分.

(1) 设  $f(x) \equiv c$  为常值函数, 则所求面积是矩形的面积, 因此自然地定义

$$\int_a^b f(x)dx = c(b-a).$$

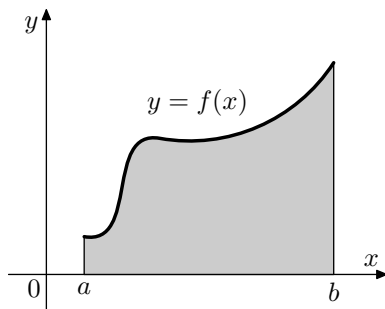


图 3.6 曲边梯形

(2) 设  $f(x)$  为  $[a, b]$  上的线性函数, 则所求面积是一个梯形的面积, 因此定义

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}[f(a) + f(b)](b-a).$$

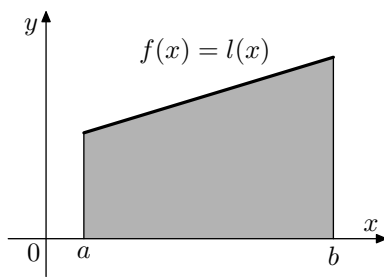
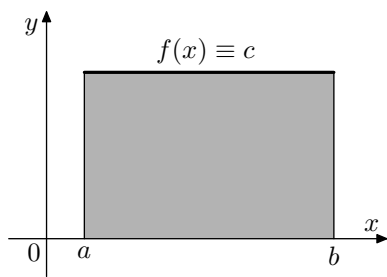


图 3.7 矩形和梯形

当  $f$  为常值函数时, 这个定义和 (1) 是一致的. 并且, 从定义可得

- 如果  $f, g$  均为线性函数, 则

$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x) + g(x)]dx &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx, \\ \int_a^b [f(x) - g(x)]dx &= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx,\end{aligned}$$

这可从定义直接得到.

- 如果  $f$  为线性函数, 且存在常数  $M$ , 使得  $|f(x)| \leq M, \forall x \in [a, b]$ , 则

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M(b-a).$$

事实上, 由定义, 有

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \frac{1}{2}[f(a) + f(b)](b-a) \right| \leq \frac{1}{2}[|f(a)| + |f(b)|](b-a) \leq M(b-a).$$

- 如果  $f$  为线性函数,  $c \in (a, b)$ , 则

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

这是因为,  $[a, b]$  上的线性函数  $f(x)$  可以写为

$$f(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) \quad \text{或} \quad f(x) = f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-b),$$

因此有

$$\begin{aligned} \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx &= \frac{1}{2}[f(a) + f(c)](c-a) + \frac{1}{2}[f(c) + f(b)](b-c) \\ &= \frac{1}{2}\left[f(a) + f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(c-b)\right](c-a) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[f(a) + f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(c-a)\right](b-c) \\ &= \frac{1}{2}[f(a) + f(b)](c-a) + \frac{1}{2}[f(a) + f(b)](b-c) \\ &= \frac{1}{2}[f(a) + f(b)](b-a) \\ &= \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

(3) 设  $f(x)$  为  $[a, b]$  上连续的分段线性函数, 即存在区间  $[a, b]$  中的分点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

使得  $f(x)$  在每一个小区间  $[x_{i-1}, x_i]$  上均为线性函数, 则定义

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx,$$

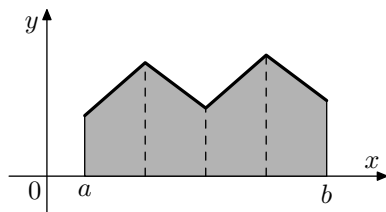


图 3.8 分段线性函数的积分

这个定义是恰当的: 如果存在  $[a, b]$  的另外一些分点

$$a = x'_0 < x'_1 < \cdots < x'_m = b$$

使得  $f(x)$  在每一个小区间  $[x'_{i-1}, x'_i]$  上均为线性函数, 则所有这些分点  $\{x_i, x'_i\}$  按从小到大的顺序排列后依然将  $[a, b]$  分割为一些小区间, 在每个小区间上  $f$  仍为线性函数, 且根据 (2) 中线性函数积分性质的第三条可知,  $f$  在这些新的小区间上的积分之和与分点  $\{x_i\}$  或  $\{x'_i\}$  分割后形成的小区间上  $f$  的积分之和是一致的.

以上说明了分段线性函数的积分与区间中分点的选取无关. 利用这一点不难看出, (2) 中线性函数积分的三条性质对于分段线性函数也完全成立.

(4) 现在假设  $f$  是  $[a, b]$  上的连续函数, 不一定是分段线性的, 我们要定义  $f$  在  $[a, b]$  上的积分. 一个自然的想法是用分段线性的函数去逼近  $f$ . 事实上, 任给正整数  $n$ , 将  $[a, b]$  作  $n$  等分, 分点为  $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$ ,  $i = 0, 1, \cdots, n$ . 在每一个小区间  $[x_{i-1}, x_i]$  上定义  $l_i(x)$  为满足条件  $l_i(x_{i-1}) = f(x_{i-1})$ ,  $l_i(x_i) = f(x_i)$  的线性函数,  $l_i(x)$  的表达式为

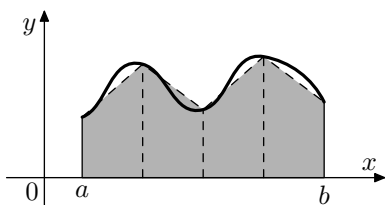


图 3.9 连续函数的积分

$$l_i(x) = f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}).$$

在  $[a, b]$  上定义连续分段线性函数  $f_n(x)$  为

$$f_n(x) = l_i(x), \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, \cdots, n.$$

**命题 3.5.1.** 设  $f, f_n$  如上, 则任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N = N(\varepsilon)$ , 当  $n > N$  时

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b].$$

**证明.** 这需要用闭区间上连续函数的一致连续性. 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得

$$|f(x') - f(x'')| \leq \varepsilon, \quad \forall |x' - x''| < \delta.$$

取正整数  $N > (b-a)/\delta$ , 则当  $n > N$  时  $\frac{1}{n}(b-a) < \delta$ . 此时, 设  $x \in [x_{i-1}, x_i]$  ( $1 \leq i \leq n$ ), 则有

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &= |f(x) - l_i(x)| \\ &= \left| f(x) - f(x_{i-1}) - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}) \right| \\ &= \left| \left( f(x) - f(x_{i-1}) \right) \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} + \left( f(x) - f(x_i) \right) \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right| \\ &\leq \varepsilon \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} + \varepsilon \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

这就证明了命题.  $\square$

利用这个命题, 当  $m, n > N$  时, 就有

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| \leq 2\varepsilon,$$

因为  $f_m(x) - f_n(x)$  也是分段线性函数, 故有

$$\left| \int_a^b f_m(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx \right| = \left| \int_a^b (f_m(x) - f_n(x)) dx \right| \leq 2\varepsilon(b-a),$$

这说明, 数列  $\left\{ \int_a^b f_n(x) dx \right\}$  是 Cauchy 列, 因此其极限存在, 我们现在就定义

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

如果  $f(x)$  本来就是  $[a, b]$  上的连续分段线性函数, 则这个定义与 (3) 中的积分定义是一致的, 我们把这个一致性的证明留给读者思考. 根据分段线性函数积分的定义,  $f$  的积分可以表示为

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left[ f\left(a + \frac{i-1}{n}(b-a)\right) + f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right) \right] \frac{1}{n}(b-a) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right)(b-a), \end{aligned} \quad (3.1)$$

注. 和式  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right)$  是一个平均数, 其极限可以认为是  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的平均值. 在这个意义下,  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的积分就等于  $f(x)$  的平均值乘以区间长度, 这是连续函数积分的几何含义.

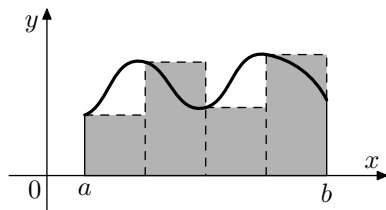


图 3.10 积分的极限表示

下面我们按照积分的定义计算两个例子.

**例 3.5.1.** 计算积分  $\int_a^b \cos x dx$ .

**解.** 将  $[a, b]$  作  $n$  等分, 利用等式

$$\sin \frac{1}{2}h \cos(a+ih) = \frac{1}{2} \left[ \sin\left(a + \left(i + \frac{1}{2}\right)h\right) - \sin\left(a + \left(i - \frac{1}{2}\right)h\right) \right]$$

以及 (3.1) 得 (其中  $h = (b-a)/n$ )

$$\begin{aligned}\int_a^b \cos x dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos \left( a + \frac{i}{n}(b-a) \right) (b-a) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2n \sin \frac{b-a}{2n}} \sum_{i=1}^n \left[ \sin \left( a + \left( i + \frac{1}{2} \right) \frac{b-a}{n} \right) - \sin \left( a + \left( i - \frac{1}{2} \right) \frac{b-a}{n} \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2n \sin \frac{b-a}{2n}} \left[ \sin \left( a + \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{b-a}{n} \right) - \sin \left( a + \frac{b-a}{2n} \right) \right] \\ &= \sin b - \sin a.\end{aligned}$$

**例 3.5.2.** 求函数  $f(x) = a^x$  在区间  $[0, 1]$  上的积分, 其中  $a > 0, a \neq 1$ .

**解.** 将  $[0, 1]$  作  $n$  等分, 利用 (3.1) 得

$$\begin{aligned}\int_0^1 a^x dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a^{\frac{i}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} a^{\frac{1}{n}} \frac{a - 1}{a^{\frac{1}{n}} - 1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} (a - 1) \frac{ta^t}{a^t - 1} = \frac{a - 1}{\ln a}.\end{aligned}$$

利用连续函数的一致连续性, 我们可以改写 (3.1). 事实上, 沿用前面的记号如  $\varepsilon, N$  等, 当  $n > N$  时, 在等分小区间  $[x_{i-1}, x_i]$  中任取一点  $\xi_i$ , 则有

$$|f(x_i) - f(\xi_i)| \leq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

因此

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)(b-a) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(b-a) \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(\xi_i)|(b-a) \leq \varepsilon(b-a),$$

这说明

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(b-a), \quad \forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]. \quad (3.2)$$

这个极限等式也可以作为积分的定义, 它的好处是无须总在小区间的端点取  $f(x)$  的值, 而极限仍然不变.

**例 3.5.3.** 求函数  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  在区间  $[a, b]$  上的积分, 其中  $b > a > 0$ .

**解.** 将  $[a, b]$  作  $n$  等分, 在区间  $[x_{i-1}, x_i]$  上取  $\xi_i = \sqrt{x_{i-1}x_i}$ , 则

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i-1}x_i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_n} \right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.\end{aligned}$$



## §3.5.2 积分的基本性质

前一小节定义了连续函数  $f$  在闭区间  $[a, b]$  上的积分, 现在我们做如下约定:

$$\int_a^a f(x)dx = 0; \quad \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

从积分定义的讨论, 特别是 (3.1) 式, 我们可以得到积分的如下简单性质:

- (线性性) 如果  $f, g$  为  $[a, b]$  上的连续函数,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , 则

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx;$$

- 如果  $|f(x)| \leq M, \forall x \in [a, b]$ , 则  $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq M(b-a)$ ;
- (保序性) 如果  $f \geq g$  为  $[a, b]$  上的连续函数, 则  $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$ ; 特别地, 由  $-|f| \leq f \leq |f|$  可得  $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ ;
- (关于区间的可加性) 设  $f$  为连续函数,  $a, b, c$  为定义域中三点, 则

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx;$$

事实上, 不妨设  $a < b < c$ . 任给  $\varepsilon > 0$ , 分别在区间  $[a, b]$ ,  $[b, c]$  上取连续的分段线性函数  $\varphi$  和  $\psi$ , 使得  $\varphi(b) = \psi(b)$ , 且

$$|f(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b]; \quad |f(x) - \psi(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in [b, c].$$

在  $[a, c]$  上定义分段线性函数  $g(x)$ , 使得在  $[a, b]$  上  $g = \varphi$ , 在  $[b, c]$  上  $g = \psi$ , 于是

$$|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in [a, c].$$

根据积分的保序性以及分段线性函数的积分关于区间的可加性, 得

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^c f(x)dx - \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx \right| \\ & \leq \left| \int_a^c g(x)dx - \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx \right| + \varepsilon(c-a) \\ & = \left| \int_a^b [g(x) - f(x)]dx + \int_b^c [g(x) - f(x)]dx \right| + \varepsilon(c-a) \\ & \leq \varepsilon(b-a) + \varepsilon(c-b) + \varepsilon(c-a) = 2\varepsilon(c-a), \end{aligned}$$

由于  $\varepsilon$  是任取的, 故积分关于区间的可加性成立.

- 如果  $f(x)$  为  $[a, b]$  上的非负连续函数, 则  $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ , 且等号成立当且仅当  $f \equiv 0$ . 这条性质的前半部分从积分的保序性得到. 至于后半部分, 如果  $f(x_0) > 0$ , 则由  $f$  的连续性可知, 存在区间  $[c, d] \subset [a, b]$ , 使得

$$f(x) \geq \frac{1}{2}f(x_0), \quad \forall x \in [c, d].$$

此时由积分关于区间的可加性以及保序性可得

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx \geq \int_c^d f(x)dx \geq \frac{f(x_0)}{2}(d-c) > 0,$$

即此时  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的积分为正.

**例 3.5.4.** 设  $f$  在  $[a, b]$  上连续,  $c \in [a, b]$ . 定义函数

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt, \quad x \in [a, b],$$

则  $F$  为 Lipschitz 函数.

**证明.** 设  $|f(x)| \leq M, \forall x \in [a, b]$ . 不妨设  $x_1 \leq x_2 \in [a, b]$ , 则

$$\begin{aligned} |F(x_2) - F(x_1)| &= \left| \int_c^{x_2} f(x)dx - \int_c^{x_1} f(x)dx \right| \\ &= \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \right| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|dx \\ &\leq M|x_2 - x_1|. \end{aligned}$$

因此  $F$  为 Lipschitz 函数. □

**例 3.5.5.** 设  $f$  为  $[a, b]$  上的连续函数, 如果对  $[a, b]$  上任意连续函数  $g$ , 均有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0,$$

则  $f = 0$ .

**证明.** 取  $g = f$ , 则由已知条件得

$$\int_a^b f^2(x)dx = \int_a^b f(x)g(x)dx = 0,$$

从而  $f^2 = 0$ , 即  $f = 0$ . □

为了方便积分的计算, 我们可以进一步将 (3.1) 式和 (3.2) 作改写. 在定义积分时, 我们使用的是将区间作等分然后求极限的方法. 我们要说明的是, 作区间划分时不必取等分点. 事实上, 在  $[a, b]$  中任取分点  $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ , 称

$$\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

为  $[a, b]$  的一个分划 (或分割). 记  $\|\pi\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}|$ . 任给  $\varepsilon > 0$ , 由连续函数的一致连续性, 存在  $\delta > 0$ , 当  $\|\pi\| < \delta$  时

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon, \quad \forall x, x' \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

任取  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , 由

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - f(\xi_i)] dx \end{aligned}$$

得

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \leq \sum_{i=1}^n \varepsilon(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b-a),$$

这说明

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), \quad (3.3)$$

(3.2) 式是上式的特殊情形.

**例 3.5.6.** 求函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  在区间  $[a, b]$  上的积分, 其中  $b > a > 0$ .

**解.** 将  $[a, b]$  做如下分划:

$$a < aq < aq^2 < \dots < aq^n = b,$$

其中  $q = (\frac{b}{a})^{\frac{1}{n}} > 1$ . 取  $\xi_i = aq^{i-1}$  ( $1 \leq i \leq n$ ), 则

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{1}{x} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{aq^{i-1}} (aq^i - aq^{i-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n(q-1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \left( \frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(b/a)^t - 1}{t} = \ln(b/a). \end{aligned}$$

**例 3.5.7.** 求函数  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  在区间  $[0, 1]$  上的积分.

**解.** 将  $[0, 1]$  做如下分划:

$$0 < \tan \frac{\pi}{4n} < \tan \frac{2\pi}{4n} < \dots < \tan \frac{i\pi}{4n} < \dots < 1,$$

取  $\xi_i = \sqrt{x_i x_{i-1}}$ , 则

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{x_i - x_{i-1}}{1 + x_i x_{i-1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \tan\left(\frac{i\pi}{4n} - \frac{(i-1)\pi}{4n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \tan \frac{\pi}{4n} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

在计算积分的时候, 有时需要对变量做一些简单的变换. 例如, 当  $f(x)$  为  $[a, b]$  上的连续函数时,  $f(t+c)$  是关于  $t \in [a-c, b-c]$  的连续函数, 根据 (3.1) 易见

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a-c}^{b-c} f(t+c)dt;$$

同理, 当  $\alpha \neq 0$  时, 也有

$$\int_a^b f(x)dx = \alpha \int_{a/\alpha}^{b/\alpha} f(\alpha t)dt.$$

**例 3.5.8.**  $x > 0$ , 求积分  $\int_0^x a^t dt$  ( $a > 0, a \neq 1$ ).

**解.** 令  $t = xs$ , 则由例 3.5.2, 有

$$\int_0^x a^t dt = x \int_0^1 (a^x)^s ds = x \frac{a^x - 1}{\ln a^x} = \frac{a^x - 1}{\ln a}.$$

**命题 3.5.2** (积分中值定理). 设  $f, g$  为  $[a, b]$  上的连续函数. 如果  $g$  不变号, 则存在  $\xi \in [a, b]$ , 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

**证明.** 不妨设  $g \geq 0$ .  $f$  在  $[a, b]$  上的最小值和最大值分别记为  $m, M$ , 则

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

根据积分的保序性和线性性, 有

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx.$$

如果  $\int_a^b g(x)dx = 0$ , 则任取  $\xi \in [a, b]$  即可. 如果  $\int_a^b g(x)dx > 0$ , 则

$$m \leq \left( \int_a^b g(x)dx \right)^{-1} \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M,$$

由连续函数的介值定理知存在  $\xi \in [a, b]$ , 使得

$$f(\xi) = \left( \int_a^b g(x) dx \right)^{-1} \int_a^b f(x) g(x) dx,$$

此  $\xi$  即为所求的点. □

注. 在此命题中取  $g = 1$ , 则得到简单推论: 存在  $\xi \in [a, b]$ , 使得

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a), \text{ 或 } f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

这里  $f(\xi)$  也就是  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的平均值.

**例 3.5.9.** 设  $f$  为  $[0, a]$  上的连续函数, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = f(0).$$

**证明.** 由积分中值定理, 当  $x \in (0, a)$  时, 存在  $\xi = \xi_x \in [0, x]$ , 使得

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = f(\xi).$$

当  $x \rightarrow 0^+$  时,  $\xi \rightarrow 0^+$ . 由  $f$  的连续性以及上式即得欲证结论. □

**例 3.5.10.** (\*) 设  $f$  为  $[0, a]$  上的连续函数, 定义

$$f_0(x) = f(x), \quad f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

证明, 存在  $\xi = \xi_{n,x} \in [0, x]$  使得

$$f_n(x) = f(\xi) \frac{x^n}{n!}.$$

**证明.** 我们对  $n$  使用归纳法.  $n = 1$  的情形就是积分中值定理. 设结论对  $n - 1$  成立, 则


$$m \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \leq f_{n-1}(x) \leq M \frac{x^{n-1}}{(n-1)!},$$

其中  $m, M$  分别是  $f$  的最小值和最大值. 利用  $t^{n-1}$  在  $[0, x]$  上积分为  $x^n/n$  (习题) 可得

$$m \frac{x^n}{n!} \leq \int_0^x f_{n-1}(t) dt \leq M \frac{x^n}{n!},$$

于是欲证结论由连续函数的介值定理得到. □

## §3.5.3 进一步的例子

 本小节内容可以作为选读材料.

下面继续举几个和积分有关的例子.

**例 3.5.11.** 求极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right)$ .

**解.** 我们有

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left[ \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} + \cdots + \frac{1}{1 + \frac{n}{n}} \right] \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \int_1^2 \frac{1}{t} dt = \ln 2. \end{aligned}$$

**例 3.5.12.** 求出所有满足下面条件的连续函数  $f$ :

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

**解.** 因为  $f$  连续, 我们在等式  $f(x+t) = f(x) + f(t)$  两边关于  $t$  积分, 有

$$\int_x^{x+y} f(t) dt = \int_0^y f(x+t) dt = f(x)y + \int_0^y f(t) dt,$$

因此

$$\int_0^{x+y} f(t) dt = f(x)y + \int_0^x f(t) dt + \int_0^y f(t) dt.$$

在上式中交换  $x, y$  的位置立即得到  $f(x)y = f(y)x$ . 特别地, 令  $y = 1$  可得出  $f(x) = f(1)x = Cx$ . □

**例 3.5.13 (Young 不等式).** 设  $f$  是  $[0, +\infty)$  中的单调递增连续函数,  $f(0) = 0$ ,  $f^{-1}(y)$  表示  $f$  的反函数, 则当  $a, b > 0$  时

$$ab \leq \int_0^a f(x) dx + \int_0^b f^{-1}(y) dy,$$

等号成立当且仅当  $b = f(a)$ .

**证明.** 我们分情况讨论.

(1)  $b = f(a)$ . 这时  $f: [0, a] \rightarrow [0, b]$  为连续函数, 其逆  $f^{-1}: [0, b] \rightarrow [0, a]$  也是连续函数. 取  $[0, a]$  的  $n$  等分:

$$\pi: 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = a,$$

则  $y_i = f(x_i)$  ( $0 \leq i \leq n$ ) 构成  $[0, b]$  的分划:

$$\pi': 0 = f(x_0) = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = b$$

因为  $f$  在闭区间上一致连续, 故当  $n \rightarrow \infty$  时  $\|\pi'\| \rightarrow 0$ . 因此

$$\begin{aligned}
 & \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f^{-1}(f(x_{i-1}))(f(x_i) - f(x_{i-1})) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [f(x_i)(x_i - x_{i-1}) + x_{i-1}(f(x_i) - f(x_{i-1}))] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [f(x_i)x_i - x_{i-1}f(x_{i-1})] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} [x_n f(x_n) - x_0 f(x_0)] \\
 &= af(a) - 0f(0) = af(a) = ab.
 \end{aligned}$$

(2)  $0 < b < f(a)$ . 由  $f$  的连续性, 存在  $\xi \in (0, a)$  使得  $b = f(\xi)$ . 由 (1), 有

$$\begin{aligned}
 & \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy \\
 &= \int_0^\xi f(x)dx + \int_\xi^a f(x)dx + \int_0^{f(\xi)} f^{-1}(y)dy \\
 &> f(\xi)(a - \xi) + \int_0^\xi f(x)dx + \int_0^{f(\xi)} f^{-1}(y)dy \\
 &= f(\xi)(a - \xi) + \xi f(\xi) = af(\xi) = ab.
 \end{aligned}$$

(3)  $b > f(a)$ . 这时将  $f$  视为  $f^{-1}$  的反函数就可将问题化为情形 (2).  $\square$

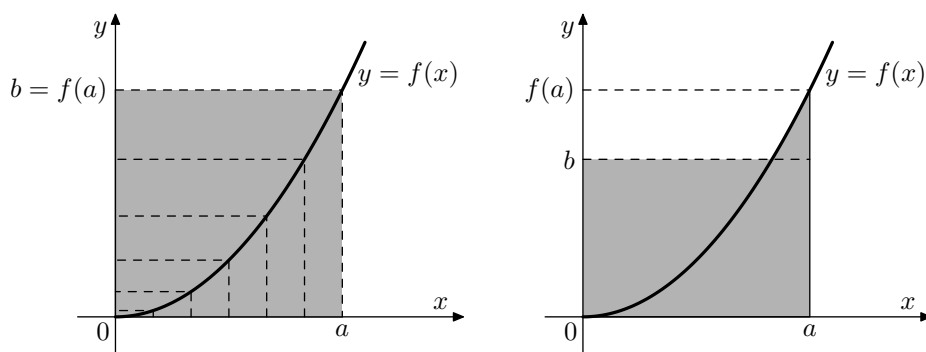


图 3.11 Young 不等式

作为应用, 如果我们考虑连续函数  $f(x) = x^{p-1}$  ( $p > 1$ ), 其逆为

$$f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{p-1}} = y^{q-1}, \quad (\text{其中 } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$$

于是当  $a, b > 0$  时,

$$ab \leq \int_0^a x^{p-1} dx + \int_0^b y^{q-1} dy = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

这个不等式也称为 Young 不等式 (上式中的积分参见本节习题 3.5(3)), 等号成立的条件是  $b^q = a^p$ . 当  $p = q = 2$  时, Young 不等式也就是平均值不等式.

**例 3.5.14** (Hölder 不等式). 设  $f, g$  为  $[a, b]$  上非负连续函数,  $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . 则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left[ \int_a^b f^p(x)dx \right]^{\frac{1}{p}} \left[ \int_a^b g^q(x)dx \right]^{\frac{1}{q}},$$

等号成立当且仅当  $f^p = cg^q$  或  $cf^p = g^q$ ,  $c$  为常数.

**证明.** 不妨设

$$\int_a^b f^p(x)dx > 0, \quad \int_a^b g^q(x)dx > 0.$$

则由 Young 不等式, 有

$$\frac{f(x)g(x)}{\left[ \int_a^b f^p(x)dx \right]^{\frac{1}{p}} \left[ \int_a^b g^q(x)dx \right]^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \frac{f^p(x)}{\int_a^b f^p(x)dx} + \frac{1}{q} \frac{g^q(x)}{\int_a^b g^q(x)dx},$$

上式两边在  $[a, b]$  上积分, 得

$$\begin{aligned} \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\left[ \int_a^b f^p(x)dx \right]^{\frac{1}{p}} \left[ \int_a^b g^q(x)dx \right]^{\frac{1}{q}}} &\leq \frac{1}{p} \frac{\int_a^b f^p(x)dx}{\int_a^b f^p(x)dx} + \frac{1}{q} \frac{\int_a^b g^q(x)dx}{\int_a^b g^q(x)dx} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

不等式得证. 等号成立的条件可由 Young 不等式等号成立的条件得到.  $\square$

**例 3.5.15.** 设  $f$  是  $[a, b]$  上的连续函数,  $g$  是周期为  $T$  的连续周期函数, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)g(nx)dx = \frac{1}{T} \int_a^b f(x)dx \int_0^T g(x)dx.$$

**证明.** 不妨设周期函数  $g(x)$  在一个周期区间内积分为零, 不然考虑  $g(x) - C$  即可, 其中

$$C = \frac{1}{T} \int_0^T g(x)dx. \quad (g \text{ 的平均值})$$

由于闭区间上连续函数是一致连续的, 故任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N$ , 当  $n \geq N$  时,

$$|f(x') - f(x'')| \leq \varepsilon, \quad \forall |x' - x''| \leq T/n.$$



当  $n$  充分大时, 不妨设

$$\frac{i-1}{n}T < a \leq \frac{i}{n}T, \quad \frac{k}{n}T \leq b < \frac{k+1}{n}T,$$

其中  $i, k$  为整数. 利用

$$\int_{\frac{j}{n}T}^{\frac{(j+1)}{n}T} g(nx)dx = \frac{1}{n} \int_{jT}^{(j+1)T} g(t)dt = 0, \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

可得

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x)g(nx)dx \\ &= \int_a^{\frac{i}{n}T} f(x)g(nx)dx + \sum_{j=i}^{k-1} \int_{\frac{j}{n}T}^{\frac{(j+1)}{n}T} f(x)g(nx)dx + \int_{\frac{k}{n}T}^b f(x)g(nx)dx \\ &= \int_a^{\frac{i}{n}T} f(x)g(nx)dx + \sum_{j=i}^{k-1} \int_{\frac{j}{n}T}^{\frac{(j+1)}{n}T} [f(x) - f(\frac{j}{n}T)]g(nx)dx \\ &\quad + \sum_{j=i}^{k-1} f(\frac{j}{n}T) \int_{\frac{j}{n}T}^{\frac{(j+1)}{n}T} g(nx)dx + \int_{\frac{k}{n}T}^b f(x)g(nx)dx \\ &= \int_a^{\frac{i}{n}T} f(x)g(nx)dx + \sum_{j=i}^{k-1} \int_{\frac{j}{n}T}^{\frac{(j+1)}{n}T} [f(x) - f(\frac{j}{n}T)]g(nx)dx + \int_{\frac{k}{n}T}^b f(x)g(nx)dx. \end{aligned}$$

于是, 当  $n$  充分大时, 可得如下估计

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)g(nx)dx \right| &\leq \frac{T}{n} \max |f| \max |g| + \frac{(k-i)}{n} T \varepsilon \max |g| + \frac{T}{n} \max |f| \max |g| \\ &\leq \frac{2T}{n} \max |f| \max |g| + (b-a) \varepsilon \max |g|, \end{aligned}$$

由此易见

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)g(nx)dx = 0.$$

注. 这个证明利用了这一点, 即当  $n$  充分大时,  $g(nx)$  的周期充分小, 从而在一个周期之内  $f$  近似地为常数.  $\square$

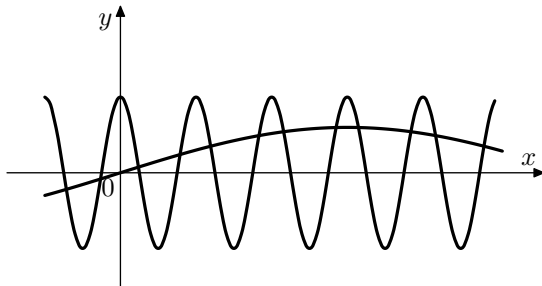


图 3.12 周期振荡函数的积分

## 习题 3.5

1. 如果  $f$  本身就是分段线性的连续函数, 试说明用等分区间作分段线性逼近所得积分的极限与分段线性函数的积分是一致的.

2. 按照定义计算积分  $\int_a^b \sin x \, dx$ .

3. (1) 设  $b > a > 0$ ,  $\alpha \neq -1$ . 按照定义求积分  $\int_a^b x^\alpha dx$ . (2)\* 设  $b, \alpha > 0$ , 求积分  $\int_0^b x^\alpha dx$ , 利用积分计算极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}.$$

4. 不借助对数函数, 证明函数

$$f(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}, \quad x > 0$$

具有性质  $f(xy) = f(x) + f(y)$ ,  $\forall x, y > 0$ .

5. 设  $g$  为连续周期函数, 周期为  $T$ , 则当  $b - a = T$  时

$$\int_a^b g(x) dx = \int_0^T g(x) dx.$$

6. 通过计算证明  $\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$ .

7. 试说明, 积分中值定理中的点  $\xi$  可取在开区间  $(a, b)$  中.

8. 设  $f$  为  $[a, b]$  上的连续函数, 如果对  $[a, b]$  上任意满足条件  $g(a) = g(b) = 0$  的连续函数  $g$ , 均有  $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ , 则  $f \equiv 0$ .

9. 设  $f$  为  $[a, b]$  上的连续函数, 如果对  $[a, b]$  上任意满足条件  $\int_a^b g(x)dx = 0$  的连续函数  $g$ , 均有  $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ , 则  $f = C$  为常数. (提示: 设  $f$  的平均值为  $C$ , 考虑  $g = f - C$  以及  $g^2$  的积分.)

10. (\*) 利用积分  $e^x = 1 + \int_0^x e^t dt$  证明

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} e^{\theta x}, \quad \theta \in [0, 1].$$

11. 设  $f$  为  $[a, b]$  上单调递增的连续函数, 则

$$(a+b) \int_a^b f(x) dx \leq 2 \int_a^b x f(x) dx,$$

等号成立当且仅当  $f$  为常值函数. (提示: 考虑  $(x - \frac{a+b}{2})(f(x) - f(\frac{a+b}{2}))$ .)

12. (\*) 设  $f$  为  $[a, b]$  上的连续函数. 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \int_a^b |f(x)|^n dx \right]^{\frac{1}{n}} = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

13. 设  $f, g$  为  $[a, b]$  上非负连续函数, 利用 Hölder 不等式证明

$$\left( \int_a^b f^{n+1}(x) g(x) dx \right)^2 \leq \left( \int_a^b f^n(x) g(x) dx \right) \left( \int_a^b f^{n+2}(x) g(x) dx \right).$$

14. (\*) 设  $f, g$  为  $[a, b]$  上正的连续函数, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_a^b f^{n+1}(x) g(x) dx}{\int_a^b f^n(x) g(x) dx} = \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

15. 用 Young 不等式证明 Hölder 不等式: 设  $a_i, b_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 则

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad \text{其中 } p, q > 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

16. 设  $f(x)$  为  $[a, b]$  上的连续函数, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin nx dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos nx dx = 0.$$

17. (\*) 设  $f(x)$  为  $[0, +\infty)$  中的严格单调递增连续函数, 则

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt, & x > 0, \\ f(0), & x = 0 \end{cases}$$

也是  $[0, +\infty)$  中的严格单调递增连续函数.

18. (\*) 设  $f(x)$  为  $[a, b]$  上正连续函数, 则

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{b-a} \int_a^b f^r(x) dx \right)^{\frac{1}{r}} = \exp \left( \frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f(x) dx \right),$$

并用 Hölder 不等式说明上式左端关于  $r$  单调递增.

## 第四章 微分及其逆运算

本章初步介绍一元函数的微分学, 我们引入导数和微分的概念来研究函数在一点附近的局部变化性质. 将微分和积分这一对概念统一在一起的是重要的 Newton-Leibniz 公式.

### §4.1 可导与可微

在经典物理学中, 如果我们考察质点沿直线的运动, 则有速度和加速度的概念. 速度是反映位移随时间变化的量, 即速度是位移函数的变化率, 而加速度是反映速度随时间变化的量. 我们现在利用极限给出这些变化量的数学定义.

**定义 4.1.1 (导数).** 设函数  $f$  在  $x_0$  附近有定义, 如果极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

存在且有限, 则称  $f$  在  $x_0$  处可导, 此极限称为  $f$  在  $x_0$  处的导数, 记为  $f'(x_0)$ .

注. (1) 如果记  $y = f(x)$ ,  $\Delta x = x - x_0$ ,  $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ , 则导数也可表示为

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

导数的另一记号是  $\frac{df}{dx}(x_0)$ , 它主要强调  $f$  是关于  $x$  求导的.

(2) 既然导数是用极限定义的, 我们当然也可以用  $\varepsilon - \delta$  语言来描述它: 如果存在  $A \in \mathbb{R}$ , 使得任给  $\varepsilon > 0$ , 均存在  $\delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - A \right| < \varepsilon,$$

则  $f$  在  $x_0$  处可导, 导数为  $A$ .

**例 4.1.1.** 研究下列函数的导数:

$$C, \quad x^n \quad (n \geq 1), \quad a^x \quad (a > 0, a \neq 1), \quad \ln x, \quad \sin x, \quad \cos x.$$

**解.** 显然, 常值函数的导数恒为零. 这和我们的直观是相吻合的, 因为导数反映函数的变化率, 而常值函数的变化率当然为零.

当  $n \geq 1$  时, 根据 Newton 二项式展开, 有

$$(x_0 + \Delta x)^n = x_0^n + nx_0^{n-1}\Delta x + \cdots,$$

其中省略的是  $\Delta x$  的高次项. 于是

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^n - x_0^n}{\Delta x} = nx_0^{n-1},$$

即  $(x^n)' = nx^{n-1}$ .

当  $a > 0, a \neq 1$  时, 利用例 3.1.15 的计算可得

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x_0 + \Delta x} - a^{x_0}}{\Delta x} = a^{x_0} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^{x_0} \ln a,$$

即  $(a^x)' = a^x \ln a$ . 特别地,  $(e^x)' = e^x$ .

当  $x_0 > 0$  时, 利用例 3.1.13 的计算可得

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x_0 + \Delta x) - \ln x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \frac{\Delta x}{x_0})}{\Delta x} = \frac{1}{x_0},$$

即  $(\ln x)' = 1/x$ .

设  $x_0 \in \mathbb{R}$ , 则

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2}{\Delta x} \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x_0,$$

即  $(\sin x)' = \cos x$ . 同理可以算出  $(\cos x)' = -\sin x$ .  $\square$

如果考虑左右极限, 则有左导数和右导数的概念. 左右导数分别记为  $f'_-(x_0)$ ,  $f'_+(x_0)$ .  $f$  在  $x_0$  处可导当且仅当其左右导数相等.

**例 4.1.2.** 研究函数  $f(x) = |x|$  在  $x_0 = 0$  处的可导性.

**解.** 当  $x < 0$  时, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

这说明  $f'_-(0) = -1$ . 类似地, 当  $x > 0$  时, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1.$$

因此  $f'_+(0) = 1$ . 这说明  $f$  在  $x_0 = 0$  处不可导.  $\square$

**例 4.1.3.** 定义函数  $f(x)$  如下:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

研究  $f$  在  $x_0 = 0$  处的可导性.

解. 我们来计算  $f$  在  $x_0 = 0$  处的右导数:

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{|x|}}}{x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = 0,$$

同理可得  $f'_-(0) = 0$ , 因此  $f$  在  $x_0 = 0$  处可导. □

下面我们研究导数的运算法则. 首先有

**命题 4.1.1.** 设  $f$  在  $x_0$  处可导, 则  $f$  在  $x_0$  处连续.

**证明.** 设  $f$  在  $x_0$  处可导, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0,$$

即  $f$  在  $x_0$  处连续. □

**命题 4.1.2** (导数的运算法则). 设  $f, g$  在  $x$  处可导, 则  $fg$  在  $x$  处可导; 如果  $\alpha, \beta$  为常数, 则  $\alpha f + \beta g$  在  $x$  处可导. 且有

- (1)  $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$  (线性性);
- (2)  $(fg)' = f'g + fg'$  (导性).

**证明.** (1) 这可从导数的定义和函数极限的性质直接得出.

(2) 设  $f, g$  在  $x_0$  处可导. 利用

$$f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) = [f(x) - f(x_0)]g(x) + f(x_0)[g(x) - g(x_0)]$$

可得

$$\begin{aligned} (fg)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0). \end{aligned}$$

其中我们用到了  $f, g$  在  $x_0$  处的连续性. □

导数运算的线性性可以推广为对任意有限多个函数的线性组合成立. 从导性还得到

**推论 4.1.3.** 设  $f, g$  在  $x_0$  处可导,  $g(x_0) \neq 0$ . 则  $\frac{f}{g}$  在  $x_0$  处可导, 且

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

**证明.** 设  $g$  在  $x_0$  处可导, 则  $g$  在  $x_0$  处连续. 由  $g(x_0) \neq 0$  可知,  $g$  在  $x_0$  附近不为零. 我们先说明  $1/g = \frac{1}{g}$  在  $x_0$  处可导:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1/g(x) - 1/g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-1}{g(x)g(x)} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

因此  $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$  可导, 利用导数的导性, 有

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = f' \cdot \left(\frac{1}{g}\right) + f \cdot \left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2},$$

推论得证. □

**例 4.1.4.** 研究下列函数的导数:

$$\log_a x \ (a > 0, a \neq 1), \quad \csc x, \quad \sec x, \quad \tan x, \quad \cot x.$$

**解.** 利用  $(\ln x)' = 1/x$  可得

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

利用  $(\sin x)' = \cos x$  可得

$$\begin{aligned} (\csc x)' &= \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}(\sin x)' \\ &= -\frac{1}{\sin^2 x} \cos x = -\csc x \cot x. \end{aligned}$$

利用  $(\cos x)' = -\sin x$  可得

$$\begin{aligned} (\sec x)' &= \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = -\frac{1}{\cos^2 x}(\cos x)' \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \sin x = \sec x \tan x. \end{aligned}$$

同理, 有

$$\begin{aligned} (\tan x)' &= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x, \\ (\cot x)' &= \frac{(-\sin x) \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = -\csc^2 x. \end{aligned}$$

这就得到了常见三角函数的导数. □

为了讨论导数关于复合函数的运算规则, 我们现在从几何的角度来解释导数的含义. 考虑函数  $f$  在  $x_0$  附近的图像, 经过图像上两点  $(x_0, f(x_0))$  和  $(x, f(x))$  的直线 (割线) 的方程为

$$y(t) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(t - x_0) + f(x_0), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

当  $x \rightarrow x_0$  时, 考察此直线的变化. 当  $f$  在  $x_0$  处可导时, 直线的极限位置是一条经过  $(x_0, f(x_0))$  且斜率为  $f'(x_0)$  的直线, 称为  $f$  在  $x_0$  处的切线, 其方程为

$$y(t) = f'(x_0)(t - x_0) + f(x_0).$$

方程

$$(x - x_0) + f'(x_0)(y - f(x_0)) = 0$$

所代表的直线则称为  $f$  在  $x_0$  处的法线.

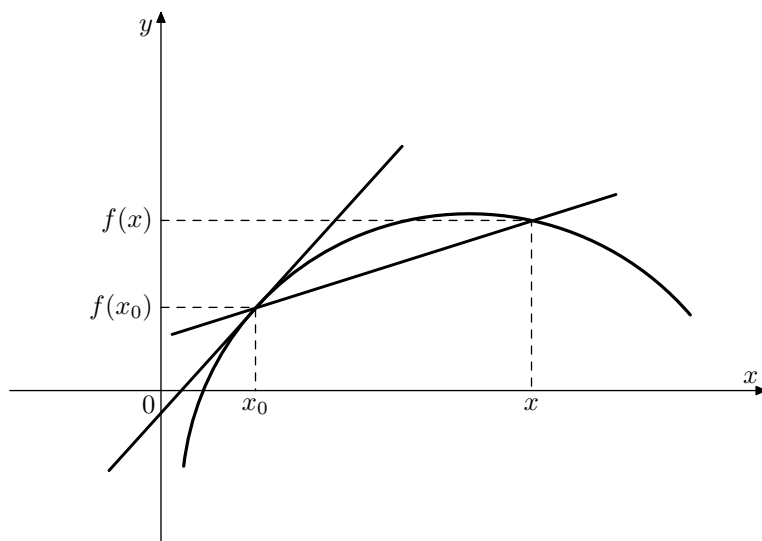


图 4.1 导数与切线

根据切线的定义过程, 我们可以把切线看成函数  $f$  的图像在  $x_0$  处的一个线性逼近. 即, 函数  $f$  在  $x_0$  附近可以近似地看成线性函数, 这种线性逼近或线性化的方法是我们研究函数的一种基本手法. 比如, 在力学中, 考察某个质点的运动, 它的运动轨迹可能非常复杂, 但在一个非常短的时间之内往往可以认为该质点在做匀速直线运动. 引入下面的概念使得我们可以严格地描述这种现象.

**定义 4.1.2 (微分).** 设  $f$  是在  $x_0$  附近有定义的函数, 如果存在常数  $A$ , 使得

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0) \quad (x \rightarrow x_0),$$

则称  $f$  在  $x_0$  处可微, 线性映射  $x \mapsto Ax$  称为  $f$  在  $x_0$  处的微分, 记为  $df(x_0)$ .

导数和微分之间的关系体现在下面的命题中.

**命题 4.1.4.** 设  $f$  在  $x_0$  附近有定义, 则  $f$  在  $x_0$  处可导当且仅当  $f$  在  $x_0$  处可微, 且微分的斜率就是导数  $f'(x_0)$ .

**证明.** 设  $f$  在  $x_0$  处可导, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0,$$

因此

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0) \quad (x \rightarrow x_0),$$

即

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad (x \rightarrow x_0).$$



这说明  $f$  在  $x_0$  处可微.

反之, 设  $f$  在  $x_0$  处可微,  $f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{A(x - x_0) + o(x - x_0)}{x - x_0} = A,$$

从而  $f$  在  $x_0$  处可导, 且导数  $f'(x_0) = A$ . □

微分的几何意义在于它可以看成  $f$  的一个线性近似. 由于微分的斜率等于导数, 我们将  $x_0$  处的微分  $df(x_0)$  写为

$$df(x_0) = f'(x_0)dx(x_0),$$

其中  $dx(x_0)$  是函数  $x$  在  $x_0$  的微分 (即恒同线性映射).

**命题 4.1.5 (链规则).** 设  $g$  在  $x_0$  处可导,  $f$  在  $g(x_0)$  处可导, 则复合函数  $f \circ g = f(g)$  在  $x_0$  处可导, 且

$$[f(g)]'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

**证明.** 因为  $g$  在  $x_0$  处可导, 故当  $x$  在  $x_0$  附近时

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

这说明  $x \rightarrow x_0$  时, 存在常数  $C$ , 使得  $|g(x) - g(x_0)| \leq C|x - x_0|$ . 由  $f$  在  $g(x_0)$  处可导可得

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))(g(x) - g(x_0)) + o(g(x) - g(x_0)) \\ &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + f'(g(x_0))o(x - x_0) + o(x - x_0) \\ &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0). \end{aligned}$$

这说明  $f(g)$  在  $x_0$  处可微 (可导), 导数为  $f'(g(x_0))g'(x_0)$ . □

链规则对于任意有限个函数的复合也适用, 比如

$$[f(g(h))]' = f'(g(h))g'(h)h'.$$

**例 4.1.5.** 研究下列函数的导数:

$$\ln |x|, \quad x^\alpha \quad (\alpha \neq 0).$$

**证明.** 我们知道, 当  $x \neq 0$  时,  $(|x|)' = \operatorname{sgn} x$ . 由复合函数的求导得

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{|x|}(|x|)' = \frac{1}{|x|}\operatorname{sgn} x = \frac{1}{x}.$$

如果  $\alpha \neq 0, x > 0$ , 则

$$\begin{aligned}(x^\alpha)' &= (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} (\alpha \ln x)' \\ &= x^\alpha \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1};\end{aligned}$$

如果  $\alpha > 1$ , 则  $x = 0$  处的导数计算如下

$$(x^\alpha)'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha-1} = 0;$$

我们现在考虑  $x < 0$  的情形. 此时, 要求  $\alpha = \frac{p}{q}$  为有理数,  $p, q$  为互素的整数, 且  $q$  为奇数. 我们有

$$\begin{aligned}(x^\alpha)' &= ((-1)^{\frac{p}{q}} e^{\alpha \ln |x|})' = (-1)^{\frac{p}{q}} e^{\alpha \ln |x|} (\alpha \ln |x|)' \\ &= x^\alpha \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.\end{aligned}$$

这样就得到了定义域内所有可导点处的导数. □

**命题 4.1.6** (反函数求导法则). 设  $f$  在  $x_0$  附近连续且有反函数  $g$ . 如果  $f$  在  $x_0$  处可导, 且导数  $f'(x_0) \neq 0$ , 则  $g$  在  $y_0 = f(x_0)$  处可导, 且

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

**证明.** 因为  $f$  在  $x_0$  处可导, 故

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad (x \rightarrow x_0). \quad (4.1)$$

当  $x \rightarrow x_0$  时上式可改写为

$$f(x) - f(x_0) = [f'(x_0) + o(1)](x - x_0).$$

当  $f'(x_0) \neq 0$  时, 上式表明, 当  $x \rightarrow x_0$  时, 存在常数  $C > 0$  使得

$$|f(x) - f(x_0)| \geq C|x - x_0|, \quad \text{或} \quad |y - y_0| \geq C|g(y) - g(y_0)|.$$

特别地, 当  $y \rightarrow y_0$  时,  $x = g(y) \rightarrow g(y_0) = x_0$ . 在 (4.1) 中代入  $x = g(y)$ ,  $x_0 = g(y_0)$  可得

$$\begin{aligned}y &= y_0 + f'(x_0)(g(y) - g(y_0)) + o(g(y) - g(y_0)) \quad (y \rightarrow y_0) \\ &= y_0 + f'(x_0)(g(y) - g(y_0)) + o(y - y_0) \quad (y \rightarrow y_0),\end{aligned}$$

或改写为

$$g(y) = g(y_0) + \frac{1}{f'(x_0)}(y - y_0) + o(y - y_0) \quad (y \rightarrow y_0).$$

这说明  $g$  在  $y_0 = f(x_0)$  处可导, 且导数为  $\frac{1}{f'(x_0)}$ . □

**注.** 导数  $f'(x_0) \neq 0$  的条件不能去掉. 例如  $f(x) = x^3$  是从  $\mathbb{R}$  到  $\mathbb{R}$  的可逆函数,  $f$  处处可导, 但其反函数  $g(y) = y^{1/3}$  在  $y = 0$  处不可导. □

例 4.1.6. 研究下列函数的导数:

$$\arcsin x, \arccos x, \arctan x, \operatorname{arccot} x.$$

证明. 正弦函数  $\sin x : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$  可逆. 由反函数求导公式, 有

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos \arcsin x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \arcsin x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$\arccos x$  可类似求导, 也可这样看: 因为  $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ , 故

$$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

正切函数  $\tan x : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow (-\infty, \infty)$  可逆. 由反函数求导公式, 有

$$(\arctan x)' = \frac{1}{\sec^2 \arctan x} = \frac{1}{1 + \tan^2 \arctan x} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

同理可得

$$(\operatorname{arccot} x)' = \frac{1}{-\csc^2 \operatorname{arccot} x} = -\frac{1}{1 + \cot^2 \operatorname{arccot} x} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

这就得到了反三角函数的导数公式. □

我们如下定义一类所谓的双曲函数, 首先是双曲正弦  $\sinh x$  和双曲余弦  $\cosh x$ :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

然后是双曲正切  $\tanh x$  和双曲余切  $\coth x$ :

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x};$$

简单的计算表明, 双曲函数之间满足如下关系

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cdot \cosh y + \cosh x \cdot \sinh y,$$

$$\sinh(x - y) = \sinh x \cdot \cosh y - \cosh x \cdot \sinh y,$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cdot \cosh y + \sinh x \cdot \sinh y,$$

$$\cosh(x - y) = \cosh x \cdot \cosh y - \sinh x \cdot \sinh y,$$

以及

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad 1 - (\tanh x)^2 = \frac{1}{\cosh^2 x}, \quad (\coth x)^2 - 1 = \frac{1}{\sinh^2 x}.$$

双曲函数的导数计算如下:

**命题 4.1.7.**  $(\sinh x)' = \cosh x$ ,  $(\cosh x)' = \sinh x$ ,  $(\tanh x)' = 1 - (\tanh x)^2$ ,  
 $(\coth x)' = 1 - (\coth x)^2$ .

**证明.** 利用  $e^x$  的导数直接计算即可, 留作习题. □

为了方便起见, 我们把已经得到的导数计算公式总结在下面.

- |                                      |   |
|--------------------------------------|---|
| 1. $(C)' = 0$ ( $C$ 为常数);            | 2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ ( $\alpha \neq 0$ );   |
| 3. $(e^x)' = e^x$ ;                  | 4. $(a^x)' = a^x \ln a$ ( $a > 0, a \neq 1$ );                |
| 5. $(\ln  x )' = \frac{1}{x}$ ;      | 6. $(\log_a  x )' = \frac{1}{x \ln a}$ ( $a > 0, a \neq 1$ ); |
| 7. $(\sin x)' = \cos x$ ;            | 8. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ;                  |
| 9. $(\cos x)' = -\sin x$ ;           | 10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ;                |
| 11. $(\sec x)' = \sec x \tan x$ ;    | 12. $(\csc x)' = -\csc x \cot x$ ;                            |
| 13. $(\tan x)' = \sec^2 x$ ;         | 14. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ ;                        |
| 15. $(\cot x)' = -\csc^2 x$ ;        | 16. $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ ;         |
| 17. $(\sinh x)' = \cosh x$ ;         | 18. $(\cosh x)' = \sinh x$ ;                                  |
| 19. $(\tanh x)' = 1 - (\tanh x)^2$ ; | 20. $(\coth x)' = 1 - (\coth x)^2$ .                          |

下面我们来计算两个稍微复杂一点的例子.

**例 4.1.7.** 求函数  $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$  的导数.

**解.** 利用复合求导, 有

$$\begin{aligned}
 [\ln(x + \sqrt{1+x^2})]' &= (x + \sqrt{1+x^2})^{-1} [x' + (\sqrt{1+x^2})'] \\
 &= (x + \sqrt{1+x^2})^{-1} \left[ 1 + \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}(1+x^2)' \right] \\
 &= (x + \sqrt{1+x^2})^{-1} [1 + x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.
 \end{aligned}$$

**例 4.1.8.** 设  $u(x) > 0$ ,  $u(x)$ ,  $v(x)$  都是可导函数, 求  $f(x) = u(x)^{v(x)}$  的导数.

**解.** 我们对  $f(x) = u(x)^{v(x)}$  求对数再求导:

$$(\ln f(x))' = (v(x) \ln u(x))' = v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{1}{u(x)} u'(x),$$

利用复合求导就得到

$$f'(x) = f(x)(\ln f(x))' = u(x)^{v(x)} \left( v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right).$$

上面例子中求对数再求导的方法称为**对数法**, 这是很常用的求导数技巧.

最后我们简要介绍函数的全微分的概念. 我们知道,  $f$  在  $x$  处的微分是一个斜率为  $f'(x)$  的线性映射, 当  $x$  变化时, 这些线性映射也随之变化, 即  $x \mapsto df(x)$  是一个新的映射, 记为  $df$ , 称为  $f$  的外微分或全微分. 在这个意义下,  $x$  的全微分  $dx$  是这样一个映射, 它把任意点  $x$  均映为  $x$  处的恒同线性映射. 因为  $df(x)$  都是线性的, 我们可以在全微分之间自然地定义加法和数乘运算, 此时有

$$df = f'(x)dx.$$

一般地, 我们把形如  $f dx$  ( $f$  为函数) 的表达式称为 1 次微分形式. 根据导数的运算法则, 我们有

**命题 4.1.8.** 设  $f, g$  可微, 则

- (1)  $d(\alpha f + \beta g) = \alpha df + \beta dg$ , 其中  $\alpha, \beta$  为常数;
- (2)  $d(fg) = gdf + fdg$ ;
- (3)  $d(f/g) = \frac{gdf - f dg}{g^2}$ , 其中  $g \neq 0$ .

对于可微函数来说, 复合求导可以重新表述为全微分的形式不变性, 即

**命题 4.1.9.** 设  $f, g$  均可微, 且复合函数  $f(g)$  有定义, 则

$$d[f(g)] = f'(g)dg.$$

**证明.** 根据复合求导和外微分的定义, 有

$$d[f(g)] = [f(g)]' dx = f'(g)g' dx = f'(g)dg.$$

这个式子称为形式不变性是因为它的形式和  $df = f' dx$  一样, 只是将  $x$  换成了  $g$  而已. □

我们也可以利用外微分来计算导数.

**例 4.1.9.** 求函数

$$f(x) = \ln(x^2 e^x + \sqrt{1+x^2})$$

的导数.

**解.** 由全微分的形式不变性, 有

$$\begin{aligned} df &= (x^2 e^x + \sqrt{1+x^2})^{-1} d(x^2 e^x + \sqrt{1+x^2}) \\ &= (x^2 e^x + \sqrt{1+x^2})^{-1} (e^x(2x)dx + x^2 e^x dx + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} d(1+x^2)) \\ &= (x^2 e^x + \sqrt{1+x^2})^{-1} (2xe^x + x^2 e^x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}) dx, \end{aligned}$$

因此  $f$  的导数为

$$f'(x) = (x^2 e^x + \sqrt{1+x^2})^{-1} (2xe^x + x^2 e^x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}).$$

有时候, 函数不是通过显式表达式给出, 而是通过隐式给出, 这时利用外微分计算导数显得比较容易一些.

**例 4.1.10.** 设  $-y^2 + 2e^y = x^2$  决定了可微函数  $y = f(x)$ , 求  $f$  的导数.

**证明.** 在等式  $-y^2 + 2e^y = x^2$  两边微分得

$$-2ydy + 2e^y dy = 2xdx,$$

因此

$$dy = \frac{x}{e^y - y} dx,$$

这说明  $f$  的导数为  $\frac{x}{e^y - y}$ .

□

在第十二章中我们将讨论隐函数存在的条件.

#### 习题 4.1

1. 设  $f(x)$  在  $x_0$  处可导, 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) - f(x_0) \right].$$

2. 设  $f(x)$  在  $x_0$  处可导, 求极限

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h}.$$

3. 按照导数的定义求函数  $f(x) = x(x-1)^2(x-2)^2$  在  $x = 0, 1, 2$  处的导数.

4. 按照导数的定义求函数  $f(x) = \sqrt{1+x}$  在  $x = 0, 1, 2$  处的导数.

5. 设  $f(0) = 0$ ,  $f$  在  $x = 0$  处可导, 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ .

6. 已知函数  $f(x) = (x-a)\varphi(x)$ , 且  $\varphi(x)$  为在  $a$  处连续的函数, 求  $f'(a)$ .

7. 证明函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{ 为无理数,} \\ 0, & x \text{ 为有理数,} \end{cases}$$

仅在  $x = 0$  处有导数.

## 8. 计算函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

在  $x = 0$  处的导数.

## 9. 函数

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

在  $x = 0$  处可导吗?

10. 确定常数  $a, b$  的值, 使得函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 1, \\ ax + b, & x < 1, \end{cases}$$

在  $x = 1$  处可导.

## 11. 求下列函数的导数

$$\begin{aligned} (1) f(x) &= 2x^3 + 4x^2 - 3; & (2) f(x) &= (x+1)^2(x+2)(x+3)^3; \\ (3) f(x) &= (1+nx^m)(1+mx^n); & (4) f(x) &= (ax^m+b)^n(cx^n+d)^m; \\ (5) f(x) &= x\sqrt{1+x^2}; & (6) f(x) &= \ln(\sin x) + e^{-x} \sin x. \end{aligned}$$

## 12. 求下列函数的导数

$$\begin{aligned} (1) f(x) &= \sqrt{\sin^2 x}; & (2) f(x) &= \frac{2 + \sin x}{x}; & (3) f(x) &= \frac{x \ln x}{1+x} - \frac{1}{x}; \\ (4) f(x) &= \frac{\sin x}{1 + \tan x}; & (5) f(x) &= \frac{xe^{-x} - 1}{\sin x}; & (6) f(x) &= \frac{x}{(1-x)^2(1+x)}; \\ (7) f(x) &= \ln\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right); & (8) f(x) &= \frac{x^p(1-x)^q}{1+x}; & (9) f(x) &= \frac{x \sin x + \cos x}{x \sin x - \cos x}. \end{aligned}$$

## 13. 求下列函数的导数

$$\begin{aligned} (1) f(x) &= e^{x^2 \sin x}; & (2) f(x) &= \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}; & (3) f(x) &= \arcsin(\cos^2 x); \\ (4) f(x) &= \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}; & (5) f(x) &= \ln(\ln(\ln x)); & (6) f(x) &= \ln(\sin x + \cos x); \\ (7) f(x) &= \sqrt{x + \sqrt{x}}; & (8) f(x) &= e^{\alpha x} \sin \beta x; & (9) f(x) &= \sin(\sin(\cos x)). \end{aligned}$$

## 14. 求下列函数的导数

$$\begin{aligned} (1) f(x) &= (x \sin x)^x; & (2) f(x) &= (x)^{a^x}; & (3) f(x) &= (\cos x)^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x}; \\ (4) f(x) &= x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}; & (5) f(x) &= a^{x^n}; & (6) f(x) &= (x + \sqrt{1+x^2})^n. \end{aligned}$$

15. 设  $f(x)$  可导, 求  $y'$ :

$$(1) y = f(x \sin x); \quad (2) y = f(e^x)e^{f(x)}; \quad (3) y = f(\cos x) \sin x;$$

$$(4) y = f(f(f(x))); \quad (5) y = f(\tan x); \quad (6) y = [f(\ln x)]^n.$$

16. 设  $u(x), v(x)$  可导, 求  $y'$ :

$$(1) y = \sqrt{u^2(x) + v^2(x)}; \quad (2) y = \arctan \frac{u(x)}{v(x)}; \quad (3) y = \sqrt[n]{u};$$

$$(4) y = \frac{u}{v^2}; \quad (5) y = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}; \quad (6) y = u^{e^v}.$$

17. 通过对  $(1+x)^n$  求导并利用二项式定理证明

$$(1) \sum_{k=0}^n k C_n^k = n 2^{n-1}; \quad (2) \sum_{k=0}^n k^2 C_n^k = n(n+1) 2^{n-2}.$$

18. 证明, 可导偶函数的导数为奇函数, 可导奇函数的导数为偶函数, 可导周期函数的导数仍为周期函数.

19. (\*) 设  $a_{ij}(x)$  均为可导函数, 求行列式函数  $\det(a_{ij}(x))_{n \times n}$  的导数.

20. (\*) Riemann 函数定义为

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{p}, & x = \frac{q}{p} \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}, p, q \text{ 为互素正整数}, \\ 0, & x \text{ 为 } (0, 1) \text{ 中的无理数}. \end{cases}$$

证明 Riemann 函数  $R(x)$  处处不可导.

## §4.2 高阶导数

在前一节开始我们已经提到, 要考察质点的运动, 除了考虑速度, 还要考虑加速度. 速度是位移函数的导数, 加速度则是速度的导数.

**定义 4.2.1** (高阶导数). 设  $f$  在  $x_0$  附近可导, 如果导函数  $f'$  在  $x_0$  处仍可导, 则称  $f$  在  $x_0$  处 2 阶可导. 记

$$f''(x_0) = (f')'(x_0),$$

称为  $f$  在  $x_0$  处的 2 阶导数. 一般地, 如果  $f$  在  $x_0$  附近  $n$  ( $n \geq 1$ ) 阶可导, 且  $n$  阶导函数  $f^{(n)}$  在  $x_0$  处可导, 则称  $f$  在  $x_0$  处  $n+1$  阶可导, 记

$$f^{(n+1)}(x_0) = (f^{(n)})'(x_0),$$

称为  $f$  的  $n+1$  阶导数.



按照我们的记号,  $f^{(1)} = f'$ ,  $f^{(2)} = f''$ ,  $f^{(3)} = f'''$  等等. 我们约定  $f^{(0)} = f$ . 有时也用下面的记号表示高阶导数:

$$f'' = \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad f^{(3)} = f''' = \frac{d^3 f}{dx^3}, \quad \text{等等}.$$

**例 4.2.1.** 求线性函数  $f(x) = ax + b$  的 2 阶导数.

**解.**  $f'(x) = (ax + b)' = a$ ,  $f''(x) = (a)' = 0$ . 因此线性函数的 2 阶导数恒为零, 即匀速直线运动的加速度为零.  $\square$

**例 4.2.2.** 求二次函数  $f(x) = x^2$  的 2 阶导数.

**解.**  $f'(x) = (x^2)' = 2x$ ,  $f''(x) = (2x)' = 2$ , 即二次函数的 2 阶导数为常数.  $\square$

**定义 4.2.2.** 如果  $f$  在区间  $I$  的每一点处均  $n$  阶可导, 则称  $f$  在  $I$  中  $n$  阶可导; 如果  $f$  可导, 且导函数  $f'$  连续, 则称  $f$  (1 阶) 连续可导, 记为  $f \in C^1(I)$ ; 一般地, 如果  $f$  在  $I$  中  $n$  阶可导, 且  $n$  阶导函数  $f^{(n)}$  连续, 则称  $f$   $n$  阶连续可导, 记为  $f \in C^n(I)$ . 如果  $f$  在  $I$  中存在任意阶导数, 则称  $f$  是光滑的, 记为  $f \in C^\infty(I)$ .

**例 4.2.3.** 可微函数的导函数不一定连续.

**解.** 考虑下面的函数

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{x}, & x \in (0, 1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

我们先计算  $f$  在  $x = 0$  处的导数:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} = 0,$$

这里我们用到了估计

$$\left| \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} \right| \leq \sqrt{x} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0^+).$$

当  $x > 0$  时, 由复合求导, 有

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{x} - x^{\frac{3}{2}} \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} \\ &= \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{x} - x^{-\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

考察  $f'$  在  $x_n = \frac{1}{2n\pi}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 处的取值知  $f'(x_n) \rightarrow -\infty$ , 因此  $f'$  不连续.  $\square$

**例 4.2.4.** 设  $k = 1, 2, \dots$ , 则函数

$$f(x) = \begin{cases} x^{2k+1} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

是  $C^k$  函数, 但不是  $C^{k+1}$  的.

**解.** 同上例一样, 可以计算出  $f'(0) = 0$ , 且

$$f'(x) = \begin{cases} (2k+1)x^{2k} \sin \frac{1}{x} - x^{2k-1} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

同理,

$$f''(x) = \begin{cases} 2k(2k+1)x^{2k-1} \sin \frac{1}{x} - 4kx^{2k-2} \cos \frac{1}{x} - x^{2k-3} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

继续求导可得  $f^{(k)}(0) = 0$ , 且当  $x \neq 0$  时,

$$f^{(k)}(x) = x^2 \phi(x) \pm x \sin \frac{1}{x} \text{ 或 } x^2 \phi(x) \pm x \cos \frac{1}{x},$$

其中  $\phi(x)$  在  $x = 0$  附近有界. 因此  $f^{(k)}$  连续但在  $x = 0$  处不可导.  $\square$

**例 4.2.5.** (\*) 分析函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$$

的高阶可导性质.

**解.** 如同前面的例子那样, 可以计算出  $f'(0) = 0$ , 且

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0. \end{cases}$$

我们用归纳法说明

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ p_k(\frac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0, \end{cases}$$

其中  $p_k(t)$  是次数为  $2k$  的多项式.  $k = 1$  时  $p_1(t) = t^2$ . 假设  $f^{(k)}$  如上, 则显然  $f^{(k+1)}(0) = 0$ , 而

$$\begin{aligned} f_+^{(k+1)}(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{p_k(\frac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x}}}{x} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{tp_k(t)}{e^t} = 0. \end{aligned}$$

因此  $f^{(k+1)}(0) = 0$ . 当  $x > 0$  时

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= p'_k\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}} + p_k\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} \\ &= p_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}, \end{aligned}$$

其中  $p_{k+1}(t) = t^2 p_k(t) - t^2 p'_k(t)$ . 这就说明  $f$  是任意阶可导的光滑函数.  $\square$

**命题 4.2.1.** 设  $f, g$  均为  $n$  阶可导函数, 则

- (1)  $(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};$   
 (2) (Leibniz)  $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}$ , 其中  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  为组合数.

**证明.** (1) 这可由求导运算的线性及归纳法直接得到.

(2) 对  $n$  用数学归纳法.  $n = 1$  的情形就是求导运算的导性. 设公式对  $n = k$  成立, 则  $n = k + 1$  时

$$\begin{aligned} (fg)^{(k+1)} &= [(fg)^{(k)}]' = \sum_{l=0}^k C_k^l [f^{(k-l)} g^{(l)}]' \\ &= \sum_{l=0}^k C_k^l [f^{(k-l+1)} g^{(l)} + f^{(k-l)} g^{(l+1)}] \\ &= C_k^0 f^{(k+1)} g + \sum_{l=1}^k C_k^l f^{(k-l+1)} g^{(l)} + \sum_{l=0}^{k-1} C_k^l f^{(k-l)} g^{(l+1)} + C_k^k f g^{(k+1)} \\ &= f^{(k+1)} g + \sum_{l=1}^k [C_k^l + C_k^{l-1}] f^{(k-l+1)} g^{(l)} + f g^{(k+1)} \\ &= \sum_{l=0}^{k+1} C_{k+1}^l f^{(k+1-l)} g^{(l)}, \end{aligned}$$

其中我们用到组合恒等式  $C_k^l + C_k^{l-1} = C_{k+1}^l$ .  $\square$

现在再看几个高阶导数计算和应用的例子.

**例 4.2.6.** 设多项式  $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$  次数为  $n$ , 则

- (1)  $p_n^{(n)}(x) = n! a_n$ , 从而  $p_n^{(k)} = 0, \forall k > n;$   
 (2)  $a_k = \frac{1}{k!} p_n^{(k)}(0), k = 0, 1, \cdots, n.$

**证明.** 直接逐项求导, 利用归纳法可得

$$p_n^{(k)}(x) = n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k} + (n-1)\cdots(n-k)a_{n-1} x^{n-1-k} + \cdots + k! a_k,$$

其中  $1 \leq k \leq n$ . 特别地, 取  $k = n$  就得到 (1), 而令  $x = 0$  就得到 (2).  $\square$

**例 4.2.7.** 求函数  $f(x) = a^x$  的各阶导数.

解.  $f'(x) = a^x \ln a$ ,  $f''(x) = a^x (\ln a)^2$ ,  $\dots$ ,  $f^{(n)}(x) = a^x (\ln a)^n$ .  $\square$

例 4.2.8. 求函数  $f(x) = \sin x$ ,  $\cos x$  的各阶导数.

解.  $(\sin x)' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ ,  $(\sin x)'' = -\sin x = \sin(x + \pi)$ . 一般地, 如果  $(\sin x)^{(k)} = \sin(x + \frac{k\pi}{2})$ , 则

$$(\sin x)^{(k+1)} = \cos(x + \frac{k\pi}{2}) = \sin(x + \frac{(k+1)\pi}{2}),$$

这说明  $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$ . 同理可得  $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$ .  $\square$

例 4.2.9. 求函数  $\frac{1}{1-x}$ ,  $\frac{1}{2-3x+x^2}$  的各阶导数.

解.  $(\frac{1}{1-x})' = \frac{1}{(1-x)^2}$ ,  $(\frac{1}{1-x})'' = \frac{2}{(1-x)^3}$ , 用归纳法易见

$$(\frac{1}{1-x})^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}},$$

从而

$$(\frac{1}{2-3x+x^2})^{(n)} = (\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x})^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} - \frac{n!}{(2-x)^{n+1}}.$$

这里使用了裂项的技巧.  $\square$

例 4.2.10. (\*) 设  $f(x) = \arctan x$ , 求  $f^{(n)}(x)$ .

解. 记  $y = \arctan x$ , 则  $x = \tan y$ , 从而

$$y' = \frac{1}{1+x^2} = \cos^2 y = \cos y \cdot \sin(y + \frac{\pi}{2}).$$

对  $x$  再次求导, 得

$$\begin{aligned} y'' &= y' \cdot [-\sin y \cdot \sin(y + \frac{\pi}{2}) + \cos y \cdot \cos(y + \frac{\pi}{2})] \\ &= \cos^2 y \cdot \cos(2y + \frac{\pi}{2}) \\ &= \cos^2 y \cdot \sin 2(y + \frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

继续对  $x$  求导, 用归纳法可以发现

$$f^{(n)}(x) = y^{(n)} = (n-1)! \cos^n y \cdot \sin n(y + \frac{\pi}{2}).$$

例 4.2.11. 设  $f, g$  均为 3 阶可导函数, 求复合函数  $f(g)$  的 3 阶导数.

解.  $[f(g)]' = f'(g)g'$ ,  $[f(g)]'' = [f'(g)g']' = f''(g)g'g' + f'(g)g''$ , 从而

$$[f(g)]^{(3)} = [f''(g)g'g' + f'(g)g'']' = f^{(3)}(g)(g')^3 + 3f''(g)g''g' + f'(g)g^{(3)}.$$

这种计算可以推广到高阶导数, 从而得到一个类似于 Leibniz 公式的等式.  $\square$

### 习题 4.2

1. 求下列函数指定阶的导数:

- (1)  $f(x) = e^x \cos x$ , 求  $f^{(5)}$ ;
- (2)  $f(x) = x^2 \ln x + x \ln^2 x$ , 求  $f''$ ;
- (3)  $f(x) = x^2 e^x$ , 求  $f^{(10)}$ ;
- (4)  $f(x) = x^5 \cos x$ , 求  $f^{(50)}$ ;
- (5)  $f(x) = (x^2 + 1) \cosh x$ , 求  $f^{(10)}$ ;
- (6)  $f(x) = x \sinh x$ , 求  $f^{(100)}$ .

2. 求下列函数的  $n$  阶导数:

- (1)  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ;
- (2)  $f(x) = \sin ax \sin bx$ ;
- (3)  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ;
- (4)  $f(x) = x \ln x$ ;
- (5)  $f(x) = \frac{x^n}{1+x}$ ;
- (6)  $f(x) = x^n e^{ax}$ ;
- (7)  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 8}$ ;
- (8)  $f(x) = x \cos ax$ ;
- (9)  $f(x) = \frac{e^x}{x}$ .

3. 证明下列等式:

- (1)  $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}, \forall n \geq 1$ ;
- (2)  $(\sin^4 x + \cos^4 x)^{(n)} = 4^{n-1} \cos(4x + \frac{\pi}{2}n), \forall n \geq 1$ ;
- (3)  $(e^{ax} \sin bx)^{(n)} = (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax} \sin(bx + n\varphi)$ , 其中  $\varphi$  满足条件

$$\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

4. 求函数  $f(x) = \sqrt{1+x}$  的各阶导数.

5. 求函数  $f(x) = e^x \cos x$  的各阶导数.

6. 设  $f$  的各阶导数存在, 求  $y$  的二阶和三阶导数:

- (1)  $y = f(x^3)$ ,
- (2)  $y = f(e^{-x})$ ,
- (3)  $y = f(f(x))$ ,
- (4)  $y = f(\ln x)$ .

7. 验证函数  $y = e^x \sin x$  满足等式  $y'' - 2y' + 2y = 0$ .

8. 验证函数  $y = a \sin(\alpha x + \varphi) + b \cos(\alpha x + \varphi)$  满足等式  $y'' + \alpha^2 y = 0$ .

9. 验证函数  $y = ae^{\alpha x} + be^{\beta x}$  满足等式  $y'' - (\alpha + \beta)y' + \alpha\beta y = 0$ .
10. 验证函数  $y = \arcsin x$  满足等式  $xy' = (1 - x^2)y''$ , 并求  $y^{(n)}(0)$ .
11. (\*) 通过对  $(1 - x)^n$  求导并利用二项式定理证明等式

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k k^m = \begin{cases} 0, & m = 0, 1, \dots, n-1, \\ (-1)^n n!, & m = n. \end{cases}$$

### §4.3 不定积分

在前面两节中, 我们研究了函数的可导性质. 现在我们考虑这样的问题, 即一个给定的函数是另一个可导函数的导数吗? 如果函数  $f$  给定, 问题就是考虑方程

$$F'(x) = f(x) \quad (4.2)$$

的解. 我们要问, (4.2) 的解存在吗? 如果存在的话, 有多少个解? 在下一章我们将说明, 不是对所有的  $f$  (4.2) 都有解; 如果  $F$  是一个解, 则显然  $F + C$  ( $C$  为常数) 也是一个解, 我们来说明这也是所有可能的其它解.

**命题 4.3.1.** 设  $f$  为区间  $I$  上的可微函数, 则  $f' = 0$  当且仅当  $f = C$  为常值函数.

**证明.** 只要证明必要性即可. 设  $f' = 0$ , 在定义域  $I$  中任取两点  $a < b$ , 我们证明必有  $f(a) = f(b)$ . 设  $\varepsilon > 0$  是任意取定的正数. 考虑集合

$$A = \{x \in [a, b] \mid |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon|x - a|\} \subset [a, b].$$

因为  $a \in A$ , 因此  $A$  不是空集. 设  $\xi$  为  $A$  的上确界. 由  $f$  的连续性知  $\xi \in A$ . 我们断言  $\xi = b$ . 事实上, 如果  $\xi < b$ , 则由  $f'(\xi) = 0$  以及导数的定义知存在  $\xi'$ , 使得  $\xi < \xi' \leq b$ , 且

$$\left| \frac{f(\xi') - f(\xi)}{\xi' - \xi} \right| = \left| \frac{f(\xi') - f(\xi)}{\xi' - \xi} - f'(\xi) \right| \leq \varepsilon,$$

即有

$$|f(\xi') - f(\xi)| \leq \varepsilon|\xi' - \xi|.$$

因此, 由  $\xi < \xi' \leq b$  以及三角不等式可得

$$\begin{aligned} |f(\xi') - f(a)| &\leq |f(\xi') - f(\xi)| + |f(\xi) - f(a)| \\ &\leq \varepsilon|\xi' - \xi| + \varepsilon|\xi - a| = \varepsilon|\xi' - a|. \end{aligned}$$

这说明  $\xi' \in A$ , 这和  $\xi$  的选取相矛盾, 因此只能有  $\xi = b$ . 即

$$|f(a) - f(b)| \leq \varepsilon|a - b|.$$

因为  $\varepsilon$  是任取的, 令  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , 上式表明  $f(a) = f(b)$ .  $\square$

注. (1) 如果将导数解释为速度, 则命题说的就是速度为零时, 位移不变. 基本的想法是利用连续性论证方法先去证明平均速度很小. 在下一章中我们会给出这件事实的另一个证明.

(2) 如果存在常数  $M$  使得  $|f'| \leq M$ , 则把命题证明过程中的  $\varepsilon$  换成  $M + \varepsilon$  后可以得出下面的估计

$$|f(a) - f(b)| \leq M|a - b|,$$

即  $f$  为 Lipschitz 函数.

同理, 如果关于导数的条件改为  $f' \geq 0$ , 则可说明  $f$  单调递增 (习题).  $\square$

现在我们回到方程 (4.2). 如果  $F_1, F_2$  都是 (4.2) 的解, 则  $(F_1 - F_2)' = 0$ , 从而  $F_1 - F_2 = C$  为常数.

**定义 4.3.1** (原函数). 方程 (4.2) 的一个可微解  $F$  称为函数  $f$  的一个原函数.

根据上面的讨论, 任何两个原函数之间只相差一个常数. 对于一般的原函数我们给出下面的定义:

**定义 4.3.2** (不定积分). 设函数  $f$  在区间  $I$  上有原函数, 则我们用记号

$$\int f(x)dx$$

表示  $f$  的原函数的一般表达式, 即如果  $F$  为  $f$  的一个原函数, 则

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad x \in I,$$

其中  $C$  为常数.

根据定义, 如果  $F$  是  $f$  的原函数, 则  $dF = f(x)dx$ , 因此

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx,$$

因此求原函数的过程是求微分过程之逆. 我们可以将前一节的计算结果用原函数

表示如下:

- |  |   |
|--|---|
| 1. $\int 0 dx = C;$                        | 2. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1);$ |
| 3. $\int e^x dx = e^x + C;$                | 4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ (a > 0, a \neq 1);$                 |
| 5. $\int \frac{1}{x} = \ln x  + C;$        | 6. $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C;$              |
| 7. $\int \cos x dx = \sin x + C;$          | 8. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C;$                          |
| 9. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$         | 10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\arccos x + C;$                        |
| 11. $\int \sec^2 x dx = \tan x + C;$       | 12. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C;$                                |
| 13. $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C;$      | 14. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = -\operatorname{arccot} x + C;$                 |
| 15. $\int \cosh x dx = \sinh x + C;$       | 16. $\int \sinh x dx = \cosh x + C;$  |
| 17. $\int \tanh^2 x dx = x - \tanh x + C;$ | 18. $\int \coth^2 x dx = x - \coth x + C.$                                    |

我们当然要问, 除了上面列出的函数之外, 还有哪些函数有原函数? 下面重要的结果给出了这个问题的部分答案.

**定理 4.3.2** (Newton-Leibniz). 区间  $I$  中的连续函数都有原函数. 具体来说, 设  $f$  连续,  $a \in I$ , 则函数

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in I$$

是  $f$  的一个原函数.

**证明.** 设  $x_0 \in I$ . 因为  $f$  连续, 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I.$$

此时

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)dt - f(x_0) \right| \\ &= \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x [f(t) - f(x_0)]dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|dt \right| \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

这就推出  $F$  在  $x_0$  处可导, 且

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

由  $x_0$  的任意性即知  $F$  为  $f$  的原函数. □



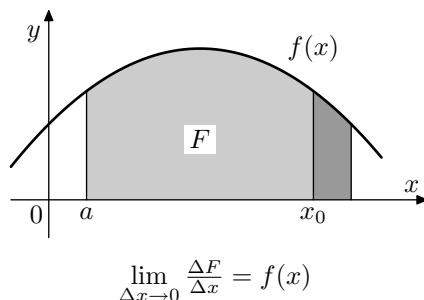


图 4.2 Newton-Leibniz 公式

注. (1) 这个定理又称为微积分基本定理, 这是本课程最重要的一个定理, 它将微分和积分联系在了一起.

(2) 在第六章中我们会稍稍降低定理中对  $f$  的连续性要求, 得到一样的结论.

我们现在将 Newton-Leibniz 的这个重要定理改写一下. 设  $f$  在区间  $I$  中连续,  $G$  为  $f$  的任一原函数, 则存在常数  $C$ , 使得  $G(x) = \int_a^x f(t)dt + C$ , 因此

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) = G \Big|_a^b \quad (\text{Newton-Leibniz 公式}).$$

因为  $f$  的不定积分为原函数, 因此上式也可写为

$$\int_a^b f(x)dx = \left( \int f(x)dx \right) \Big|_a^b,$$

从这个等式来看, 连续函数在区间上的积分就好像是在它的不定积分中代入上下积分限一样.

Newton-Leibniz 公式还可写为 (当  $G$  连续可微时)

$$\int_a^b G'(x)dx = G(b) - G(a) = G \Big|_a^b \quad (\text{Newton-Leibniz 公式}).$$

这是一个很常用的形式, 它有一个物理解释: 如果  $G$  是随时间  $x$  变化的物理量,  $G'$  就表示物理量的变化率.  $G'$  的积分表示无穷小变化量在某一段时间内的积累, 最终就等于总的变化量 (右式差值). 例如, 质点位移的变化率就是速度, 速度的积分就又得到位移.

有了这些 Newton-Leibniz 公式, 某些情形下连续函数积分的计算就变得很简单了.

**例 4.3.1.** 设  $\alpha > 0$ , 计算积分  $\int_0^1 x^\alpha dx$ .

**解.** 由 Newton-Leibniz 公式, 有

$$\int_0^1 x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}.$$

相比起直接用积分的定义来计算, 这个计算简单多了.  $\square$

**例 4.3.2.** 设  $x > 0$ , 计算积分  $\int_1^x \frac{1}{t} dt$ .

**解.** 由 Newton-Leibniz 公式, 有

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln t \Big|_1^x = \ln x.$$

利用这个等式我们可以将对数函数定义为连续函数  $\frac{1}{t}$  从 1 到  $x$  的积分, 即积分给出了定义新函数的一种手段, 这种手段不同于对函数做初等的四则运算.  $\square$

**例 4.3.3.** 计算积分  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$ .

**解.** 因为

$$(\sin^2 x)' = 2 \sin x (\sin x)' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x,$$

故由 Newton-Leibniz 公式, 有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = \sin^2 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

**例 4.3.4.** 计算积分  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ .

**解.** 由 Newton-Leibniz 公式, 有

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6}.$$

**例 4.3.5.** 计算积分  $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ .

**解.** 由 Newton-Leibniz 公式, 有

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

**例 4.3.6.** 计算积分  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$ .

**解.** 由 Newton-Leibniz 公式, 有

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \Big|_0^1 = \ln(1 + \sqrt{2}).$$

现在我们回到不定积分. 我们有

**命题 4.3.3** (不定积分的线性性质). 设  $f, g$  在区间  $I$  中均有原函数, 则

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx,$$

其中  $\alpha, \beta$  为常数.

**证明.** 这可由求导的线性性和不定积分的定义立即得到. □

下面我们计算几个简单的不定积分作为例子.

**例 4.3.7.** 求不定积分  $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$ .

**解.** 由不定积分的线性性质, 有

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx \\ &= \int \frac{1}{\sin^2 x} dx + \int \frac{1}{\cos^2 x} dx \\ &= \tan x - \cot x + C. \end{aligned}$$

在本例中, 我们充分利用了三角函数的性质对被积函数进行裂项. 下例是另外一种裂项方法.

**例 4.3.8.** 设  $a \neq 0$ , 求不定积分  $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx$ .

**解.** 由不定积分的线性性质, 有

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx &= \frac{1}{2a} \left[ \int \frac{1}{x - a} dx - \int \frac{1}{x + a} dx \right] \\ &= \frac{1}{2a} [\ln |x - a| - \ln |x + a|] + C \\ &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C. \end{aligned}$$

下面的命题有时也比较有用.

**命题 4.3.4.** 设  $f$  的原函数为  $F$ . 如果  $f$  可逆, 且其逆函数  $g$  可微, 则

$$\int g(x) dx = xg(x) - F(g(x)) + C.$$

**证明.** 记  $G(x) = xg(x) - F(g(x))$ , 由  $f(g(x)) = x$  以及复合求导, 有

$$\begin{aligned} G'(x) &= g(x) + xg'(x) - F'(g(x))g'(x) \\ &= g(x) + xg'(x) - f(g(x))g'(x) \\ &= g(x) + xg'(x) - xg'(x) = g(x). \end{aligned}$$

因此  $G(x)$  为  $g$  的原函数. □

**例 4.3.9.** 求不定积分  $\int \cot x \, dx$ .

**解.** 由

$$(\ln |\sin x|)' = \frac{1}{\sin x} (\sin x)' = \cot x,$$

即知

$$\int \cot x \, dx = \ln |\sin x| + C.$$

**例 4.3.10.** 求不定积分  $\int \operatorname{arccot} x \, dx$ .

**解.** 根据上例和上面的命题, 有

$$\begin{aligned} \int \operatorname{arccot} x \, dx &= x \operatorname{arccot} x - \ln |\sin \operatorname{arccot} x| + C \\ &= x \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C. \end{aligned}$$

读者可用求导的方法直接验证结论的正确性. □

在下一节我们将介绍不定积分的更多计算方法.

### 习题 4.3

1. 求下列不定积分:

$$\begin{aligned} (1) & \int (3x^2 + 1) dx; & (2) & \int (2 + x^2)^3 dx; & (3) & \int \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx; \\ (4) & \int (2^x + 3^x)^2 dx; & (5) & \int \tan^2 x \, dx; & (6) & \int (e^x - e^{-x})^3 dx; \\ (7) & \int \frac{x^3 + 3x - 2}{x} dx; & (8) & \int \frac{2x^2}{1 + x^2} dx; & (9) & \int \cos^2 x \, dx. \end{aligned}$$

2. 求下列不定积分:

$$\begin{aligned} (1) & \int \cos x \cos 2x \, dx; & (2) & \int \sin(2x) dx; & (3) & \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx; \\ (4) & \int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx; & (5) & \int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx; & (6) & \int \sqrt{1 - \sin 2x} \, dx. \end{aligned}$$

3. 求下列不定积分:

$$(1) \int e^{-|x|} dx, \quad (2) \int |x| dx, \quad (3) \int \max(1, x^2) dx, \quad (4) \int |\sin x| dx.$$

4. 证明, 如果  $F(t)$  为  $f(t)$  的原函数, 则  $\frac{1}{a}F(ax + b)$  是  $f(ax + b)$  的原函数.

5. 求下列积分

$$(1) \int_0^1 (1-x^2)^2 dx, \quad (2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx, \quad (3) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x dx, \quad (4) \int_0^1 \arccos x dx.$$

6. 求下列积分

$$(1) \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(2+x)} dx, \quad (2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx, \quad (3) \int_0^1 \sqrt{x} dx.$$

7. 设  $f$  在  $(a, b)$  中可导, 且  $|f'(x)| \leq M, \forall x \in (a, b)$ . 证明, 极限  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  和  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$  都存在且有限.

8. 设  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  中的左导数存在且恒为零, 证明  $f$  为常值函数; 对于右导数有类似的结论.

9. 设  $f$  周期为  $T$ , 则其原函数  $F$  以  $T$  为周期当且仅当  $F(T) = F(0)$ .

10. 设  $f$  为奇函数, 则其原函数为偶函数; 设  $f$  为偶函数, 则其原函数  $F$  为奇函数当且仅当  $F(0) = 0$ .

## §4.4 积分的计算

不定积分是微分的逆运算. 我们知道, 微分运算满足线性性, 导性和形式不变性, 对应到不定积分就有相应的积分方法. 我们在这一节中就详细介绍不定积分的各种计算方法, 实际上这是为了计算定积分而作的预备 (因为有 Newton-Leibniz 公式).

### §4.4.1 换元积分法

**命题 4.4.1** (换元积分法). 设  $f(u)$  是在区间  $J$  中有定义的函数,  $u = \phi(x)$  是区间  $I$  中的可微函数, 且  $\phi(I) \subset J$ .

(1) 如果  $f$  在  $J$  中存在原函数  $F$ , 则  $F(\phi)$  是  $f(\phi)\phi'$  在区间  $I$  中的原函数, 即

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int f(u)du + C = F(\phi(x)) + C;$$

(2) 设  $\phi$  可逆, 且其逆可微,  $\phi(I) = J$ . 如果  $f(\phi(x))\phi'(x)$  有原函数  $G$ , 则  $f$  有原函数  $G(\phi^{-1}(u))$ , 即

$$\int f(u)du = G(\phi^{-1}(u)) + C.$$

**证明.** (1) 如果  $F' = f$ , 则由复合求导, 有

$$[F(\phi)]' = f(\phi)\phi',$$

所以  $F(\phi)$  是  $f(\phi)\phi'$  的原函数.

(2) 当  $\phi^{-1}$  可微时, 对  $\phi(\phi^{-1}(u)) = u$  求导, 得

$$[\phi^{-1}(u)]' = \frac{1}{\phi'(x)}, \quad x = \phi^{-1}(u).$$

因此

$$[G(\phi^{-1}(u))]' = G'(\phi^{-1}(u))[\phi^{-1}(u)]' = f(u)\phi'(\phi^{-1}(u))\frac{1}{\phi'(x)} = f(u),$$

所以  $G(\phi^{-1}(u))$  是  $f(u)$  的原函数.  $\square$

注. (1) 换元积分法又称变量替换法, 其要点是将变量  $u$  通过  $u = \phi(x)$  换成  $x$  (或反之).

(2) 在下一章中我们将知道, 如果  $\phi'(x) \neq 0, \forall x \in I$ , 则  $\phi$  可逆, 因此逆函数  $\phi^{-1}$  也可微.

(3) 由 Newton-Leibniz 公式, 如果  $f$  连续,  $\phi$  连续可微, 则相应地有关于连续函数定积分的换元公式.

**例 4.4.1.** 求不定积分  $\int \cot x \, dx$ .

解. 令  $u = \sin x$ , 则

$$\begin{aligned} \int \cot x \, dx &= \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \\ &= \int \frac{d \sin x}{\sin x} \\ &= \int \frac{du}{u} \\ &= \ln |u| + C = \ln |\sin x| + C. \end{aligned}$$

**例 4.4.2.** 求不定积分  $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx$ .

解. 令  $u = \sqrt{x}$ , 则

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx &= 2 \int \frac{d\sqrt{x}}{1+x} \\ &= 2 \int \frac{du}{1+u^2} \\ &= 2 \arctan u + C = 2 \arctan \sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

**例 4.4.3.** 求积分  $\int_0^1 x e^{x^2} dx$ .

解. 令  $u = x^2$ , 则

$$\int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (e - 1).$$

例 4.4.4. 求不定积分  $\int \frac{1}{1+e^x} dx$ .

解. 令  $u = e^{-x}$ , 则  $du = -e^{-x} dx$ , 从而

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+e^x} dx &= \int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx \\ &= - \int \frac{du}{1+u} \\ &= -\ln(1+u) + C = -\ln(1+e^{-x}) + C.\end{aligned}$$

例 4.4.5. 求不定积分  $\int \sec x dx$ .

解. 令  $u = \sin x$ , 则

$$\begin{aligned}\int \sec x dx &= \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{d \sin x}{1 - \sin^2 x} \\ &= \int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + C.\end{aligned}$$

例 4.4.6. 求积分  $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$  ( $a > 0$ ).

解. 令  $x = a \sin t$ ,  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . 则

$$\begin{aligned}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos t (a \cos t) dt \\ &= \frac{1}{2} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt \\ &= \frac{1}{2} a^2 \left( t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{4} a^2.\end{aligned}$$

#### §4.4.2 分部积分法

命题 4.4.2 (分部积分法). 设  $u(x), v(x)$  在区间  $I$  中可微, 如果  $u'(x)v(x)$  有原函数, 则  $u(x)v'(x)$  也有原函数, 且

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx.$$

证明. 设  $u'(x)v(x)$  有原函数, 则由

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

得

$$\left[ u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx \right]' = u(x)v'(x).$$

这说明  $u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$  是  $u(x)v'(x)$  的原函数.  $\square$

注. (1) 分部积分法也可改写为

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

(2) 如果  $u, v$  均连续可微, 则分部积分法条件满足. 特别地, 对于定积分有

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

**例 4.4.7.** 求不定积分  $\int x^2 \ln x dx$ .

**解.** 取  $u(x) = \ln x$ ,  $v(x) = \frac{1}{3}x^3$ , 则

$$\begin{aligned}\int x^2 \ln x dx &= \int \ln x d\left(\frac{1}{3}x^3\right) \\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \int \frac{1}{3}x^3 d(\ln x) \\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \int \frac{1}{3}x^3 \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C.\end{aligned}$$

注意这个例子中  $x$  的幂次是升高的, 这是为了消去  $\ln x$ .

**例 4.4.8.** 求不定积分  $\int x^2 \cos x dx$ .

**解.** 取  $u(x) = x^2$ ,  $v(x) = \sin x$ , 则

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos x dx &= \int x^2 d(\sin x) \\ &= x^2 \sin x - \int \sin x d(x^2) \\ &= x^2 \sin x + 2 \int x d(\cos x) \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \int \cos x dx \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.\end{aligned}$$

注意这个例子中  $x$  的幂次是下降的, 目的是消去  $x$  的幂次.

**例 4.4.9.** 求不定积分  $\int \sqrt{1+x^2} dx$ .



解. 先用分部积分:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+x^2} dx &= x\sqrt{1+x^2} - \int x(\sqrt{1+x^2})' dx \\ &= x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ &= x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{1+x^2-1}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ &= x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2} dx + \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx\end{aligned}$$

在等式右边也出现了欲求不定积分, 移项后得

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+x^2} dx &= \frac{1}{2} \left[ x\sqrt{1+x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \right] \\ &= \frac{1}{2} [x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2})] + C.\end{aligned}$$

我们再看一个类似的例子.

**例 4.4.10.** 设  $a \neq 0$ , 求不定积分  $I = \int e^{ax} \cos bxdx$  和  $J = \int e^{ax} \sin bxdx$ .

解. 利用分部积分, 有

$$\begin{aligned}I &= \int e^{ax} \cos bxdx = \frac{1}{a} \int \cos bxd(e^{ax}) \\ &= \frac{1}{a} \left[ e^{ax} \cos bx + b \int e^{ax} \sin bxdx \right] \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} J.\end{aligned}$$

同理, 有

$$\begin{aligned}J &= \int e^{ax} \sin bxdx = \frac{1}{a} \int \sin bxd(e^{ax}) \\ &= \frac{1}{a} \left[ e^{ax} \sin bx - b \int e^{ax} \cos bxdx \right] \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} I.\end{aligned}$$

因此解出  $I, J$  为

$$I = \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C_1, \quad J = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C_2.$$

**例 4.4.11.** 求积分  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x dx$ .

解. 记  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$ , 则  $I_0 = \frac{\pi}{4}$ . 一般地, 有

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x d(\tan x) - I_{n-2} \\ &= \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - I_{n-2} \\ &= \frac{1}{n-1} - I_{n-2}. \end{aligned}$$

特别地,  $I_2 = 1 - I_0 = 1 - \frac{\pi}{4}$ ,  $I_4 = \frac{1}{3} - I_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$ . □

这个例子中用到了递推的方法, 我们再看一例.

**例 4.4.12.** 求不定积分  $I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$ , 其中  $a > 0$ ,  $n$  为非负整数.

解. 显然  $I_0 = x + C$ ,  $I_1 = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$ . 当  $n \geq 1$  时,

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \left[ \int \frac{x^2 + a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx - a^2 \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx \right] \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}. \end{aligned}$$

这样就得到了递推公式

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2na^2} I_n + \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^n},$$

由此可以求出所有的  $I_n$ . □

#### §4.4.3 有理函数的积分

有理函数是指形如

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

的函数, 其中  $P, Q$  均为关于变量  $x$  的多项式. 如果  $P$  的次数小于  $Q$ , 则称  $R$  为真分式. 显然, 任何有理函数都可以写成一个多项式和一个真分式之和. 因此, 有理函数的积分就只要考虑真分式的情形就可以了. 根据实系数多项式的因式分解可以证明, 真分式可以进一步分解为下面两种简单真分式之和:

$$\frac{A}{(x-a)^k}, \quad k \geq 1; \quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}, \quad k \geq 1, \quad p^2-4q < 0.$$

它们的不定积分可以计算如下:

(1)  $k = 1$ :

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C;$$

(2)  $k > 1$ :

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \frac{(x-a)^{1-k}}{1-k} + C;$$

(3)  $k = 1$ :

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx &= \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + (B - \frac{Ap}{2})}{x^2+px+q} dx \\ &= \frac{A}{2} \int \frac{(2x+p)}{x^2+px+q} dx + (B - \frac{Ap}{2}) \int \frac{dx}{x^2+px+q} \\ &= \frac{A}{2} \int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + (B - \frac{Ap}{2}) \int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4})} \\ &= \frac{A}{2} \ln(x^2+px+q) + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}} \arctan \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C; \end{aligned}$$

(4)  $k > 1$  时, 和 (3) 类似, 有

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} dx = \frac{A}{2} \frac{(x^2+px+q)^{1-k}}{1-k} + (B - \frac{Ap}{2}) \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k},$$

其中  $t = x + \frac{p}{2}$ ,  $a = \frac{1}{2}\sqrt{4q-p^2}$ . 上式右端的不定积分我们在前一小节中已经用递推的办法算过.

总之, 有理函数的不定积分可以用初等函数表示. 在具体的分解计算过程中我们通常可以用待定系数法, 我们来举例说明.

**例 4.4.13.** 求不定积分  $\int \frac{x^3+1}{x^2-2x+3} dx$ .

**解.** 先对被积函数作分解:

$$\begin{aligned} \frac{x^3+1}{x^2-2x+3} &= \frac{x(x^2-2x+3)}{x^2-2x+3} + \frac{2x^2-3x+1}{x^2-2x+3} \\ &= x + \frac{2(x^2-2x+3)}{x^2-2x+3} + \frac{x-5}{x^2-2x+3} \\ &= x + 2 + \frac{(x-1)-4}{(x-1)^2+2}, \end{aligned}$$

因此

$$\int \frac{x^3+1}{x^2-2x+3} dx = 2x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \ln(x^2-2x+3) - 2\sqrt{2} \arctan \frac{x-1}{\sqrt{2}} + C.$$

**例 4.4.14.** 求不定积分  $\int \frac{1}{x^3+1} dx$ .

解. 我们用待定系数法作分解:

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1},$$

上式两边消去分母, 得

$$1 = A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1),$$

比较等式两边  $x$  的幂次, 得

$$A + B = 0, \quad -A + B + C = 0, \quad A + C = 1,$$

解出  $A = \frac{1}{3}$ ,  $B = -\frac{1}{3}$ ,  $C = \frac{2}{3}$ , 因此

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^3+1} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{3} \int \frac{-x+2}{x^2-x+1} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2-x+1} \\ &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2}{\sqrt{3}}(x - \frac{1}{2}) + C. \end{aligned}$$

例 4.4.15. 求不定积分  $\int \frac{5x+6}{x^3+4x^2+5x+2} dx$ .

解. 用待定系数法作分解:

$$\frac{5x+6}{x^3+4x^2+5x+2} = \frac{5x+6}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+2},$$

上式两边消去分母得

$$5x+6 = A(x+1)(x+2) + B(x+2) + C(x+1)^2,$$

我们可以通过比较等式两边  $x$  的幂次解出  $A, B, C$ , 不过, 取  $x$  的特殊值代入等式也可以: 令  $x = -1$  得  $B = 1$ ; 令  $x = -2$  得  $C = -4$ ; 再令  $x = 0$  得  $A = 4$ . 因此

$$\frac{5x+6}{x^3+4x^2+5x+2} = \frac{4}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{4}{x+2},$$

欲求不定积分为

$$\int \frac{5x+6}{x^3+4x^2+5x+2} dx = 4 \ln|x+1| - \frac{1}{x+1} - 4 \ln|x+2| + C.$$

例 4.4.16. 求不定积分  $\int \frac{1}{x^4+1} dx$ .

解. 因为  $x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$ , 因此

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 - \sqrt{2}x + 1},$$

同前面的例子一样, 不难算出

$$A = \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = -\frac{\sqrt{2}}{4}, \quad D = \frac{1}{2},$$

因此

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^4 + 1} dx &= \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx - \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \left| \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right| + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan(\sqrt{2}x + 1) \\ &\quad + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan(\sqrt{2}x - 1) + C. \end{aligned}$$

#### §4.4.4 有理三角函数的积分

有理函数是两个多项式的商, 它们可以由变量  $x$  和常数经过有限次四则运算得到. 如果我们对三角函数和常数做有限次的四则运算, 则得到的函数称为有理三角函数. 因为  $\tan x$ ,  $\cot x$ ,  $\sec x$  和  $\csc x$  可以看成由  $\sin x$  和  $\cos x$  生成的有理三角函数, 故一般的有理三角函数可记为  $R(\sin x, \cos x)$ .

对有理三角函数的积分有一个通用的处理方法, 称为**万能变换**: 令

$$t = \tan \frac{x}{2},$$

则

$$x = 2 \arctan t, \quad dx = \frac{2}{1 + t^2} dt,$$

且有

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{\tan^2 \frac{x}{2} + 1} = \frac{2t}{1 + t^2},$$

以及

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

这说明有理三角函数的积分可以通过万能变换化为有理函数的积分, 因此是可以计算出来的. 在实际计算过程中, 有时也可以视情形采用变换  $t = \sin x$ ,  $t = \cos x$  或  $t = \tan x$  等, 以下举例说明.

例 4.4.17. 求不定积分  $\int \frac{dx}{\sin x + 2 \cos x + 3}.$

解. 令  $t = \tan \frac{x}{2}$ , 得

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin x + 2 \cos x + 3} &= \int \frac{2dt}{2t + 2(1 - t^2) + 3(1 + t^2)} \\ &= 2 \int \frac{dt}{t^2 + 2t + 5} \\ &= 2 \int \frac{dt}{(t + 1)^2 + 4} \\ &= \arctan \frac{t + 1}{2} + C = \arctan \left( \frac{1}{2} (1 + \tan \frac{x}{2}) \right) + C.\end{aligned}$$

例 4.4.18. 求不定积分  $\int \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos x + r^2} dx$  ( $0 < r < 1$ ).

解. 令  $t = \tan \frac{x}{2}$ , 得

$$\begin{aligned}\int \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos x + r^2} dx &= 2 \int \frac{1 - r^2}{(1 + r^2)(1 + t^2) - 2r(1 - t^2)} dt \\ &= 2(1 - r^2) \int \frac{dt}{(1 - r)^2 + (1 + r)^2 t^2} \\ &= 2 \arctan \left( \frac{1 + r}{1 - r} \tan \frac{x}{2} \right) + C.\end{aligned}$$

例 4.4.19. 求不定积分  $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^3 x} dx$ .

解. 令  $t = \cos x$ , 则

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^5 x}{\cos^3 x} dx &= - \int \frac{\sin^4 x}{\cos^3 x} d(\cos x) \\ &= - \int \frac{(1 - t^2)^2}{t^3} dt \\ &= - \int \left( \frac{1}{t^3} - \frac{2}{t} + t \right) dt \\ &= \frac{1}{2t^2} + 2 \ln |t| - \frac{1}{2} t^2 + C \\ &= \frac{1}{2 \cos^2 x} + 2 \ln |\arccos x| - \frac{1}{2} \cos^2 x + C.\end{aligned}$$

例 4.4.20. 求不定积分  $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x}$ .

解. 令  $t = \sin x$ , 则

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} &= \int \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x \cos^2 x} \\ &= \int \frac{dt}{t^2(1-t^2)} \\ &= \int \left( \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2(1-t)} + \frac{1}{2(1+t)} \right) dt \\ &= -\frac{1}{t} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C \\ &= -\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin x}{1-\sin x} + C. \end{aligned}$$

例 4.4.21. 求不定积分  $\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} \quad (a, b > 0)$ .

解. 令  $t = \tan x$ , 则

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} &= \int \frac{\cos^2 x d(\tan x)}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} \\ &= \int \frac{d(\tan x)}{a^2 \tan^2 x + b^2} \\ &= \frac{1}{ab} \arctan \left( \frac{a}{b} \tan x \right) + C. \end{aligned}$$

#### §4.4.5 某些无理积分

以下讨论几种可以转化为有理积分的某些无理函数的不定积分. 我们用记号  $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$  表示关于  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的有理函数.

(1) 形如  $R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}})$  的无理函数的积分, 其中  $ad-bc \neq 0$ , 而  $n, \dots, m$  是大于 1 的整数. 设  $k$  为这些整数的最小公倍数, 令

$$t = \left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{1}{k}},$$

则

$$x = \frac{dt^k - b}{a - ct^k}, \quad dx = \frac{ad-bc}{(a-ct^k)^2} kt^{k-1} dt,$$

从而  $R$  的积分可以转化为关于  $t$  的有理积分.

例 4.4.22. 求不定积分  $\int \frac{1}{x + \sqrt[3]{(2x+3)^2}} dx$ .

解. 令  $2x+3=t^3$ , 则

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x+\sqrt[3]{(2x+3)^2}} dx &= \int \frac{3t^2}{t^3+2t^2-3} dt \\ &= \int \frac{3t^2}{(t-1)(t^2+3t+3)} dt \\ &= \frac{3}{7} \int \left( \frac{1}{t-1} + \frac{6t+3}{t^2+3t+3} \right) dt \\ &= \frac{3}{7} \ln|t-1| + \frac{9}{7} \ln(t^2+3t+3) - \frac{12\sqrt{3}}{7} \arctan \frac{2t+3}{\sqrt{3}} + C.\end{aligned}$$

将  $t = \sqrt[3]{2x+3}$  代入上式就得到欲求不定积分.  $\square$

例 4.4.23. 求不定积分  $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{1-x}$ .

解. 令  $\frac{1-x}{1+x} = t^3$ , 则

$$x = \frac{1-t^3}{1+t^3}, \quad dx = \frac{-6t^2 dt}{(1+t^3)^2},$$

因此

$$\begin{aligned}\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{1-x} &= \int t \frac{1+t^3}{2t^3} \frac{-6t^2 dt}{(1+t^3)^2} \\ &= -3 \int \frac{dt}{1+t^3} \\ &= -\ln|t+1| + \frac{1}{2} \ln(t^2-t+1) - \sqrt{3} \arctan \frac{2}{\sqrt{3}} \left(t - \frac{1}{2}\right) + C.\end{aligned}$$

将  $t = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$  代入上式就得到欲求不定积分.  $\square$

(2) 形如  $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$  的函数积分, 其中  $R(x, y)$  为关于  $x, y$  的有理函数,  $a > 0$  时  $b^2 - 4ac \neq 0$ , 或  $a \neq 0, b^2 - 4ac > 0$ . 由于

$$ax^2+bx+c = a \left[ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2} \right],$$

故当  $a > 0$  时, 令

$$u = x + \frac{b}{2a}, \quad k^2 = \left| \frac{4ac-b^2}{4a^2} \right|,$$

原积分化为如下形式的积分:

$$\int R(u, \sqrt{u^2-k^2}), \quad \text{或} \quad \int R(u, \sqrt{u^2+k^2}),$$

分别进一步令  $u = k \sec t, u = k \tan t$  就把不定积分变成了有理三角函数的积分, 从而可以计算出来.



当  $a \neq 0, b^2 - 4ac > 0$  时, 令

$$u = x + \frac{b}{2a}, \quad k = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}},$$

则原积分化为如下形式积分:

$$\int R(u, \sqrt{u^2 - k^2}), \quad \text{或} \quad \int R(u, \sqrt{k^2 - u^2}),$$

分别进一步令  $u = k \sec t, u = k \sin t$  就把不定积分变成了有理三角函数的积分, 从而可以计算出来.

还有一些别的办法来计算这些积分. 例如, 如果  $a > 0$ , 令

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}x + t \quad (\text{或 } t - \sqrt{a}x),$$

则  $x$  为  $t$  的有理函数:

$$x = \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}t},$$

从而可以把原积分化为关于  $t$  的有理积分; 如果  $c > 0$ , 令

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx + \sqrt{c} \quad (\text{或 } tx - \sqrt{c}),$$

则  $x$  为  $t$  的有理函数:

$$x = \frac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2},$$

从而可以把原积分化为关于  $t$  的有理积分; 如果  $b^2 - 4ac > 0$ , 则  $ax^2 + bx + c = 0$  有两个实根:

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta),$$

令

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \alpha),$$

则  $x$  为  $t$  的有理函数:

$$x = \frac{a\beta - \alpha t^2}{a - t^2},$$

从而也可以把原积分化为关于  $t$  的有理积分; 这里用到的变量替换统称为 **Euler 替换**, 在实际的计算过程中当然也可灵活选择其它的变量替换方法.

**例 4.4.24.** 求不定积分  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 3x - 4}}$ .

**解.** 因为  $x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x + 4)$ , 我们令  $\sqrt{x^2 + 3x - 4} = (x - 1)t$ , 则

$$x = \frac{t^2 + 4}{t^2 - 1}, \quad dx = \frac{-10tdt}{(t^2 - 1)^2},$$

原积分化为

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+3x-4}} &= \int \frac{t^2-1}{t^2+4} \frac{t^2-1}{5t} \frac{-10tdt}{(t^2-1)^2} \\ &= -2 \int \frac{dt}{t^2+4} \\ &= -\arctan \frac{t}{2} + C \\ &= -\arctan \frac{\sqrt{x^2+3x-4}}{2(x-1)} + C.\end{aligned}$$

**例 4.4.25.** 求不定积分  $\int \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} dx$ .

**解.** 令  $x = \sin t$  ( $|t| < \frac{\pi}{2}$ ), 则

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{dt}{1+\sin^2 t} \\ &= \int \frac{\csc^2 t}{1+\csc^2 t} dt \\ &= -\int \frac{d(\cot t)}{2+\cot^2 t} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\cot t}{\sqrt{2}} + C \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}x} + C.\end{aligned}$$

值得指出的是, 并非所有的不定积分都可以用初等函数表示, 例如下面函数的不定积分都不能用初等函数表示:

$$e^{\pm x^2}, \sin(x^2), \cos(x^2), \frac{\sin x}{x}, \frac{\cos x}{x}, \sqrt{1-k^2 \sin^2 x}, \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}} \quad (0 < k < 1).$$

#### 习题 4.4

1. 求下列不定积分:

$$\begin{aligned}(1) \int \frac{dx}{1+\cos x}; \quad (2) \int \cos mx \cos nx dx; \quad (3) \int \sin mx \cos nx dx; \\ (4) \int \frac{dx}{\cos^4 x}; \quad (5) \int \frac{dx}{1+\sin x}; \quad (6) \int \sin mx \sin nx dx; \\ (7) \int \cot 2x dx; \quad (8) \int \sinh x \sinh 2x dx; \quad (9) \int \sinh^{-2} x \cosh^{-2} x dx.\end{aligned}$$

2. 求下列不定积分:

$$\begin{array}{lll}
 (1) \int x e^{-x^2} dx; & (2) \int \frac{x dx}{4+x^2}; & (3) \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1-x)}; \\
 (4) \int (1+e^x)^{-1} dx; & (5) \int (\sin x)^{-1} dx; & (6) \int (e^x + e^{-x})^{-1} dx; \\
 (7) \int x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx; & (8) \int (2^x + 3^x)^2 dx; & (9) \int x^{-\frac{1}{2}}(1+x)^{-1} dx; \\
 (10) \int \frac{dx}{4-x^2}; & (11) \int \frac{dx}{x \ln x}; & (12) \int x^2 \sqrt{1+x^3} dx; \\
 (13) \int (e^{-x} + e^{-2x}) dx; & (14) \int \sin^3 x \cos x dx; & (15) \int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}; \\
 (16) \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}; & (17) \int \frac{e^x dx}{2+e^x}; & (18) \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}; \\
 (19) \int \sin^2 2x dx; & (20) \int (x^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}} dx; & (21) \int (a^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}} dx; \\
 (22) \int (x^2 - a^2)^{-\frac{3}{2}} dx; & (23) \int \frac{(\arctan x)^2}{1+x^2} dx; & (24) \int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}; \\
 (25) \int x^5(1+x)^{-1} dx; & (26) \int (ax^2 + b)^{-1} dx; & (27) \int (x-a)^{-2}(x+b)^{-2} dx; \\
 (28) \int \frac{dx}{\cos^3 x}; & (29) \int \sin x \sin 3x dx; & (30) \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}.
 \end{array}$$

3. 求下列不定积分:

$$\begin{array}{lll}
 (1) \int \ln^2 x dx; & (2) \int x^2 e^{-3x} dx; & (3) \int \cos(\ln x) dx; \\
 (4) \int x \sin^{-2} x dx; & (5) \int x^2 \sin 2x dx; & (6) \int \arcsin x (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx; \\
 (7) \int \csc^3 x dx; & (8) \int \sqrt{x(1-x^3)} dx; & (9) \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx; \\
 (10) \int x^2 \arccos x dx; & (11) \int x^2 \arctan x dx; & (12) \int x^5 e^{x^2} dx; \\
 (13) \int x^3 e^{-x^2} dx; & (14) \int \sin(\ln x) dx; & (15) \int e^{2x} \sin^2 x dx; \\
 (16) \int x e^x \sin x dx; & (17) \int x^2 (\ln x)^2 dx; & (18) \int x^7 (1-x^4)^{-2} dx; \\
 (19) \int (\arcsin x)^2 dx; & (20) \int e^{-x} \sin 6x dx; & (21) \int x^2 (1+x^2)^{-2} dx; \\
 (22) \int x^2 \sqrt{a^2 + x^2} dx; & (23) \int x \sin \sqrt{x} dx; & (24) \int \sin x \ln(\tan x) dx; \\
 (25) \int e^{\sqrt{x}} dx; & (26) \int \arctan \sqrt{x} dx; & (27) \int \sin^{-2} x \ln(\sin x) dx; \\
 (28) \int x^{-2} \arcsin x dx; & (29) \int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx; & (30) \int x^2 (x^2 - 2)^{-\frac{1}{2}} dx.
 \end{array}$$

4. 求下列不定积分的递推公式 ( $m, n$  为非负整数):

$$\begin{aligned} (1) \int \sin^n x dx; \quad (2) \int \cos^n x dx; \quad (3) \int \sin^{-n} x dx; \\ (4) \int \cos^{-n} x dx; \quad (5) \int (\arcsin x)^n dx; \quad (6) \int (\ln x)^n dx; \\ (7) \int x^n e^x dx; \quad (8) \int \sin^m x \cos^n x dx; \quad (9) \int x^n (1+x)^{-1} dx. \end{aligned}$$

5. 求下列不定积分:

$$\begin{aligned} (1) \int \frac{(2x+3)dx}{(x-2)(x+5)}; \quad (2) \int \frac{(x^2+1)dx}{(x+1)^2(x-1)}; \quad (3) \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2}; \\ (4) \int \frac{(x^3+1)dx}{x^3-5x^2+6x}; \quad (5) \int \frac{x dx}{(x+1)(2x+1)}; \quad (6) \int \frac{(x-2)dx}{x^2-3x+2}; \\ (7) \int \frac{(x+4)dx}{x^3+2x-3}; \quad (8) \int \frac{x^3 dx}{(x^2+1)^2}; \quad (9) \int \frac{dx}{x^4+x^2+1}; \\ (10) \int \frac{dx}{1+x^4}; \quad (11) \int \frac{1+x^4}{1+x^6} dx; \quad (12) \int \frac{4x+3}{(x-2)^3} dx; \\ (13) \int \frac{dx}{1+x^3}; \quad (14) \int \frac{x^4 dx}{x^2+1}; \quad (15) \int \frac{(x^4+1)dx}{x(x^2+1)^2}; \\ (16) \int \frac{x^3+1}{x^3-x^2} dx; \quad (17) \int \frac{dx}{(x^2+9)^3}; \quad (18) \int \frac{dx}{(x^2+1)^3}. \end{aligned}$$

6. 设  $P_n(x)$  是次数为  $n$  的多项式, 求不定积分

$$\int \frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}} dx.$$

7. 求下列不定积分:

$$\begin{aligned} (1) \int \frac{\sin^2 x \cos x}{1+4\cos^2 x} dx; \quad (2) \int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x} dx; \quad (3) \int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}; \\ (4) \int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx; \quad (5) \int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}; \quad (6) \int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x} dx; \\ (7) \int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x}; \quad (8) \int \frac{dx}{1+3\cos x}; \quad (9) \int \frac{dx}{(3+\cos x)\sin x}; \\ (10) \int \frac{dx}{3+\cos x}; \quad (11) \int \frac{dx}{\sin x(2+\cos x)}; \quad (12) \int \tan x(\tan x + a) dx. \end{aligned}$$

8. 求下列不定积分:

$$\begin{aligned} (1) \int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{1+x}}; \quad (2) \int \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx; \quad (3) \int \frac{dx}{x\sqrt{x-x^2}}; \\ (4) \int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}; \quad (5) \int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} dx; \quad (6) \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}; \\ (7) \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2} dx; \quad (8) \int \frac{x^3 dx}{1+x^2}; \quad (9) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}. \end{aligned}$$

9. 求下列不定积分:

$$\begin{aligned} (1) \int \sin^{-\frac{3}{2}} x \cos^{-\frac{5}{2}} x dx; \quad (2) \int \sin^{-\frac{1}{2}} x \cos^{\frac{1}{2}} x dx; \quad (3) \int \sqrt{1 + \sin x} dx; \\ (4) \int \frac{dx}{\sin(x+a) \cos(x+b)}; \quad (5) \int \frac{dx}{\sin x - \sin \alpha}; \quad (6) \int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx. \end{aligned}$$

10. (\*) 求不定积分的递推公式 ( $a \neq 0$ ):

$$I_n = \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n}.$$

11. (\*) 设  $a, b > 0$ , 求不定积分的递推公式:

$$I_{mn} = \int \frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n}.$$

#### §4.5 简单的微分方程



本节内容可以作为选读材料. 我们已经看到, 求  $f$  的原函数相当于解以  $F$  为未知变量的方程  $F' = f$ . 为了方便起见, 我们用  $\frac{d}{dx}$  表示求导运算, 即

$$\frac{d}{dx} F = F',$$

类似地, 用  $\frac{d^2}{dx^2}$  表示二次求导运算, 而  $\frac{d^n}{dx^n}$  表示  $n$  次求导运算. 我们记

$$P = \sum_{k=0}^n a_k(x) \frac{d^k}{dx^k},$$

约定  $\frac{d^0}{dx^0} = 1$ .  $P$  作用在  $n$  阶可导的函数  $\varphi$  上定义为

$$P\varphi = \sum_{k=0}^n a_k(x) \varphi^{(k)}(x).$$

我们将如上定义的运算  $P$  称为一个  $n$  阶微分算子, 关于未知变量  $\varphi$  的方程  $P\varphi = f$  的方程称为  $n$  阶微分方程. 微分方程的求解将在后续的专门课程中学习, 我们在此仅举几个简单的例子.

**例 4.5.1.** 设  $n \geq 0$ , 证明  $\varphi^{(n+1)} = 0$  当且仅当  $\varphi$  为次数不超过  $n$  的多项式.

**证明.** 我们对  $n$  归纳.  $n = 0$  的情形我们已经证明过. 设  $n = k - 1$  时结论成立, 则  $n = k$  时, 由

$$(\varphi')^{(k)} = \varphi^{(k+1)} = 0$$

知  $\varphi' = p_{k-1}$  是次数不超过  $k - 1$  的多项式, 从而

$$\varphi = \int p_{k-1}(x) dx$$

是次数不超过  $k$  的多项式. □

**例 4.5.2.** 设  $\lambda$  为常数, 求解一次微分方程  $\varphi' = \lambda\varphi$ .

**解.** 设  $\varphi' = \lambda\varphi$ , 则

$$(\varphi e^{-\lambda x})' = \varphi' e^{-\lambda x} + \varphi(-\lambda)e^{-\lambda x} = 0,$$

因此  $\varphi e^{-\lambda x} = C$  为常数, 方程的解为

$$\varphi = C e^{\lambda x}.$$

如果  $\lambda = 1$ , 则在初始条件  $\varphi(0) = 1$  下  $\varphi' = \varphi$  的惟一解为指数函数  $e^x$ , 因此我们也可以用这个一次微分方程来定义指数函数.  $\square$

上例的做法可推广如下.

**例 4.5.3.** 设  $g, h$  为已知连续函数, 求解一次微分方程  $\varphi' = g\varphi + h$ .

**解.** 同上例一样, 有

$$\begin{aligned} (\varphi e^{-\int g(x)dx})' &= \varphi' e^{-\int g(x)dx} + (-g)\varphi e^{-\int g(x)dx} \\ &= h e^{-\int g(x)dx}. \end{aligned}$$

因此

$$\varphi e^{-\int g(x)dx} = \int h(x) \cdot e^{-\int g(x)dx} dx + C,$$

方程的解为

$$\varphi = e^{\int g(x)dx} \cdot \int h(x) \cdot e^{-\int g(x)dx} dx + C e^{\int g(x)dx}.$$

在介绍下一个例子之前, 我们注意到这样的事实: 如果  $\varphi, \psi$  同时满足方程

$$\varphi'' = c\varphi, \quad \psi'' = c\psi,$$

则

$$(\varphi'\psi - \varphi\psi')' = \varphi''\psi - \varphi\psi'' = c(\varphi\psi - \varphi\psi) = 0,$$

因此  $\varphi'\psi - \varphi\psi' = C$  为常数.

**例 4.5.4.** 设  $\lambda \neq 0$  为常数, 求解二次微分方程  $\varphi'' = \lambda^2\varphi$ .

**解.** 显然, 函数  $e^{-\lambda x}$  和  $e^{\lambda x}$  都是方程的解. 因此, 如果  $\varphi$  满足方程, 则根据以上观察, 存在常数  $C'_1, C'_2$ , 使得

$$\varphi' e^{\lambda x} - \lambda \varphi e^{\lambda x} = C'_1, \quad \varphi' e^{-\lambda x} + \lambda \varphi e^{-\lambda x} = C'_2.$$

从而

$$\varphi = C_1 e^{-\lambda x} + C_2 e^{\lambda x}.$$

这就得到了方程的所有解 (通解).  $\square$

**例 4.5.5.** 设  $\lambda \neq 0$  为常数, 求解二次微分方程  $\varphi'' = -\lambda^2 \varphi$ .

**解.** 同上例类似, 首先我们看到函数  $\cos \lambda x$  和  $\sin \lambda x$  都是方程的解, 因此, 如果  $\varphi$  满足方程, 则根据以上观察, 存在常数  $C'_1, C'_2$ , 使得

$$\varphi' \sin \lambda x - \lambda \varphi \cos \lambda x = C'_1, \quad \varphi' \cos \lambda x + \lambda \varphi \sin \lambda x = C'_2.$$

从而

$$\varphi = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

这就得到了方程的所有解 (通解). □

**例 4.5.6.** (\*) 三角函数与圆周率.

从微分方程出发, 我们可以给出正弦 (余弦) 函数以及圆周率的正式定义, 这可使我们避免借助几何直观计算基本极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

考虑二次微分方程

$$f''(x) = -f(x), \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1. \quad (4.3)$$

如果方程有解, 则显然  $f$  是光滑的, 且  $g(x) = f'(x)$  满足以下方程

$$g''(x) = -g(x), \quad g(0) = 1, \quad g'(0) = 0. \quad (4.4)$$

(1) 解的惟一性. 如果  $f_1, f_2$  均为 (4.3) 的解, 令  $h = f_1 - f_2$ , 则

$$h''(x) = -h(x), \quad h(0) = h'(0) = 0.$$

于是

$$[h^2(x) + h'^2(x)]' = 2(hh' + h'h'') = 2(hh' - h'h) = 0,$$

因此  $h^2 + h'^2$  为常数, 从而恒为零. 即  $f_1 = f_2$ .

同理, 方程 (4.4) 的解也惟一. 如果  $f$  为 (4.3) 的解, 则同理可得  $f^2 + g^2 \equiv 1$ , 特别地,  $f, g$  为有界函数.

(2) 解的存在性. 假定  $f$  为 (4.3) 的一个解, 我们先看看它应具有什么形式. 由 Newton-Leibniz 公式以及  $f' = g, g' = -f$  可得

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x g(t) dt = \int_0^x \left( 1 - \int_0^t f(s) ds \right) dt \\ &= x - \int_0^x \int_0^t f(s) ds dt \\ &= x - \int_0^x \int_0^t \left( s - \int_0^s \int_0^v f(u) du dv \right) ds dt \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \int_0^x \int_0^t \int_0^s \int_0^v f(u) du dv ds dt, \end{aligned}$$

这个过程可以继续. 这启发我们定义

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{x^{2i-1}}{(2i-1)!}.$$

可以说明 (参见本节习题或第九章)  $f$  二阶可导, 且  $f$  满足方程 (4.3).

(3)  $g = f'$  必有正零点. (反证法) 不然的话, 由  $f'(0) = 1$  以及连续函数的介值定理知在右半实轴上  $f' > 0$ . 当  $x > y \geq 0$  时,

$$f(x) - f(y) = \int_y^x f'(t) dt > 0,$$

因此  $f$  在  $[0, +\infty)$  中单调递增. 又因为  $f$  有界, 从而极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$  为有限正数. 于是, 存在  $x_0 > 0$ , 当  $x \geq x_0$  时  $f(x) \geq A/2$ . 此时

$$g(x) = g(x_0) - \int_{x_0}^x f(t) dt \leq g(x_0) - \frac{A}{2}(x - x_0), \quad \forall x \geq x_0.$$

这与  $g$  有界相矛盾.

(4) 记  $g = f'$  的最小正零点为  $\pi/2$ , 则  $f$  在  $[0, \pi/2]$  中 (严格) 单调递增. 由  $f^2 + g^2 = 1$  知  $f(\pi/2) = 1$ . 这说明, 函数  $f(\pi/2 - x)$  也满足方程 (4.4). 根据解的唯一性, 我们就得到等式

$$f(\pi/2 - x) = g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

由  $f$  为奇函数,  $g = f'$  为偶函数得

$$f(\pi - x) = f(\pi/2 - (x - \pi/2)) = g(x - \pi/2) = g(\pi/2 - x) = f(x),$$

因此  $f$  在  $[\pi/2, \pi]$  中 (严格) 单调递减,  $\pi$  是  $f$  的最小正根. 进而有

$$f(\pi + x) = f(-x) = -f(x), \quad f(2\pi + x) = -f(\pi + x) = f(x),$$

因此  $f$  为周期函数,  $2\pi$  是其最小正周期.

最后, 我们规定  $\sin x = f(x)$ ,  $\cos x = g(x)$ , 圆周率  $\pi$  规定为  $\sin x$  的最小正根. 这样, 其它的三角函数自然也就有了定义.  $\square$

**例 4.5.7.** 设  $b, c$  为常数, 求解二次微分方程  $\varphi'' + b\varphi' + c\varphi = 0$ .

**解.** 我们想办法将这个二次微分方程转化为刚才已经解过的情形. 事实上, 设  $\varphi$  满足方程, 则

$$\begin{aligned} (\varphi e^{\frac{b}{2}x})'' &= \varphi'' e^{\frac{b}{2}x} + b\varphi' e^{\frac{b}{2}x} + \frac{b^2}{4}\varphi e^{\frac{b}{2}x} \\ &= \left(\frac{b^2}{4} - c\right)(\varphi e^{\frac{b}{2}x}). \end{aligned}$$

因此, 根据前面的例子, 我们有



(1) 当  $\frac{b^2}{4} - c = 0$  时, 方程的解为

$$\varphi(x) = e^{-\frac{b}{2}x}(C_1x + C_2);$$

(2) 当  $\frac{b^2}{4} - c < 0$  时, 方程的解为

$$\varphi(x) = e^{-\frac{b}{2}x}\left(C_1 \cos \sqrt{c - \frac{b^2}{4}}x + C_2 \sin \sqrt{c - \frac{b^2}{4}}x\right);$$

(3) 当  $\frac{b^2}{4} - c > 0$  时, 方程的解为

$$\varphi(x) = e^{-\frac{b}{2}x}(C_1 e^{-\sqrt{\frac{b^2}{4} - c}x} + C_2 e^{\sqrt{\frac{b^2}{4} - c}x}).$$

**例 4.5.8.** 设  $\lambda \neq 0$  为常数,  $g$  已知, 求解二次微分方程  $\varphi'' = \lambda^2 \varphi + g$ .

**解.** 我们找一个形如下面的特殊解  $f_0$ :

$$f_0(x) = C_1(x)e^{-\lambda x} + C_2(x)e^{\lambda x},$$

为了简单起见, 设

$$C_1'(x)e^{-\lambda x} + C_2'(x)e^{\lambda x} = 0. \quad (4.5)$$

此时  $f_0'(x) = -\lambda C_1(x)e^{-\lambda x} + \lambda C_2(x)e^{\lambda x}$ , 因此

$$f_0''(x) = -\lambda C_1'(x)e^{-\lambda x} + \lambda C_2'(x)e^{\lambda x} + \lambda^2 f_0(x),$$

我们得到

$$-\lambda C_1'(x)e^{-\lambda x} + \lambda C_2'(x)e^{\lambda x} = g(x), \quad (4.6)$$

从 (4.5) 和 (4.6) 中解出  $C_1(x)$ ,  $C_2(x)$ :

$$C_1(x) = -\frac{1}{2\lambda} \int e^{\lambda x} g(x) dx, \quad C_2(x) = \frac{1}{2\lambda} \int e^{-\lambda x} g(x) dx.$$

这就得到了方程的一个特解

$$f_0(x) = -\frac{1}{2\lambda} e^{-\lambda x} \int e^{\lambda x} g(x) dx + \frac{1}{2\lambda} e^{\lambda x} \int e^{-\lambda x} g(x) dx.$$

如果  $f(x)$  是另一解, 则  $f - f_0$  满足方程  $\varphi'' = \lambda^2 \varphi$ , 它的解我们已经求出.  $\square$

这个例子中所用的求解特解的办法叫做**常数变易法**.

**例 4.5.9.** 设  $\lambda \neq 0$  为常数,  $g$  已知, 求解二次微分方程  $\varphi'' = -\lambda^2 \varphi + g$ .

**解.** 同上例一样, 用常数变易法可易求出方程的一个特解为

$$f_0(x) = -\frac{1}{\lambda} \cos \lambda x \int g(x) \sin \lambda x dx + \frac{1}{\lambda} \sin \lambda x \int g(x) \cos \lambda x dx.$$

然后再由前面例子的结论就可求出所有的解.  $\square$

### 习题 4.5

1. 设  $b, c$  为常数,  $g$  已知, 解二阶微分方程  $\varphi'' + b\varphi' + c\varphi = g$ .
2. 设  $\lambda$  为常数, 求满足方程  $f' = \lambda(1 + f^2)$  的所有可微函数.
3. 设  $f$  在  $\mathbb{R}$  上可微, 且满足条件

$$f'\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}, \quad \forall x \neq y.$$

证明  $f$  必为多项式, 其次数不超过二.

4. 定义

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{x^{2i-1}}{(2i-1)!}, \quad g_n(x) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{x^{2i-2}}{(2i-2)!}.$$

证明

- (1) 当  $m > n$  时

$$|f_m(x) - f_n(x)| + |g_m(x) - g_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}.$$

于是  $\{f_n\}, \{g_n\}$  均为 Cauchy 列, 从而极限存在. 极限分别记为  $f, g$ . 令  $m \rightarrow \infty$  可得

$$|f(x) - f_n(x)| + |g(x) - g_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}.$$

- (2)  $|f_n(x)| + |g_n(x)| \leq e^{|x|}$ . 于是

$$|f_n(x) - f_n(y)| = \left| \int_y^x g_n(t) dt \right| \leq e^{|x|+|y|} |x - y|,$$

令  $n \rightarrow \infty$  可知  $f$  连续. 同理可得  $g$  也连续. 利用

$$f_n(x) - \int_0^x g(t) dt = \int_0^x [g_n(t) - g(t)] dt$$

证明

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \int_0^x g(t) dt.$$

同理证明

$$g(x) = 1 - \int_0^x f(t) dt.$$

5. 验证例 4.5.6 中定义的三角函数满足恒等式

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

6. 按照下列步骤从头开始定义指数函数  $e^x$ :

(1) 考虑一次微分方程

$$f'(x) = f(x), \quad f(0) = 1. \quad (4.7)$$

证明此方程解的惟一性.

(2) 如果  $f$  为 (4.7) 的解, 则

$$f(x) = 1 + \int_0^x f(t)dt = 1 + x + \int_0^x \int_0^t f(s)dsdt = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots.$$

(3) 验证函数

$$f(x) = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{x^i}{i!}$$

有意义, 且为 (4.7) 的解.

(4) 验证恒等式  $f(x+y) = f(x)f(y)$ .

(5) 说明  $f(x)$  为严格单调递增的恒正函数, 且

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

(6) 当  $x \geq 0$  时, 证明

$$f(x) \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}, \quad \forall n \geq 1.$$

7. 设  $f$  在  $(0, +\infty)$  中可导, 且

$$2f(x) = f(x^2), \quad \forall x > 0.$$

证明  $f(x) = c \ln x$ .

8. 设  $p, q$  为连续函数,  $f$  在  $[a, b]$  上满足方程  $f'' + pf' + qf = 0$ . 如果  $q \leq 0$ , 且  $f(a) = f(b) = 0$ , 则  $f$  恒为零.

## 第五章 微分中值定理和 Taylor 展开

本章继续利用微分学来研究一元函数, 主要的工具是微分中值定理. 一开始我们将探讨函数的极值, 它为进一步的研究提供了动机.

### §5.1 函数的极值

要研究一个变化量, 可以考察其“最大”值和“最小”值, 我们已经在数列极限和函数连续性的研究中用过这个方法了.

**定义 5.1.1 (极值点).** 设  $f$  是定义在区间  $I$  中的函数,  $x_0 \in I$ . 如果存在  $\delta > 0$ , 使得

$$f(x) \geq f(x_0) (f(x) \leq f(x_0)), \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I,$$

则称  $x_0$  为  $f$  在  $I$  中的一个极小 (大) 值点,  $f(x_0)$  称为极小 (大) 值.

如果  $x_0 \in I$ , 且

$$f(x) \geq f(x_0) (f(x) \leq f(x_0)), \quad \forall x \in I,$$

则称  $x_0$  为  $f$  在  $I$  中的一个最小 (大) 值点,  $f(x_0)$  称为最小 (大) 值.

显然, 最小 (大) 值点是极小 (大) 值点. 我们把极小值点和极大值点统称为极值点, 极小值和极大值统称为极值, 最大值和最小值统称最值. 当定义中的不等号在  $x_0$  的空心邻域中严格成立时, 相应的极值点称为严格极值点, 相应的极值称为严格极值.

**定理 5.1.1 (Fermat).** 设  $x_0$  是函数  $f$  在  $I$  中的极值点, 且  $x_0$  为  $I$  的内点. 如果  $f$  在  $x_0$  处可导, 则  $f'(x_0) = 0$ .

**证明.** 不妨设  $x_0$  为  $f$  的极小值点 (不然可考虑  $-f$ ). 由于  $x_0$  为  $I$  的内点, 故存在  $\delta > 0$ , 使得  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$ . 当  $x_0$  为  $f$  的极小值点时, 我们假设  $\delta$  充分小, 使得

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

特别地, 当  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  时,

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0,$$

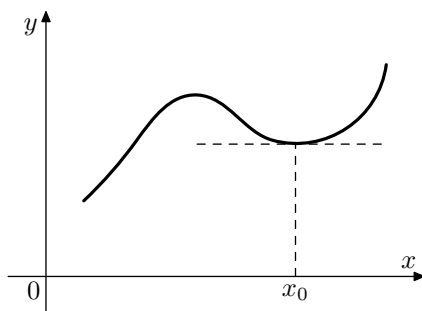


图 5.1 函数的极值点

而当  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$  时,

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

这说明  $f'(x_0) = 0$ . □

注. (1) 如果  $x_0$  不是  $I$  的内点, 则即使  $f$  在  $x_0$  处可导 (存在左导数或右导数), 导数也不必为零. 如定义在  $[0, 1]$  上的函数  $f(x) = x$  就是例子. 如果  $x_0$  为  $f$  在  $I$  中的极值点, 但不是  $I$  的内点, 则根据定理的证明可以得到下面的结论:

设  $x_0$  是  $I$  的左端点, 如果  $x_0$  为  $f$  的极小 (大) 值点, 则  $f'_+(x_0) \geq 0$  ( $\leq 0$ ); 设  $x_0$  是  $I$  的右端点, 如果  $x_0$  为  $f$  的极小 (大) 值点, 则  $f'_-(x_0) \leq 0$  ( $\geq 0$ );

(2) 函数可能在不可导点处取极值, 例如  $f(x) = |x|$ ,  $x \in [-1, 1]$  在  $x_0 = 0$  处取到最小值, 但  $f$  在  $x_0 = 0$  处不可导, 当然就谈不上导数为零了.

(3) 我们把满足条件  $f'(x_0) = 0$  的点称为  $f$  的驻点或临界点. 需要注意的是, 驻点不必为极值点, 例如  $f(x) = x^3$ ,  $x_0 = 0$  为  $f$  的驻点, 但不是极值点.

**定理 5.1.2 (Darboux).** (\*) 设  $f$  为  $[a, b]$  上的可导函数, 则  $f'$  可以取到  $f'_+(a)$  与  $f'_-(b)$  之间的任意值.

**证明.** 设  $k$  是介于  $f'_+(a)$  和  $f'_-(b)$  之间的数. 考虑函数  $g(x) = f(x) - kx$ , 则

$$g'_+(a) \cdot g'_-(b) = (f'_+(a) - k)(f'_-(b) - k) \leq 0,$$

如果上式为零, 则  $k$  等于  $f$  在  $a$  或  $b$  处的导数; 如果上式小于零, 不妨设  $g'_+(a) > 0$ ,  $g'_-(b) < 0$ , 则  $g$  在  $a$  或  $b$  处均取不到最大值, 从而  $g$  在  $[a, b]$  的内部某一点  $\xi$  处取到最大值. 由 Fermat 定理,  $g'(\xi) = 0$ , 即  $f'(\xi) = k$ . □

注. 这个定理说明, 如果  $f$  是区间  $I$  中的可导函数, 则其导函数  $f'$  的值域仍为区间. 特别地, Dirichlet 函数没有任何原函数.

**例 5.1.1.** 求函数  $f(x) = x^3 - x + 1$  在  $[-1, 1]$  上的最小值和最大值.

**解.** 因为  $f(x) = x^3 - x + 1$  为连续函数, 故它在  $[-1, 1]$  上可以取到最小值和最大值. 我们首先来求驻点: 方程

$$f'(x) = 3x^2 - 1 = 0$$

的解为  $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ . 因此  $f$  的可能极值点为  $-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 1$ . 在这些点处计算  $f$  的值如下:

$$f(-1) = 1, f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = 1 + \frac{2}{3\sqrt{3}}, f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = 1 - \frac{2}{3\sqrt{3}}, f(1) = 1.$$

这说明  $f$  的最大值为  $1 + \frac{2}{3\sqrt{3}}$ , 最小值为  $1 - \frac{2}{3\sqrt{3}}$ . □

在上面的例子中, 驻点正好也是最值点. 下面的例子正好相反.

**例 5.1.2.** 求函数  $f(x) = x^3 - x^2 + 1$  在  $[-1, 2]$  上的最小值和最大值.

**解.** 先求驻点:  $f'(x) = 3x^2 - 2x = 0$  的解为  $x = 0, \frac{2}{3}$ . 因此  $f$  的可能极值点为  $-1, 0, \frac{2}{3}, 2$ , 在这些点处计算  $f$  的值如下:

$$f(-1) = -1, f(0) = 1, f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{23}{27}, f(2) = 5.$$

这说明  $f$  的最小值为  $-1$ , 最大值为  $5$ .

利用下一节的知识可以说明, 这个例子中的两个驻点中一个是极大值点, 另一个是极小值点.  $\square$

下面我们给出在一般区间上定义的连续函数最值的一种判别方法.

**命题 5.1.3.** 设  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  为连续函数, 且

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty(-\infty),$$

则  $f$  在  $\mathbb{R}$  上达到最小 (大) 值.

**证明.** 我们不妨设  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . 由极限的定义, 存在  $M > 0$  使得当  $|x| \geq M$  时  $f(x) > f(0)$ . 因为  $f$  为连续函数, 故在闭区间  $[-M, M]$  上取到最小值. 设  $f$  在  $x_0$  处取到此最小值, 则  $f(x_0) \leq f(0)$  (因为  $0 \in [-M, M]$ ). 另一方面,

$$f(x_0) \leq f(0) < f(x), \quad \forall x \in (-\infty, M) \cup (M, +\infty),$$

这说明  $x_0$  也是  $f$  在  $(-\infty, +\infty)$  上的最小值点.  $\square$

显然, 上述命题可以推广到其它非闭区间的情形, 以  $(a, +\infty)$  为例, 我们有如下结论: 如果连续函数  $f$  满足

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty(-\infty)$$

则  $f$  在  $(a, +\infty)$  上达到最小 (大) 值.

**例 5.1.3.** 设  $a_i, i = 1, 2, \dots, n$  为  $\mathbb{R}$  上的  $n$  个点. 在  $\mathbb{R}$  上求一点, 使得它到  $a_i (1 \leq i \leq n)$  的距离的平方和最小.

**解.** 设  $x \in \mathbb{R}$ , 考虑连续函数

$$f(x) = \sum_{i=1}^n (x - a_i)^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

我们的问题就是求  $f$  的最小值点. 容易看出, 当  $|x| \rightarrow +\infty$  时,  $f(x) \rightarrow +\infty$ , 因此由上面的命题,  $f$  的最小值点的确存在. 又因为  $f$  可微, 故最小值点必为驻点. 方程

$$f'(x) = 2 \sum_{i=1}^n (x - a_i) = 0$$

的惟一解为

$$x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i,$$

因此它就是我们要求的点.  $\square$

**例 5.1.4.** 设  $p > 1$ , 研究函数  $f(x) = x - \frac{x^p}{p}$ ,  $x \in [0, +\infty)$  的极值.

**解.** 显然,  $f(0) = 0$ , 且  $x \rightarrow +\infty$  时,  $f(x) \rightarrow -\infty$ . 因此  $f(x)$  的最大值存在, 最小值不存在. 因为

$$f'(x) = 1 - x^{p-1} = 0$$

只有一个解  $x = 1$ , 且  $0 = f(0) < f(1) = 1 - 1/p$ , 故  $x = 1$  就是最大值点, 从而有

$$f(x) \leq f(1) = 1 - \frac{1}{p}, \quad \forall x \geq 0.$$

如果记  $q = \frac{p}{p-1}$ , 则上式可以改写为

$$x \leq \frac{x^p}{p} + \frac{1}{q}, \quad \forall x \geq 0.$$

设  $a, b > 0$ , 以  $x = ab^{-\frac{1}{p-1}}$  代入上式, 整理后得到

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

这也就是 Young 不等式, 等号成立当且仅当  $a^p = b^q$ .  $\square$

**例 5.1.5.** 光线的折射和反射原理.

设在  $x$  轴两侧有两种不同的介质  $M_1$  和  $M_2$ , 光在介质  $M_1$  和  $M_2$  中的传播速度分别为  $v_1$  和  $v_2$ . 设光从介质  $M_1$  中的  $A = (0, a)$  点经过  $x$  轴到达介质  $M_2$  中的  $C = (b, -c)$  点, 这里  $a, b, c > 0$ . 我们要找出光线与  $x$  轴的交点. 因为光线服从“最小原理”, 即光线从  $A$  经过  $x$  轴到达  $C$  所经过的路径应该是所有可能的路径中花费时间最少的那一条, 因此我们将问题转化为求时间函数的极值. 从  $A = (0, a)$  到  $(x, 0)$  再到  $C = (b, -c)$  光线所需要的时间为

$$f(x) = \frac{1}{v_1} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{1}{v_2} \sqrt{c^2 + (b-x)^2}.$$

显然, 当  $|x| \rightarrow +\infty$  时  $f(x) \rightarrow +\infty$ , 因此  $f$  的最小值存在. 对  $f$  求导, 得

$$f'(x) = \frac{1}{v_1} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2} \frac{b-x}{\sqrt{c^2 + (b-x)^2}},$$

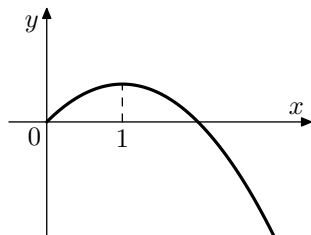


图 5.2 极值点与不等式

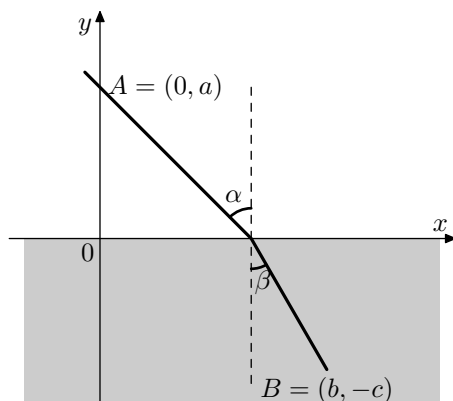


图 5.3 光线的折射

显然, 当  $x \leq 0$  时  $f'(x) < 0$ ; 当  $x \geq b$  时  $f'(x) > 0$ . 当  $x \in (0, b)$  时,  $f'(x)$  可写为

$$f'(x) = \frac{1}{v_1} \left( \frac{x^2}{a^2 + x^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{v_2} \left( \frac{(b-x)^2}{c^2 + (b-x)^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

由此不难看出当  $f'(x)$  在  $(0, b)$  中严格单调递增. 总之, 根据介值定理可知  $f(x)$  的驻点存在且惟一, 它就是  $f$  的最小值点, 即光线经过  $x$  轴的点, 满足条件

$$\frac{1}{v_1} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{v_2} \frac{b-x}{\sqrt{c^2 + (b-x)^2}}.$$

通常用入射角  $\alpha$  和折射角  $\beta$  将上式改写为

$$\frac{\sin \alpha}{v_1} = \frac{\sin \beta}{v_2}, \text{ 或 } \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}.$$

这就是光学中著名的折射定律.

类似地, 如果光线在同一介质中经过  $x$  轴反射, 则经过的路径遵从反射定律, 即光线的入射角等于反射角.  $\square$

### 习题 5.1

1. 求下列函数的极值:

$$(1) f(x) = 2x^3 - x^4; \quad (2) f(x) = x^2 - 3x + 2; \quad (3) f(x) = x + \frac{1}{x} \quad (x > 0).$$

2. 求下列函数在给定区间上的最大值和最小值:

$$(1) f(x) = x^4(1-x), \quad x \in [0, 1]; \quad (2) f(x) = x^4 - 2x^2 + 5, \quad x \in [-2, 2].$$

3. 求函数  $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) 的极值.



4. 求函数  $f(x) = x^3 e^{-x}$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) 的极值.
5. 求函数  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  ( $x > 0$ ) 的极值.
6. 给出光线反射定律的证明.
7. 设  $p \geq 1$ , 证明 Bernoulli 不等式:  $(1+x)^p \geq 1+px$ ,  $\forall x \geq -1$ .
8. (\*) 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  中可微, 且  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = B$ . 证明, 如果  $A \neq B$ , 则任给  $\theta \in (0, 1)$ , 均存在  $\xi \in \mathbb{R}$ , 使得

$$f'(\xi) = \theta A + (1-\theta)B.$$

9. (\*) 设  $f(x)$  在区间  $I$  中  $n$  阶可微,  $x_1, x_2, \dots, x_k$  为  $I$  中的点. 证明, 存在  $\xi \in I$ , 使得

$$\frac{1}{k} [f^{(n)}(x_1) + f^{(n)}(x_2) + \dots + f^{(n)}(x_k)] = f^{(n)}(\xi).$$

10. (\*) 设  $f(x)$  在区间  $I$  中可微,  $x_0 \in I$ . 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$  存在, 则  $f'(x)$  在  $x_0$  处连续.
11. (\*) 设  $f(x)$  在  $(a, b)$  中可微, 如果  $f'(x)$  为单调函数, 则  $f'(x)$  在  $(a, b)$  中连续.

## §5.2 微分中值定理

**定理 5.2.1** (Rolle). 设函数  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  中可微, 且  $f(a) = f(b)$ . 则存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) = 0$ .

**证明.** 连续函数  $f$  在闭区间  $[a, b]$  上可以取到最大值  $M$  和最小值  $m$ . 如果  $M = m$ , 则  $f$  恒为常数, 从而  $f' \equiv 0$ ; 如果  $M > m$ , 则由  $f(a) = f(b)$  知  $m$  与  $M$  中至少有一个是被  $f$  在内点  $\xi \in (a, b)$  处所取得, 由 Fermat 定理,  $f'(\xi) = 0$ .  $\square$

**定理 5.2.2** (Lagrange). 设函数  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  中可微, 则存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \text{ 或 } f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

**证明.** 令

$$F(x) = f(x) - \left[ f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right],$$

则  $F(a) = F(b) = 0$ ,  $F$  满足 Rolle 定理的条件. 从而存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $F'(\xi) = 0$ . 此  $\xi$  即为满足定理要求的  $\xi$ .  $\square$

注. Lagrange 定理的物理含义: 质点的平均速度等于某一点的瞬时速度. 令

$$l(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

则  $l(x)$  是满足条件  $l(a) = f(a)$ ,  $l(b) = f(b)$  的惟一线性函数, 其图像是连接  $(a, f(a))$  和  $(b, f(b))$  的直线. Lagrange 定理的证明思想就是将这条直线看成是  $X$  轴, 从而将问题转化为已知情形.

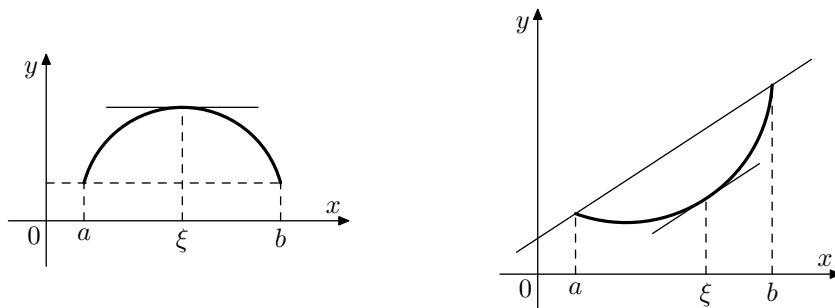


图 5.4 Rolle 定理和 Lagrange 定理

**定理 5.2.3 (Cauchy).** 设函数  $f, g$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  中可微, 且  $g'(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in (a, b)$ . 则存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

**证明.** 由 Rolle 定理和  $g' \neq 0$  知  $g(b) \neq g(a)$ . 令

$$F(x) = f(x) - \left[ f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)) \right],$$

则  $F(a) = F(b) = 0$ ,  $F$  满足 Rolle 定理的条件, 从而存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $F'(\xi) = 0$ .  $\xi$  即为满足要求的点.  $\square$

注: 令  $g(x) = x$ , 则 Cauchy 定理可以推出 Lagrange 定理. 以上三个定理均称为微分中值定理或微分中值公式. 这些结果体现了变化量 (如函数值的差) 和变化率 (导数) 之间的紧密联系, 我们应记得 Newton-Leibniz 公式也是这种关系的一个精确体现.

**例 5.2.1.** 证明  $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ .

**证明.** 因为  $(\sin x)' = \cos x$ , 由 Lagrange 微分中值定理得

$$|\sin x - \sin y| = |\cos \xi| |x - y| \leq |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

注. 从这个例子的证法可以知道, 如果  $f'$  为有界函数, 则  $f$  是 Lipschitz 函数, 读者可以将这里的证明方法和第四章第三节里的证明方法互相比较.

**例 5.2.2.** 设函数  $f$  在区间  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  中可导, 且  $f(a) = f(b) = 0$ . 证明, 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$f'(\xi) + f(\xi) = 0.$$

**证明.** 考虑函数  $g(x) = e^x f(x)$ , 则  $g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  中可导, 且

$$g(a) = e^a f(a) = 0, \quad g(b) = e^b f(b) = 0.$$

由 Rolle 定理, 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $g'(\xi) = 0$ . 因为

$$g'(x) = e^x f(x) + e^x f'(x),$$

而  $e^\xi > 0$ , 故  $f(\xi) + f'(\xi) = 0$ . □

**例 5.2.3.** 证明  $e^x \geq 1 + x, \forall x \in \mathbb{R}$ , 且等号仅在  $x = 0$  处成立.

**证明.** 对函数  $e^x$  应用 Lagrange 中值定理可得

$$e^x - 1 = e^x - e^0 = e^{\theta x} x, \quad \theta \in (0, 1).$$

当  $x > 0$  时,  $e^{\theta x} > 1$ ; 当  $x < 0$  时  $e^{\theta x} < 1$ . 总之,  $x \neq 0$  时均有  $e^x - 1 > x$ . □

注. 设  $a_i > 0 (1 \leq i \leq n)$ , 记

$$A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \quad (\text{算术平均}), \quad G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} \quad (\text{几何平均}).$$

利用  $e^x \geq 1 + x$  可得

$$\begin{aligned} \frac{A}{G} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{G} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{\ln \frac{a_i}{G}} \\ &\geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 + \ln \frac{a_i}{G}\right) = 1, \end{aligned}$$

即  $A \geq G$ , 等号成立当且仅当  $a_i \equiv G$ . 这是经典的算术 - 几何平均值不等式. □

**例 5.2.4.** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  中二阶可导. 如果  $f(a) = f(b) = 0$ , 则对任意  $c \in [a, b]$ , 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$f(c) = \frac{f''(\xi)}{2}(c-a)(c-b).$$

**证明.** 不妨设  $c \in (a, b)$ , 令

$$F(x) = f(x) - \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}(x-a)(x-b), \quad x \in [a, b].$$

则  $F(a) = F(c) = F(b) = 0$ , 由 Rolle 定理, 存在  $\xi_1 \in (a, c)$ ,  $\xi_2 \in (c, b)$ , 使得

$$F'(\xi_1) = 0, \quad F'(\xi_2) = 0.$$

因为  $F'(x)$  在  $[\xi_1, \xi_2]$  上可微, 再一次由 Rolle 定理知, 存在  $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ , 使得

$$F''(\xi) = 0.$$

简单的计算表明

$$F''(x) = f''(x) - \frac{2f(c)}{(c-a)(c-b)},$$

在上式中代入  $x = \xi$  即得欲证结论.  $\square$

注. 这个例子可以推广到一般情形. 例如, 设  $f$  是  $n$  阶可导函数, 且  $f(x) = 0$  有  $n$  个不同的解  $\{x_i\}_{i=1}^n$ , 则对任意  $c \in [a, b]$ , 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$f(c) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi) \prod_{i=1}^n (c - x_i). \quad (5.1)$$

证明的方法仍是构造适当的辅助函数并利用微分中值定理. 例如, 不妨设  $c \neq x_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), 令

$$F(x) = f(x) - \frac{f(c)}{\prod_{i=1}^n (c - x_i)} \prod_{i=1}^n (x - x_i), \quad x \in [a, b].$$

则  $F(x)$  有  $n+1$  个不同的零点  $c, x_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), 对  $F$  反复使用 Rolle 定理可知, 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $F^{(n)}(\xi) = 0$ . 再利用  $n$  次多项式  $\prod_{i=1}^n (x - x_i)$  的  $n$  阶导数为  $n!$  即可得到欲证等式.

如果  $f$  是任给的  $n$  阶可导函数, 设  $\{x_i\}_{i=1}^n$  为  $[a, b]$  中  $n$  个不同的点, 令

$$p_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^n \left[ \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \right] f(x_i),$$

则  $p_{n-1}$  为次数不超过  $n-1$  的多项式, 它与函数  $f$  在  $\{x_i\}_{i=1}^n$  处取相同的值, 称为  $f$  的 Lagrange 插值多项式. 由于  $f - p_{n-1}$  有  $n$  个不同的零点, 由 (5.1) 可得 (注意  $p_{n-1}$  的  $n$  阶导数为零)

$$f(x) - p_{n-1}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi) \prod_{i=1}^n (x - x_i), \quad \xi \in (a, b). \quad (5.2)$$

这个等式称为插值多项式的余项公式, 在第六章中, 我们将利用它来估计积分近似值的误差.

**例 5.2.5.** 证明勒让德 (Legendre) 多项式  $\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$  在  $(-1, 1)$  中有  $n$  个不同的实根, 其中  $n \geq 1$ .

**证明.** 首先, 多项式  $(x^2 - 1)^n$  有实根  $-1$  和  $1$ , 根据 Rolle 定理,  $\frac{d}{dx}(x^2 - 1)^n$  在  $(-1, 1)$  内有实根, 记为  $\xi_{11}$ . 当  $n > 1$  时,  $-1$  和  $1$  仍为  $\frac{d}{dx}(x^2 - 1)^n$  的实根, 再次由

Rolle 定理即知  $\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^n$  在  $(-1, \xi_{11})$  和  $(\xi_{11}, 1)$  中分别有实根  $\xi_{21}$  和  $\xi_{22}$ . 如果  $n > 2$ , 则  $-1$  和  $1$  仍为  $\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^n$  的实根, 即它有四个实根  $-1, \xi_{21}, \xi_{22}$  和  $1$ . 继续使用 Rolle 定理,  $\frac{d^3}{dx^3}(x^2-1)^n$  在  $(-1, 1)$  中就有三个不同的实根. 如此重复证明就知道欲证结论对任意正整数  $n$  都成立.  $\square$

注. 以上例题中, 用到非常重要的一点就是微分中值定理中的  $\xi$  可以取在区间内部.

### 习题 5.2

1. 证明多项式  $x^3 - 3x + c$  在  $[0, 1]$  上不存在两个不同的实根.
2. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  中可微, 且  $f(a) = f(b) = 0$ . 证明, 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) = 2f(\xi)$ .
3. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上二阶可微, 且  $f(a) = f(b) = 0, f'_+(a)f'_-(b) > 0$ . 证明, 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f''(\xi) = 0$ .
4. 设  $a_i, p_i > 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1$ . 利用  $e^x \geq 1 + x$  证明

$$\sum_{i=1}^n p_i a_i \geq \prod_{i=1}^n a_i^{p_i}. \quad (\text{加权平均值不等式})$$

5. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  中二阶可导. 如果  $l$  是满足条件  $l(a) = f(a), l(b) = f(b)$  的线性函数, 则对任意  $c \in [a, b]$ , 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$f(c) - l(c) = \frac{f''(\xi)}{2}(c-a)(c-b).$$

6. 设  $f(x)$  为  $[a, b]$  上的三阶可导函数, 且  $f(a) = f'(a) = f(b) = 0$ . 证明, 任给  $c \in [a, b]$ , 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$f(c) = \frac{1}{6}f^{(3)}(\xi)(c-a)^2(c-b).$$

7. 证明切比雪夫多项式  $e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$  有  $n$  个正的实根.
8. 设函数  $f$  在区间  $[a, b]$  上可导, 且存在  $M > 0$ , 使得

$$|f'(x)| \leq M, \quad \forall x \in [a, b].$$

证明

$$\left| f(x) - \frac{f(a) + f(b)}{2} \right| \leq \frac{1}{2}M(b-a), \quad \forall x \in [a, b].$$

9. (\*) 设函数  $f$  在点  $x_0$  处可导,  $x_n < x_0 < y_n$ , 且  $x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow x_0$ , 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = f'(x_0).$$

10. (\*) 设函数  $f$  在  $(a, b)$  中可微, 且  $a < x_i \leq y_i < b, i = 1, 2, \dots, n$ . 证明, 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\sum_{i=1}^n [f(y_i) - f(x_i)] = f'(\xi) \sum_{i=1}^n (y_i - x_i).$$

11. (\*) 设  $f$  在  $[a, +\infty)$  中可微, 且

$$f(a) = 0, \quad |f'(x)| \leq |f(x)|, \quad \forall x \in [a, +\infty).$$

证明  $f \equiv 0$ .

### §5.3 单调函数

我们应用微分中值定理来进一步研究函数的单调性和极值. 下面的结果在第四章第三节已经证明过了, 现在我们用微分中值定理可以得到很简单的新证明.

**命题 5.3.1.** 设  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  中可微. 如果  $f'(x) = 0, \forall x \in (a, b)$ , 则  $f$  为常值函数.

**证明.** 任取  $x, y \in [a, b]$ , 由 Lagrange 中值定理, 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y) = 0,$$

因此  $f$  为常值函数. □

完全类似的证明可以推出

**命题 5.3.2.** 设  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  中可微. 则  $f$  为单调函数当且仅当  $f'$  不变号.

**证明.** 不妨设  $f$  为单调递增函数, 则由导数的定义, 当  $x_0 \in (a, b)$  时, 有

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

因为  $f$  单调递增, 故  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  总是非负的, 从而  $f'(x_0) \geq 0$ .

反之, 不妨设  $f'(x) \geq 0, x \in (a, b)$ . 任取  $x_1 < x_2 \in [a, b]$ , 由 Lagrange 中值定理, 存在  $\xi \in (x_1, x_2)$ , 使得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0,$$

因此  $f$  是单调递增的.  $\square$

注. 如果  $f' > 0$ , 则  $f$  是严格单调递增的; 如果  $f' < 0$ , 则  $f$  是严格单调递减的. 反之不然, 例如, 函数  $f(x) = x^3$  是严格单调递增的, 但  $f'(0) = 0$ .

下面的结果进一步说明, 如果可微函数在两个驻点之间没有其它驻点, 则它在这两个驻点之间是单调的, 我们可以藉此判断函数图像的大致走向.

**定理 5.3.3 (反函数定理).** 设  $f$  为区间  $I$  中的可微函数, 如果  $f$  的导数处处非零, 则  $f: I \rightarrow f(I)$  是可逆的, 且其逆函数也可微.

**证明.** 如果  $f'(x) \neq 0, \forall x \in I$ , 则由 Lagrange 定理知  $f$  是单射, 根据推论 3.4.7 的证明知  $f$  是严格单调函数, 根据推论 3.3.6 即知  $f$  可逆, 再由命题 4.1.6 即知  $f$  的逆函数也可微.  $\square$

下面的结果给出了用导数判断极值点的一个办法.

**命题 5.3.4.** 设  $\delta > 0$ ,  $f$  在  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  中连续, 在  $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$  中可微. 如果

$$f'(x) \leq 0, x \in (x_0 - \delta, x_0); \quad f'(x) \geq 0, x \in (x_0, x_0 + \delta),$$

则  $x_0$  为  $f$  的极小值点; 如果

$$f'(x) \geq 0, x \in (x_0 - \delta, x_0); \quad f'(x) \leq 0, x \in (x_0, x_0 + \delta),$$

则  $x_0$  为  $f$  的极大值点.

**证明.** 以第一种情形为例. 根据命题 5.3.2 可知  $f$  在  $(x_0 - \delta, x_0]$  中单调递减, 在  $[x_0, x_0 + \delta)$  中单调递增, 这说明  $x_0$  为局部最小值点.  $\square$

**例 5.3.1.** 设  $x > -1$  且  $x \neq 0$ , 证明

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

**证明.** 考虑  $f(x) = \ln(1+x) - x, x > -1$ . 则  $f(0) = 0$ , 且

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x},$$

当  $-1 < x < 0$  时  $f'(x) > 0$ , 当  $x > 0$  时  $f'(x) < 0$ , 因此  $f(x)$  在  $(-1, 0)$  中严格单调递增, 在  $(0, +\infty)$  中严格单调递减, 从而  $f(x) \leq f(0) = 0, \forall x > -1$ , 且等号仅在  $x = 0$  处成立.

类似地, 考虑  $g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$ , 则

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2},$$

同样的讨论可以得出  $g(x)$  在  $(-1, 0)$  中严格单调递减, 在  $(0, +\infty)$  中严格单调递增, 因此  $g(x) \geq g(0) = 0$ , 且等号仅在  $x = 0$  处成立.  $\square$

**例 5.3.2.** 设  $b > a > 1$ , 证明  $ba^b > ab^a$ .

**证明.** 在欲证不等式两边取对数, 得

$$ba^b > ab^a \iff \ln b + b \ln a > \ln a + a \ln b \iff \frac{\ln a}{a-1} > \frac{\ln b}{b-1}.$$

考虑函数  $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$  ( $x > 1$ ). 求导并利用上例, 得

$$f'(x) = \frac{(x-1) - x \ln x}{x(x-1)^2} < 0, \quad \forall x > 1.$$

因此  $f(x)$  在  $(1, +\infty)$  上严格单调递减, 从而欲证不等式成立.  $\square$

**命题 5.3.5.** 设  $f$  在内点  $x_0$  处二阶可导, 且  $f'(x_0) = 0$ . 则

- (1) 如果  $f''(x_0) > 0$ , 则  $x_0$  为  $f$  的 (严格) 极小值点;
- (2) 如果  $f''(x_0) < 0$ , 则  $x_0$  为  $f$  的 (严格) 极大值点.

**证明.** 以 (1) 为例. 设  $f''(x_0) > 0$ , 则由导数定义,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = f''(x_0) > 0,$$

这说明, 存在  $\delta > 0$ , 使得当  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  时  $f'(x) < 0$ ; 当  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$  时  $f'(x) > 0$ . 利用命题 5.3.4 的证明即知  $x_0$  为  $f$  的 (严格) 极小值点.  $\square$

**推论 5.3.6.** 设  $f$  在内点  $x_0$  处二阶可导,  $x_0$  为  $f$  的极小 (大) 值点, 则  $f''(x_0) \geq 0$  ( $\leq 0$ ).

**证明.** 不妨设  $x_0$  为  $f$  的极小值点, 则  $x_0$  为驻点. 如果  $f''(x_0) < 0$ , 则由刚才的命题,  $x_0$  为  $f$  的严格极大值点, 从而不可能是极小值点.  $\square$

**注.** 如果  $x_0$  是  $f$  的驻点, 且  $f''(x_0) = 0$ , 则  $x_0$  可能是极值点, 也可能不是极值点. 这时可利用高阶导数去做进一步的判断, 参见本章最后一节.

**例 5.3.3.** 证明  $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$ ,  $\forall x \geq 0$ , 且等号仅当  $x = 0$  时成立.

**证明.** 考虑  $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$ , 则

$$f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}, \quad f''(x) = -\sin x + x \geq 0.$$

由  $f'' \geq 0$  知  $f'$  单调递增. 由于  $f'(0) = 0$ , 故当  $x \geq 0$  时  $f'(x) \geq f'(0) = 0$ , 即  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  中也是单调递增的. 再由  $f(0) = 0$  知  $f(x) \geq 0$ ,  $\forall x \geq 0$ . 因为  $f''$  仅在  $x = 0$  处为 0, 故  $f'$  在  $[0, +\infty)$  中实际上是严格单调递增的, 因而  $f$  在  $[0, +\infty)$  中也是严格单调递增的.  $\square$



**例 5.3.4.** 设  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  中二阶可导. 如果  $f$  有界, 证明存在  $\xi \in \mathbb{R}$ , 使得  $f''(\xi) = 0$ .

**证明.** (反证法) 假设  $f''$  处处非零, 由 Darboux 定理可知  $f''$  不变号. 不妨设  $f''$  恒正, 则  $f'$  为严格单调递增函数. 取  $x_0 \in \mathbb{R}$ , 使得  $f'(x_0) \neq 0$ . 如果  $f'(x_0) > 0$ , 则当  $x \geq x_0$  时

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t) dt \geq f'(x_0)(x - x_0) \rightarrow +\infty, \quad x \rightarrow +\infty.$$

如果  $f'(x_0) < 0$ , 则当  $x \leq x_0$  时

$$f(x_0) - f(x) = \int_x^{x_0} f'(t) dt \leq f'(x_0)(x_0 - x) \rightarrow -\infty, \quad x \rightarrow -\infty.$$

总之与  $f$  有界相矛盾. □

### 习题 5.3

1. 证明下列等式:

$$(1) \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in [-1, 1];$$

$$(2) 2 \arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi, \quad \forall x \geq 1.$$

2. 证明下列不等式:

$$(1) \tan x > x + \frac{x^3}{3}, \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2});$$

$$(2) \frac{2x}{\pi} < \sin x < x, \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2});$$

$$(3) x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2(1+x)}, \quad \forall x > 0;$$

$$(4) ny^{n-1}(x-y) < x^n - y^n < nx^{n-1}(x-y) \quad (n > 1), \quad \forall x > y > 0.$$

$$3. \text{ 证明不等式 } e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x > 0.$$

$$4. \text{ 证明不等式 } \frac{\tan x}{x} > \frac{x}{\sin x}, \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

5. 数列  $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \dots, \sqrt[n]{n}, \dots$  中哪一项最大?

6. 研究函数  $\frac{x}{\sin x}$  和  $\frac{\tan x}{x}$  的单调性, 其中  $x \in (0, \pi/2)$ .

7. 研究函数  $(1 + \frac{1}{x})^x$  ( $x > 0$ ) 的单调性.

8. (\*) 研究函数  $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$  的单调性, 其中  $x \in (0, \pi)$ .

9. 设  $f$  在  $[a, b]$  上二次可导. 如果  $f'' \geq 0$ , 且  $c \in (a, b)$  为  $f$  的极值点, 则  $c$  必为  $f$  在  $[a, b]$  上的最小值点.
10. 设连续函数  $f(x)$  在区间  $I$  中有惟一的极值点, 则该极值点为最值点.
11. 设  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  中二阶可导. 如果  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{|x|} = 0$ , 证明存在  $\xi \in \mathbb{R}$ , 使得  $f''(\xi) = 0$ .
12. (\*) 设  $f(0) = 0$ ,  $f'(x)$  严格单调递增, 则  $\frac{f(x)}{x}$  在  $(0, +\infty)$  中也严格单调递增.

### §5.4 凸函数

根据前一节的讨论, 如果函数  $f$  二阶可导, 且  $f'' > 0$ , 则  $f$  在区间的内部取不到极大值. 进一步, 根据第二节 (5.2) 式 ( $n = 2$ ), 如果  $f$  在  $[a, b]$  上二阶可导, 则

$$f(x) - l(x) = \frac{1}{2}f''(\xi)(x-a)(x-b), \quad \xi \in (a, b), \quad (5.3)$$

其中  $l(x)$  是满足条件  $l(a) = f(a)$ ,  $l(b) = f(b)$  的线性函数, 它可以写成

$$l(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a), \quad \text{或} \quad l(x) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - x). \quad (5.4)$$

于是, 当  $f'' \geq 0$  时, 有

$$f(x) \leq l(x), \quad \forall x \in (a, b). \quad (5.5)$$

特别地, 由线性函数的单调性可得

$$f(x) \leq l(x) \leq \max\{l(a), l(b)\} = \max\{f(a), f(b)\}, \quad \forall x \in [a, b].$$

**定义 5.4.1 (凸函数).** 设  $f$  为区间  $I$  中定义的函数. 如果对任意  $a < b \in I$ , (5.5) 式均成立, 则称  $f$  为  $I$  中的凸函数.

当 (5.5) 中不等号反向时, 则称相应的函数为凹函数. 有时也将凸函数称为下凸函数, 凹函数称为上凸函数. 如果 (5.5) 中不等号为严格小于号, 则称相应的函数为严格凸函数.

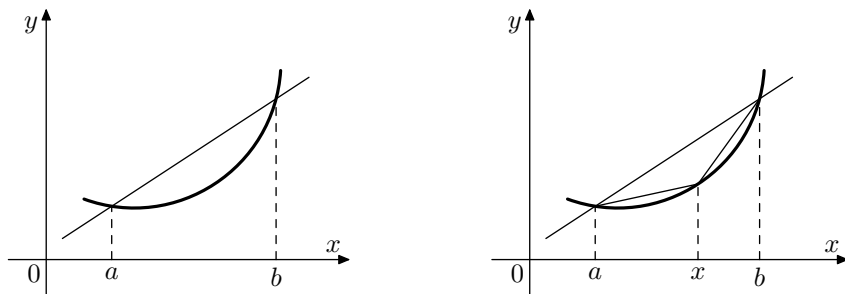


图 5.5 凸函数

根据 (5.4) 式, 我们可以将  $f(x) \leq l(x)$  改写为

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}, \quad \forall x \in (a, b). \quad (5.6)$$

上式与下面的不等式等价

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}, \quad \forall x \in (a, b). \quad (5.7)$$

这只要对 (5.6) 两端利用如下初等结论即可: 即, 如果  $k, l > 0$ ,  $\frac{m}{k} \leq \frac{n}{l}$ , 则

$$\frac{m}{k} \leq \frac{m + n}{k + l} \leq \frac{n}{l}.$$

假设不等式 (5.7) 成立, 应用此初等结论即有

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{(f(x) - f(a)) + (f(b) - f(x))}{(x - a) + (b - x)} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

这也就是不等式 (5.6).

当  $x \in [a, b]$  时,  $x$  可以写为

$$x = ta + (1 - t)b, \quad t = \frac{b - x}{b - a} \in [0, 1].$$

此时  $l(x)$  可以写为  $l(x) = tf(a) + (1 - t)f(b)$ . 于是 (5.5) 可以改写为

$$f(ta + (1 - t)b) \leq tf(a) + (1 - t)f(b), \quad \forall t \in (0, 1).$$

**例 5.4.1.** 凸函数与 Young 不等式.

考虑指数函数  $f(x) = e^x$ , 由  $f''(x) = e^x > 0$  可知  $f$  为 (严格) 凸函数. 于是, 当  $a, b > 0$ ,  $p, q$  满足条件  $p > 1$ ,  $1/p + 1/q = 1$  时, 有

$$ab = e^{\frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q} \leq \frac{1}{p} e^{\ln a^p} + \frac{1}{q} e^{\ln b^q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

这也就是 Young 不等式.

更一般地, 有

**定理 5.4.1** (Jensen 不等式). 设  $f$  是定义在区间  $I$  中的函数. 则  $f$  为凸函数当且仅当对任意的  $x_i \in I$ ,  $\lambda_i \geq 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ),  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ , 有

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

**证明.** 只要证明必要性就可以了. 我们对  $n$  用数学归纳法.  $n = 1$  是显然的,  $n = 2$  上面已经讨论了. 假设不等式对  $n = k$  成立, 则当  $n = k + 1$  时, 不妨假设  $0 < \lambda_{k+1} < 1$ , 此时

$$\sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} = 1.$$

由归纳假设, 有

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i\right) &= f\left((1 - \lambda_{k+1}) \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} x_i + \lambda_{k+1} x_{k+1}\right) \\ &\leq (1 - \lambda_{k+1}) f\left(\sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} x_i\right) + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) \\ &\leq (1 - \lambda_{k+1}) \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} f(x_i) + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i f(x_i). \end{aligned}$$

这说明不等式对  $n = k + 1$  也成立, 从而定理得证.  $\square$

**例 5.4.2.** 算术 - 几何平均值不等式.

考虑函数  $f(x) = -\ln x$  ( $x > 0$ ). 由  $f''(x) = x^{-2} > 0$  可知  $f$  为 (严格) 凸函数. 根据 Jensen 不等式, 当  $a_i > 0$  时

$$\frac{1}{n} (\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n) \leq \ln \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$

即

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n), \quad \forall a_i > 0 \ (1 \leq i \leq n).$$

这就重新得到了算术 - 几何平均值不等式.  $\square$

下面我们研究一般凸函数的基本性质, 先看连续性质.

**命题 5.4.2** (连续性质). 设  $f$  为区间  $I$  中的凸函数, 如果  $[a, b]$  为  $I$  中不含  $I$  的端点的闭区间, 则  $f$  为  $[a, b]$  上的 Lipschitz 函数. 特别地, 凸函数在区间内部总是连续的.

**证明.** 由已知条件, 可取  $a', b' \in I$ , 使得  $a' < a, b < b'$ . 任取  $x < y \in [a, b]$ , 因为  $f$  为凸函数, 故有下列不等式

$$\begin{aligned} \frac{f(a') - f(a)}{a' - a} &\leq \frac{f(a') - f(x)}{a' - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \\ &\leq \frac{f(b') - f(y)}{b' - y} \leq \frac{f(b') - f(b)}{b' - b}. \end{aligned}$$

令

$$M = \max \left\{ \left| \frac{f(a') - f(a)}{a' - a} \right|, \left| \frac{f(b') - f(b)}{b' - b} \right| \right\},$$

则不等式意味着

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b].$$

这说明  $f$  在  $[a, b]$  上为 Lipschitz 函数. □

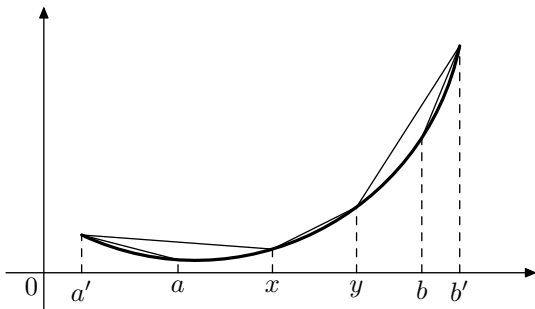


图 5.6 凸函数的连续性质

注. 凸函数在区间的端点处可能不连续, 例如函数

$$f(0) = 1, \quad f(x) = 0, \quad x > 0$$

是  $[0, +\infty)$  中的凸函数, 但它在  $x = 0$  处不连续.

对于连续的函数, 我们可以用下面较简单的方法去判别它是否为凸函数.

**命题 5.4.3.** 设  $f$  为区间  $I$  中的连续函数, 则  $f$  为凸函数当且仅当对任意  $x_1 < x_2 \in I$ , 有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)]. \quad (\text{平均值不等式})$$

**证明.** 只要证明充分性即可. 设  $a < b \in I$ ,  $l(x)$  是 (5.4) 式中的线性函数. 显然, 函数  $g(x) = f(x) - l(x)$  仍然满足平均值不等式. 因为  $g$  为连续函数, 故  $g$  在  $x_0 \in [a, b]$  处取到最大值  $M$ , 只要说明  $M = 0$  即可. 如果  $x_0 = a$  或  $x_0 = b$ , 则  $M = 0$ ; 如果  $x_0 \in (a, b)$ , 不妨设  $x_0 \leq (a + b)/2$ . 考虑  $a$  关于  $x_0$  的对称点  $x_1 = 2x_0 - a$ , 则  $x_1 \in [a, b]$ , 且

$$M = g(x_0) = g\left(\frac{a + x_1}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[g(a) + g(x_1)] \leq M,$$

这说明  $M = g(a) = 0$ . □

从以上证明过程可以看出, 如果函数满足平均值不等式且在  $x_0$  处达到最大值, 则在关于  $x_0$  对称的任意一对点处也达到最大值. 特别地, 有

**推论 5.4.4.** (\*) 设  $f$  为区间  $I$  中的凸函数, 如果  $f$  在  $I$  的内部达到最大值, 则  $f$  是常值函数.

**证明.** 设  $f$  在  $x_0$  处达到最大值. 任取  $a, b \in I, a < x_0 < b$ . 则  $x_0 = ta + (1-t)b, t \in (0, 1)$ . 此时

$$\max f = f(x_0) \leq tf(a) + (1-t)f(b) \leq t \max f + (1-t) \max f = \max f,$$

这说明  $f(a) = f(b) = \max f$ , 因此  $f$  恒等于  $f(x_0)$ .  $\square$

**例 5.4.3.** 函数  $f(x) = -\ln x (x > 0)$  的凸性.

当  $x, y > 0$  时, 由

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$$

可得

$$\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x+y),$$

上式两边取对数就得到

$$\frac{1}{2}(\ln x + \ln y) \leq \ln \frac{x+y}{2},$$

这可重新说明连续函数  $-\ln x$  为凸函数.  $\square$

我们接着研究一般凸函数的可微性质.

**命题 5.4.5** (导数性质). (\*) 设  $f$  为区间  $I$  中的凸函数,  $x$  为  $I$  的内点, 则  $f$  在  $x$  处的左导数和右导数均存在, 且  $f'_-(x) \leq f'_+(x)$ .

**证明.** 任取  $x_1, x_2 \in I$ , 使得  $x_1 < x < x_2$ , 因为  $f$  为凸函数, 我们有不等式

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

$f$  为凸函数也意味着  $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$  是关于  $x_1$  的单调递增函数, 上式则表明这个单调递增函数有上界, 从而极限  $\lim_{x_1 \rightarrow x^-} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'_-(x)$  存在, 且

$$f'_-(x) \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

同理, 当  $x_2 \rightarrow x_+$  时,  $\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$  单调递减且有下界, 从而极限存在且满足

$$f'_-(x) \leq \lim_{x_2 \rightarrow x^+} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'_+(x),$$

这就证明了命题.  $\square$

**注.** (1) 凸函数不一定可微, 例如函数  $f(x) = |x|$  是凸函数, 但它在  $x = 0$  处不可微 (左右导数不同);

(2) 凸函数的不可微点只有至多可数个.

对于可微函数, 我们可以用下面的方法去判别它是否是凸函数.

**命题 5.4.6.** 设  $f$  是区间  $I$  中的可微函数, 则

- (1)  $f$  为凸函数当且仅当  $f'$  为单调递增函数;  
 (2)  $f$  为凸函数当且仅当对任意  $x_0 \in I, x \in I$ ,

有

$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

**证明.** (1) 设  $f$  为可微凸函数,  $x_1 < x_2$ . 则当

$x \in (x_1, x_2)$  时

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

分别在这个不等式的左边和右边令  $x \rightarrow x_1$  以及  $x \rightarrow x_2$ , 得

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2),$$

这说明  $f'$  是单调递增函数.

反之, 如果  $f$  可微, 设  $a < x < b$ , 由微分中值定理, 存在  $\xi_1 \in (a, x)$ ,  $\xi_2 \in (x, b)$ , 使得

$$f(x) - f(a) = f'(\xi_1)(x - a), \quad f(b) - f(x) = f'(\xi_2)(b - x).$$

如果  $f'$  为单调递增函数, 则  $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$ , 从而

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) = \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

由 (5.6)-(5.7) 知  $f$  为凸函数.

(2) 设  $f$  为可微凸函数,  $x_0 \in I$ . 如果  $x > x_0$ , 则由 (1) 的证明, 有

$$f'(x_0) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0};$$

如果  $x < x_0$ , 仍则由 (1) 的证明, 有

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq f'(x_0);$$

这两个不等式合起来就得到了

$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

反之, 如果不等式成立, 则任取  $a < x < b$ , 有

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq f'(x) \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x},$$

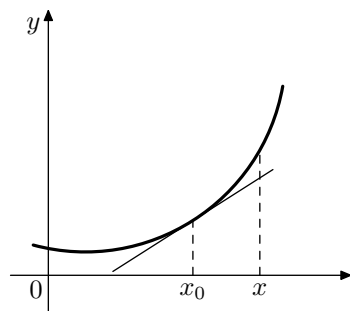


图 5.7 凸函数的可微性质

由 (5.6)-(5.7) 知  $f$  为凸函数.  $\square$

注. 结合前两个命题的证明不难发现, 凸函数的左导数或右导数为单调递增函数. 反之, 有

**命题 5.4.7.** (\*) 设  $f$  为区间  $I$  中的连续函数. 如果  $f$  的左导数  $f'_-$  存在且单调递增, 则  $f$  为凸函数. 对右导数有类似结论.

**证明.** 我们来证明  $f$  满足 Jensen 不等式. 首先, 设  $x_0 \in I$ , 记

$$L(x) = f'_-(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \quad g(x) = f(x) - L(x).$$

于是  $g'_-(x) = f'_-(x) - f'_-(x_0)$ . 由  $f'_-$  单调递增可知, 当  $x \leq x_0$  时  $g'_-(x) \leq 0$ ; 当  $x \geq x_0$  时,  $g'_-(x) \geq 0$ . 根据第四章命题 4.3.1 的证明方法及其注记可知, 在  $x_0$  的左边  $g$  单调递减, 在  $x_0$  的右边  $g$  单调递增. 这说明  $g$  的最小值为  $g(x_0) = 0$ , 即

$$f(x) \geq L(x) = f'_-(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \quad x \in I. \quad (5.8)$$

其次, 设  $x_i \in I$ ,  $\lambda_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ . 记  $x_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ , 利用 (5.8) 可得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) &\geq f'_-(x_0) \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i - x_0) + f(x_0) \sum_{i=1}^n \lambda_i \\ &= f(x_0), \end{aligned}$$

这说明  $f$  满足 Jensen 不等式.  $\square$

我们可以重新讨论二阶可导函数的凸性.

**命题 5.4.8.** 如果  $f$  在  $I$  中二阶可导, 则  $f$  为凸函数当且仅当  $f'' \geq 0$ .

**证明.** 如果  $f$  二阶可导, 则  $f$  是凸函数当且仅当  $f'$  为单调递增函数, 而可微函数  $f'$  是单调递增函数当且仅当其导数  $f''$  非负.  $\square$

**例 5.4.4.** 设  $p \geq 1$ , 则

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{a^p + b^p}{2}, \quad \forall a, b \geq 0.$$

**证明.** 当  $a$  或  $b$  为零时不等式显然成立. 下设  $a, b > 0$ . 考虑函数  $f(x) = x^p$ ,  $x > 0$ . 因为  $f''(x) = p(p-1)x^{p-2} \geq 0$ , 故  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  中是凸函数, 于是

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}, \quad \forall a, b > 0.$$

这也就是要证明的不等式.  $\square$



**例 5.4.5.** 设  $P = (a, b)$  为平面上的一个固定点,  $x$  轴上的点  $(x, 0)$  到  $P$  的距离函数是凸函数.

事实上, 如果  $P$  位于  $x$  轴上, 其坐标记为  $(x_0, 0)$ , 则距离函数  $f(x) = |x - x_0|$  为凸函数; 如果  $P$  不在  $x$  轴上, 则距离函数

$$f(x) = \sqrt{(x-a)^2 + b^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

是可微函数, 其一阶导数为

$$f'(x) = \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2 + b^2}},$$

二阶导数为

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + b^2}} - \frac{(x-a)^2}{[(x-a)^2 + b^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{b^2}{[(x-a)^2 + b^2]^{\frac{3}{2}}} > 0,$$

因此  $f(x)$  为凸函数.

值得指出的是,  $f$  的凸性等价于不等式

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[f(x) + f(y)],$$

而这个不等式可以解释为平面三角形  $P, (x, 0), (y, 0)$  中从  $P$  出发的中线的长度不超过从  $P$  出发的两条边的长度和的一半, 这件事实在中学就已经学过了.

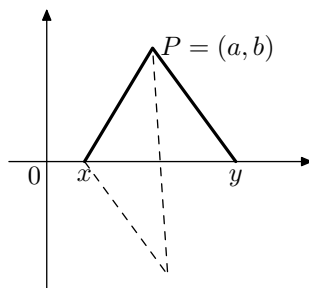


图 5.8 距离函数的凸性

#### 习题 5.4

1. 研究下列函数的凸凹性:

(1)  $f(x) = x^p$  ( $x \geq 0, 0 < p \leq 1$ ); (2)  $f(x) = a^x$  ( $a > 0$ ); (3)  $f(x) = x \ln x$ .

2. 研究函数  $f(x) = \ln \frac{x}{\sin x}$  在区间  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上的凸性.

3. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  中二阶可微,  $f(a) = f(b) = 0$ , 并且存在  $c \in (a, b)$  使得  $f(c) > 0$ . 证明, 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f''(\xi) < 0$ .

4. 证明, 如果  $f, g$  均为区间  $I$  中的凸函数, 则  $\max\{f, g\}$  也是  $I$  中的凸函数.

5. 设函数  $f(x)$  和  $g(x)$  均为凸函数, 且  $f$  单调递增, 则  $f(g(x))$  也是凸函数.

6. 证明三次的实系数多项式不是凸函数.

7. 设  $a, b \geq 0$ , 证明下面的不等式:

$$2 \arctan \frac{a+b}{2} \geq \arctan a + \arctan b.$$

8. 设  $a_i > 0$  ( $1 \leq i \leq n$ ), 证明下面的不等式:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

9. 设  $a_i > 0$  ( $1 \leq i \leq n$ ), 且  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ , 证明下面的不等式

$$x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n} \leq \sum_{i=1}^n a_i x_i, \quad \forall x_i \geq 0,$$

并求等号成立的条件.

10. 设  $f$  为区间  $I$  中的凸函数,  $x_0$  为  $I$  的内点. 如果  $x_0$  为  $f$  的极值点, 则  $f$  在  $x_0$  的左边单调递减, 在  $x_0$  的右边单调递增.

11. 证明, 定义在整个  $\mathbb{R}$  上的有界凸函数必为常值函数.

12. (\*) 设  $f(x)$  是定义在区间  $I$  中的连续函数, 如果任给  $x_0 \in I$ , 均存在  $\delta > 0$ , 使得  $f(x)$  在区间  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  中是凸函数, 则  $f(x)$  是  $I$  中的凸函数.

13. (\*) 设  $f$  为区间  $I$  中的凸函数,  $x_0$  为  $I$  的内点. 如果  $f'_-(x_0) \leq k \leq f'_+(x_0)$ , 则

$$f(x) \geq k(x - x_0) + f(x_0), \quad \forall x \in I.$$

并利用上式重新证明 Jensen 不等式.

14. (\*) 设  $\phi$  为区间  $I$  中的连续凸函数,  $g: [a, b] \rightarrow I$  为连续函数. 证明积分形式的 Jensen 不等式

$$\phi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \phi(g(x)) dx.$$

15. 设  $f$  为  $[a, b]$  上的连续凸函数, 证明 Hadamard 不等式

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

16. (\*) 设  $f$  为  $(-\infty, +\infty)$  中的连续函数, 如果对任意  $x \in \mathbb{R}$ , 均有

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = 0,$$

证明  $f(x)$  为线性函数.

## §5.5 函数作图

应用以上几节的知识, 我们可以在平面上大致作出函数的图像, 需要注意的要点就是: 求函数  $f$  的驻点和极值点, 判断  $f$  的单调区间和凸凹区间, 以及求出  $f$  的其它特殊值, 如  $f$  和坐标轴的交点,  $f$  在间断点或无穷远处的极限.

我们再给出两个概念: 一是函数的拐点. 如果函数  $f$  在  $x_0$  的一侧是凸的, 而在另一侧是凹的, 则称  $x_0$  为  $f$  的拐点; 另一个概念是渐近线. 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$  或  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$  则称  $x = x_0$  为  $f$  的垂直渐近线; 如果  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$  或  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ , 则称  $y = ax + b$  为  $f$  在无穷远处的渐近线.

**例 5.5.1.** 函数  $f(x) = x^3$  的图像.

先求导:  $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ , 因此  $f$  是单调递增函数.  $f''(x) = 6x$ , 因此  $f$  在  $(-\infty, 0)$  中是凹的, 在  $(0, +\infty)$  中是凸的.  $f$  是奇函数, 当  $x \rightarrow -\infty$  时  $f(x) \rightarrow -\infty$ ,  $x \rightarrow +\infty$  时  $f(x) \rightarrow +\infty$ . 有了这些了解,  $f$  的图像就大致清楚了.

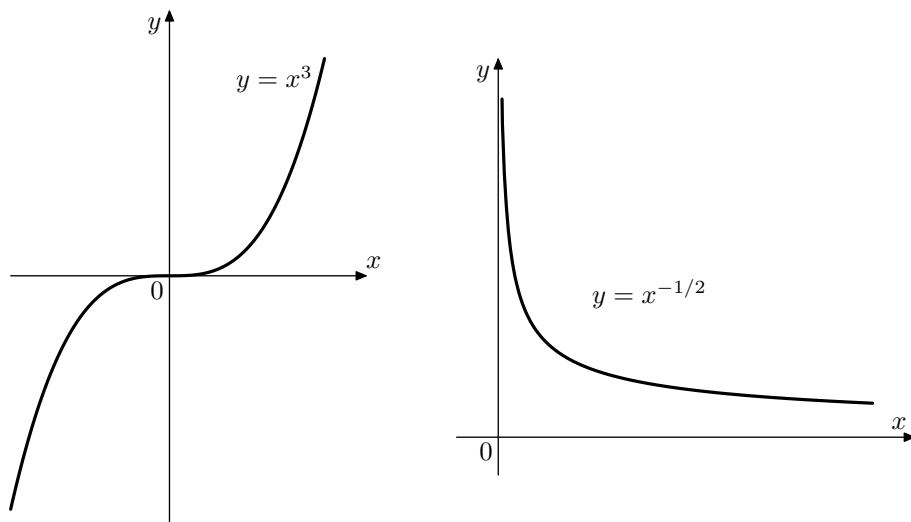


图 5.9 函数作图

**例 5.5.2.** 函数  $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$  的图像.

$f$  的定义域为  $(0, +\infty)$ . 求导:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} < 0, \quad f''(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}} > 0,$$

因此  $f$  是单调递减的凸函数. 由于  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ , 故  $x = 0$  为  $f$  的垂直渐近线; 同理,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , 故  $y = 0$  也是  $f$  的渐近线 (水平渐近线).

**例 5.5.3.** 函数  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  的图像.

这是一个偶函数, 求导:

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad f''(x) = 2\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3},$$

$f$  的驻点为 0, 拐点为  $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ . 因此  $f$  在  $(-\infty, 0]$  中单调递增, 在  $[0, +\infty)$  中单调递减, 在  $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}})$  和  $(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty)$  中是凸函数, 在  $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$  中是凹函数. 因为  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ , 故  $y = 0$  是  $f$  的渐近线.

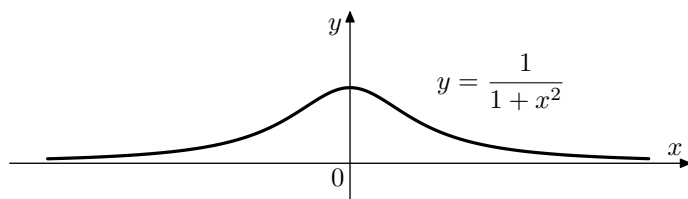


图 5.10 函数作图 (续)

**例 5.5.4.** 函数  $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$  的图像.

这是一个奇函数. 求导:

$$f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, \quad f''(x) = \frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

$x = \pm 1$  为  $f$  的驻点,  $f$  在  $(-\infty, -1)$  中单调递减, 在  $(-1, 1)$  中单调递增, 在  $(1, +\infty)$  中单调递减.  $f(-1) = -1$  为  $f$  的极小值,  $f(1) = 1$  为  $f$  的极大值.

$\pm\sqrt{3}, 0$  为  $f$  的拐点,  $f$  在  $(-\infty, -\sqrt{3})$  中是凹的, 在  $(-\sqrt{3}, 0)$  中是凸的, 在  $(0, \sqrt{3})$  中是凹的, 在  $(\sqrt{3}, +\infty)$  中又是凸的.

由于  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ , 因此  $y = 0$  为  $f$  的渐近线.

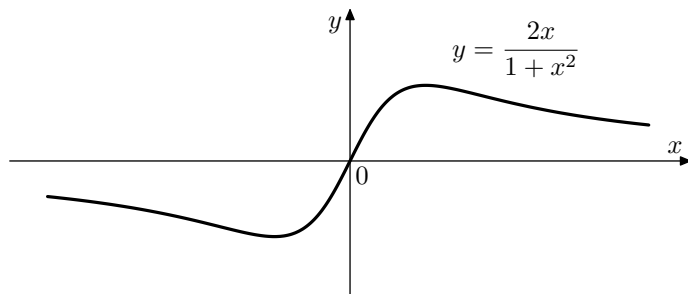


图 5.11 函数作图 (续)

## 习题 5.5

1. 设  $x_0$  为二阶可微函数  $f$  的拐点, 则  $f''(x_0) = 0$ .
2. 设  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ , 则  $f$  在无穷远处不存在渐近线.
3. 作出下列函数的图像
  - (1)  $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x, x \in \mathbb{R}$ ;
  - (2)  $f(x) = \frac{1-2x}{x^2} + 1, x > 0$ ;
  - (3)  $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}$ ;
  - (4)  $f(x) = \sqrt{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$ .
4. 作出下列函数的图像
  - (1)  $f(x) = e^{-x^2}, x \in \mathbb{R}$ ;
  - (2)  $f(x) = (2+x)e^{\frac{1}{x}}, x \neq 0$ ;
  - (3)  $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), x \in \mathbb{R}$ ;
  - (4)  $f(x) = x^2 e^{-x}, x \in \mathbb{R}$ .
5. 研究函数  $f(x) = x^3 + px + q$  的图像, 分别找出  $f(x) = 0$  有一个实根和三个实根时  $p, q$  应该满足的条件.
6. 研究凸函数的渐近线, 并回答问题: 是否存在  $\mathbb{R}$  中的凸函数, 使得  $f(0) < 0$ , 且

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} (f(x) - |x|) = 0 \quad ?$$

## §5.6 L'Hôpital 法则

在计算函数极限的时候, 经常遇到求这种类型的极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ . 下列两种情况比较常见:

- (1)  $\left(\frac{0}{0}\right)$  型:  $x \rightarrow x_0$  时,  $f(x) \rightarrow 0, g(x) \rightarrow 0$ ;
- (2)  $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$  型:  $x \rightarrow x_0$  时,  $f(x) \rightarrow \infty, g(x) \rightarrow \infty$ .

还有一些情形也可以转化为这两种情形之一. 利用求导我们往往可以方便地计算这样的极限, 这是微分学对于求极限的一个应用.

**定理 5.6.1** (L'Hôpital 法则). 设  $f, g$  在  $(a, b)$  中可导, 且  $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$ . 又设

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x).$$

如果极限

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

存在 ( 或为  $\infty$  ), 则

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**证明.** 补充定义  $f(a) = g(a) = 0$ , 则  $f$  在  $[a, b]$  中连续. 由 Cauchy 中值定理,  $\forall x \in (a, b)$ , 存在  $\xi \in (a, x)$ , 使得

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

当  $x \rightarrow a^+$  时,  $\xi \rightarrow a^+$ , 从而

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (5.9)$$

**注.** (1) 如果仍有  $f'_+(a) = g'_+(a) = 0$ , 则可利用二次导数继续求极限:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f''(x)}{g''(x)},$$

高阶导数的情形类似.

(2) 区间  $(a, b)$  换成  $(-\infty, b)$  或  $(a, \infty)$  时, 有类似结论:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

这可由变量代换  $x = \frac{1}{t}$  得出.

(3) 需要注意的是, 等式 (5.9) 成立需要其右端极限存在 (或为无穷), 如果极限不存在, 则 (5.9) 就未必成立了, 读者可在  $x = 0$  处验证  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = x$  就是不成立的例子.

**例 5.6.1.** 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}.$$

**解.** 由 L'Hôpital 法则得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}.$$

**例 5.6.2.** 设  $f''(x_0)$  存在, 求极限

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h^2}.$$

解. 由 L'Hôpital 法则得

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h^2} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{2h} \\ &= \frac{1}{2} f''(x_0).\end{aligned}$$

例 5.6.3. 求极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} [e^{-1}(1 + \frac{1}{x})^x]^x$ .

解. 记题目中的函数为  $f(x)$ , 则

$$\ln f(x) = x \left[ x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) - 1 \right] = \frac{\ln(1 + x^{-1}) - x^{-1}}{x^{-2}}.$$

作变量替换  $y = 1/x$ , 由 L'Hôpital 法则得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln f(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + y) - y}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1 + y)^{-1} - 1}{2y} = -\frac{1}{2},$$

因此  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = e^{-1/2}$ . □

定理 5.6.2 (L'Hôpital 法则). 设  $f, g$  在  $(a, b)$  中可导, 且  $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$ . 又设

$$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \infty.$$

如果极限

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

存在 ( 或为  $\infty$  ), 则

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

证明. 我们对  $l$  有限的情形加以证明,  $l = \infty$  的情形可类似证明. 由已知条件, 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\eta > 0$ , 使得当  $x \in (a, a + \eta)$  时

$$l - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f'(x)}{g'(x)} < l + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5.10)$$

取  $c = a + \eta$ , 当  $x \in (a, c)$  时, 由 Cauchy 微分中值定理, 存在  $\xi \in (x, c)$ , 使得

$$\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

上式可以改写为

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}(g(x) - g(c)),$$

即

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f(c)}{g(x)} - \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \frac{g(c)}{g(x)}.$$

利用 (5.10) 以及条件  $g(x) \rightarrow \infty$  ( $x \rightarrow a^+$ ) 不难得知, 存在正数  $\delta < \eta$ , 使得当  $x \in (a, a + \delta)$  时

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| < \varepsilon,$$

这就证明了所需结论. □

注. 与前一定理类似的注记请读者自行补充.

**例 5.6.4.** 设  $f$  在  $(a, +\infty)$  中可微.

- (1) 如果  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot f'(x) = 1$ , 则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .  
 (2) 如果存在  $\alpha > 0$ , 使得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha \cdot f(x) + x \cdot f'(x)) = \beta,$$

则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\beta}{\alpha}.$$

**证明.** (1) 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $\ln x \rightarrow +\infty$ , 故

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot f'(x) = 1,$$

特别地,  $f(x) \rightarrow +\infty$  ( $x \rightarrow +\infty$ ).

- (2) 当  $\alpha > 0$  时,  $x^\alpha \rightarrow +\infty$  ( $x \rightarrow +\infty$ ), 故

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha f}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1} f + x^\alpha f'}{\alpha x^{\alpha-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha} (\alpha \cdot f(x) + x \cdot f') = \frac{\beta}{\alpha}. \end{aligned}$$

## 习题 5.6

1. 求下列极限:

- (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$ ; (2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$ ; (3)  $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$ ;  
 (4)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a}$ ; (5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$ ; (6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ ;  
 (7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cot x - 1}{x^2}$ ; (8)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sin^2 \frac{\pi x}{2}}{1 - x^2}$ ; (9)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$ ;

2. 求下列极限 ( $a > 0$ ):

- (1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x \ln x)}{x^a}$ ; (2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{1/x}$ ; (3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left[ \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x - e \right]$ ;  
 (4)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ ; (5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin ax - \sin bx}$ ; (6)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x \ln(1-x)$ ;  
 (7)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{x^4}$ ; (8)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2}{\pi} \arccos x \right)^{\frac{1}{x}}$ ; (9)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan x \right)^{\frac{1}{\ln x}}$ .



3. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}, \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (a_i \geq 0).$$

4. 设  $f'''(x_0)$  存在, 求极限

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} [f(x_0 + 3h) - 3f(x_0 + 2h) + 3f(x_0 + h) - f(x_0)].$$

5. 设函数  $f$  在点  $x_0$  处 2 阶可导, 且  $f''(x_0) \neq 0$ . 由微分中值定理, 当  $h$  充分小时, 存在  $\theta = \theta(h)$  ( $0 < \theta < 1$ ), 使得

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta h)h.$$

证明  $\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{2}$ .

6. 设  $f(x)$  在  $(a, +\infty)$  中可微, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ , 证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ .

7. 设  $f(x)$  在  $(a, +\infty)$  中可微, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + f'(x)] = l$ , 证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ . (提示: 考虑  $e^x f(x)$ .)

8. 设  $a_i \in \mathbb{R}$  ( $1 \leq i \leq n$ ), 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(a_1 x) \cos(a_2 x) \cdots \cos(a_n x)}{x^2}.$$

9. 设  $f''(x_0)$  存在,  $f'(x_0) \neq 0$ . 求极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{1}{f(x) - f(x_0)} - \frac{1}{f'(x_0)(x - x_0)} \right].$$

10. (\*) 设  $a_1 \in (0, \pi)$ ,  $a_{n+1} = \sin a_n$  ( $n \geq 1$ ). 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} a_n = \sqrt{3}$ .

## §5.7 Taylor 展开

这一节我们研究用多项式逼近高阶可微函数的问题. 研究一元函数  $f$  的局部性态时, 我们知道:

(1) 如果  $f(x)$  在  $x_0$  处连续, 则

$$f(x) - f(x_0) = o(1) \quad (x \rightarrow x_0),$$

即, 在  $x_0$  附近  $f$  可用常值函数  $f(x_0)$  逼近.

(2) 如果  $f(x)$  在  $x_0$  处可微, 则

$$f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] = o(x - x_0) \quad (x \rightarrow x_0),$$

即, 在  $x_0$  附近  $f$  可用线性函数  $L$  逼近, 其中

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

(3) 如果  $f''(x_0)$  存在, 则由前节例 5.6.2,

$$f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2] = o((x - x_0)^2) \quad (x \rightarrow x_0),$$

即  $f$  在  $x_0$  附近可以用二次多项式逼近. 一般地, 我们有

**定理 5.7.1** (带 Peano 余项的 Taylor 公式). 设  $f$  在  $x_0$  处  $n$  阶可导, 则

$$\begin{aligned} (*) \quad f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \quad (x \rightarrow x_0). \end{aligned}$$

**证明.** 记

$$R_n(x) = R_n(f, x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n],$$

我们要证明  $R_n(x) = o((x - x_0)^n) \quad (x \rightarrow x_0)$ . 用数学归纳法来证. 对  $n = 1, 2$  的情形我们在前面已讨论过. 设  $n = k$  时  $(*)$  成立, 则  $n = k + 1$  时,  $f'(x)$  满足归纳假设, 于是简单的计算表明

$$R'_{k+1}(f, x) = R_k(f', x) = o((x - x_0)^k) \quad (x \rightarrow x_0).$$

由 L'Hôpital 法则可得

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_{k+1}(f, x)}{(x - x_0)^{k+1}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R'_{k+1}(f, x)}{(k + 1)(x - x_0)^k} = 0,$$

即  $(*)$  对  $n = k + 1$  成立, 定理得证. □

$R_n$  称为 Taylor 展开的余项. 如果  $f$  有更好的可微性, 那么我们可以更好地估计余项的大小. 例如, 在可分部积分的条件下, 有

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t)dt = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t)d(t - x) \\ &= f(x_0) + f'(t)(t - x) \Big|_{x_0}^x + \int_{x_0}^x f''(t)(x - t)dt \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \int_{x_0}^x f''(t)(x - t)dt, \end{aligned}$$

这个过程可以继续 (参见本节习题). 由此可以得到余项的更精密的估计.

**定理 5.7.2** (Taylor). 设  $f$  在开区间  $(a, b)$  中有直到  $n+1$  阶导数,  $x_0, x \in (a, b)$ . 则存在区间  $(x, x_0)$  (或  $(x_0, x)$ ) 中的点  $\xi, \zeta$ , 使得 Taylor 展开的余项可表示为

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}, \quad (\text{Lagrange 余项})$$

以及

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\zeta)(x-\zeta)^n(x-x_0). \quad (\text{Cauchy 余项})$$

**证明.** 受分部积分过程的启发, 考虑以  $t$  为变量的函数

$$F(t) = f(t) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k, \quad t \in (a, b).$$

对  $t$  求导, 得

$$\begin{aligned} F'(t) &= f'(t) + \sum_{k=1}^n \left[ \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} (x-t)^{k-1} \right] \\ &= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n. \end{aligned}$$

根据  $F$  的构造, 有

$$F(x) - F(x_0) = R_n(x).$$

由 Lagrange 微分中值定理, 存在  $\zeta = x_0 + \theta(x-x_0)$  ( $0 < \theta < 1$ ), 使得

$$\begin{aligned} R_n(x) &= F'(\zeta)(x-x_0) \\ &= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\zeta)(x-\zeta)^n(x-x_0). \quad (\text{Cauchy 余项}) \end{aligned}$$

取  $G(t) = -(x-t)^{n+1}$ , 再由 Cauchy 微分中值定理知, 存在  $\xi = x_0 + \eta(x-x_0)$  ( $0 < \eta < 1$ ), 使得

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

即

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}. \quad (\text{Lagrange 余项})$$

这就得到了 Taylor 展开余项的两种表达式. □

**注.** (1) 如果  $f$  的直到  $n$  阶的导数在  $[a, b]$  上都是连续的 (因此  $F$  在  $[a, b]$  上连续), 则对于  $x = a$  或  $x = b$ , 即区间的端点, 定理的结论仍然成立, 这是由微分中值定理成立的条件所保证的.

(2) 如果  $x_0$  为区间端点, 例如  $f$  在  $(a, x_0]$  上存在直到  $n+1$  阶的导数, 则  $f(x)$  在  $x_0$  处仍然有如上 Taylor 余项公式.

(3) 在历史上, Taylor 是从插值多项式出发获得他的公式的. 下面我们用一个方法导出 Lagrange 余项, 这个做法来源于插值多项式的余项公式.

**引理 5.7.3.** 设  $g(x)$  在  $(a, b)$  内  $n+1$  阶可导,  $x_0 \in (a, b)$ . 如果

$$g(x_0) = g'(x_0) = \cdots = g^{(n)}(x_0) = 0,$$

则任给  $c \in (a, b)$ , 存在  $\xi = x_0 + \theta(c - x_0)$  ( $0 < \theta < 1$ ), 使得

$$g(c) = \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(c-x_0)^{n+1}.$$

**证明.** 不妨设  $c \neq x_0$ . 考虑辅助函数

$$h(x) = g(x) - \frac{g(c)}{(c-x_0)^{n+1}}(x-x_0)^{n+1}, \quad x \in (a, b).$$

则  $h(c) = 0$ , 且  $h(x_0) = h'(x_0) = \cdots = h^{(n)}(x_0) = 0$ . 由  $h(c) = h(x_0) = 0$  以及 Rolle 中值定理知, 存在严格介于  $c$  和  $x_0$  之间的点  $\xi_1$ , 使得  $h'(\xi_1) = 0$ . 由  $h'(\xi_1) = h'(x_0) = 0$  又可推出, 存在严格介于  $\xi_1$  和  $x_0$  之间的点  $\xi_2$ , 使得  $h''(\xi_2) = 0$ . 如此继续, 最后可以找到严格介于  $c$  和  $x_0$  之间的点  $\xi$ , 使得  $h^{(n+1)}(\xi) = 0$ . 即

$$g^{(n+1)}(\xi) - \frac{g(c)}{(c-x_0)^{n+1}} \cdot (n+1)! = 0,$$

上式整理以后就是欲证结论. □

**注.** 如果  $g(x)$  在  $[a, b]$  上还是连续的, 则对  $c = a$  或  $b$ , 引理的结论仍然成立.

现在, 如果  $f$  在  $(a, b)$  内  $n+1$  次可导,  $x_0 \in (a, b)$ , 则其 Taylor 余项  $R_n(x)$  满足下列等式 (习题):

$$R_n(x_0) = R'_n(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0, \quad R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

对  $R_n(x)$  运用上述引理就得到了  $R_n(x)$  的 Lagrange 表示. 这种做法的好处就是, 只要  $f$  在  $[a, b]$  上还是连续的, 则对  $x = a, b$  同样有余项公式.

当  $f$  为  $n+1$  阶连续可微函数时, 由微积分基本公式得

$$R_n(x) = F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x F'(t)dt = \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$

这是 Taylor 展开的积分余项, 它是余项的一个精确积分表示. 此时, 由于  $(x-t)^n$  不变号, 由积分中值定理可知, 存在  $\xi \in (x_0, x)$  (或  $(x, x_0)$ ), 使得

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \cdot \int_{x_0}^x (x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}.$$

这也就是 Lagrange 余项. 同理可得 Cauchy 余项.

**例 5.7.1.** (\*) 积分余项的一个应用.

考虑多项式函数  $f(x) = (1+x)^{2n+1}$ ,  $f(x)$  在  $x_0 = 0$  处可展开为

$$(1+x)^{2n+1} = \sum_{k=0}^n C_{2n+1}^k x^k + R_n(x),$$

其中 Taylor 展开的余项为

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x \frac{(2n+1)!}{n!} (1+t)^n (x-t)^n dt,$$

特别地, 取  $x = 1$  就得

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-t^2)^n dt &= \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} R_n(1) \\ &= \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} (2^{2n+1} - \sum_{k=0}^n C_{2n+1}^k) \\ &= \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} (2^{2n+1} - 2^{2n}) = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n C_{2n+1}^k &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (C_{2n+1}^k + C_{2n+1}^{2n+1-k}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k = 2^{2n}. \end{aligned}$$

这个积分也可以用递推的方法求出. □

如果  $f$  在  $x_0$  附近无限次可微, 则称形式和

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

为  $f$  在  $x_0$  处的 Taylor 展开或 Taylor 公式. Taylor 公式在  $x_0 = 0$  的特殊情形也称 Maclaurin 展开公式. 如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ , 则记

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n.$$

此时称  $f$  的 Taylor 展开收敛到自身.

**例 5.7.2.**  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  在  $(-1, 1)$  中任意次可微. 求  $x = 0$  处  $f$  的 Taylor 展开, 并判断收敛性.

**解.** 利用归纳法容易计算  $f$  的各阶导数为

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

特别地  $f^{(n)}(0) = n!$ , 因此  $f$  在  $x = 0$  处的 Taylor 展开为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots.$$

又因为余项

$$R_n(x) = \frac{1}{1-x} - (1 + x + x^2 + \cdots + x^n) = \frac{x^{n+1}}{1-x} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

故得

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \quad \forall x \in (-1, 1).$$

**例 5.7.3.** 求  $f(x) = e^x$  在  $x = 0$  处的 Taylor 展开.

**解.**  $f$  的各阶导数仍为  $f$ , 特别地  $f^{(n)}(0) = 1$  ( $n \geq 1$ ), 因此  $e^x$  在  $x = 0$  处的 Taylor 展开为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

其 Lagrange 余项为

$$R_n(x) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1),$$

因此有如下估计

$$|R_n(x)| \leq e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

这说明

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad \forall x \in (-\infty, +\infty).$$

特别地

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots.$$

由此容易说明  $e$  为无理数: 首先有

$$\begin{aligned} 2 < e &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots = 3. \end{aligned}$$

这说明  $e$  不是整数. 进一步, 如果  $e = \frac{p}{q}$  是有理数, 则  $q! \cdot e - q!(1 + 1 + \cdots + \frac{1}{q!})$  为整数. 另一方面 ( $\theta \in (0, 1)$ ),

$$0 < q! \cdot e - q!(1 + 1 + \cdots + \frac{1}{q!}) = \frac{e^{\theta}}{q+1} < 1,$$

这就导出了矛盾!

□

**例 5.7.4.** 求  $\sin x, \cos x$  在  $x = 0$  处的 Taylor 展开.

**解.** 我们在第四章第二节已算出

$$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n}{2}\pi\right).$$

特别地

$$\sin^{(2k+1)}(0) = (-1)^k, \quad \sin^{(2k)}(0) = 0.$$

由 Taylor 展开的 Lagrange 余项公式得

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+3} \cos \theta x}{(2n+3)!} \quad (0 < \theta < 1).$$

因为余项趋于零, 故可写为

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall x \in (-\infty, \infty).$$

类似地可得

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots, \quad \forall x \in (-\infty, \infty).$$

为了方便地得到更多函数的 Taylor 展开公式, 我们需要下面的结果.

**定理 5.7.4** (Taylor 系数的惟一性). 设  $f$  在  $x_0$  处  $n$  阶可导, 且

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \quad (x \rightarrow x_0),$$

则

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0), \quad k = 0, 1, \cdots, n.$$

**证明.** 根据 Taylor 展开的 Peano 余项表示,  $f(x)$  又可写为

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \quad (x \rightarrow x_0).$$

如果令

$$b_k = a_k - \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0), \quad k = 0, 1, \cdots, n,$$

则由已知条件得

$$\sum_{k=0}^n b_k (x - x_0)^k = o((x - x_0)^n) \quad (x \rightarrow x_0).$$

首先, 在上式中令  $x \rightarrow x_0$  即得  $b_0 = 0$ . 其次, 上式两边除以  $x - x_0$ , 再令  $x \rightarrow x_0$  可得  $b_1 = 0$ . 这个过程可以继续, 当等式两边除以  $(x - x_0)^k$  并令  $x \rightarrow x_0$  就得到  $b_k = 0$  ( $0 \leq k \leq n$ ), 定理证毕.  $\square$

由惟一性定理以及 Taylor 展开的定义可以推出下面有用的命题, 其证明留作习题.

**命题 5.7.5.** 设  $f(x)$  在  $x_0 = 0$  处的 Taylor 展开为  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , 则

(1)  $f(-x)$  的 Taylor 展开为  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n x^n$ ;

(2)  $f(x^k)$  的 Taylor 展开为  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{kn}$ , 其中  $k$  为正整数;

(3)  $x^k f(x)$  的 Taylor 展开为  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{k+n}$ , 其中  $k$  为正整数;

(4)  $f'(x)$  的 Taylor 展开为  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ ;

(5)  $\int_0^x f(t) dt$  的 Taylor 展开为  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ ;

(6) 如果  $g(x)$  在  $x_0 = 0$  处的 Taylor 展开为  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ , 则  $\lambda f(x) + \mu g(x)$  的 Taylor 展开为  $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) x^n$  其中  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

利用上述命题, 再结合前面的例子, 我们有

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots, \quad \forall x \in (-1, 1).$$

因此

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots, \quad \forall x \in (-1, 1),$$

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots, \quad \forall x \in (-1, 1),$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots, \quad \forall x \in (-1, 1),$$

以及

$$\ln(1-x) = -\int_0^x \frac{dt}{1-t} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots, \quad (*)$$

其余项

$$R_n(x) = \ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} = -\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt,$$

如果  $-1 \leq x < 0$ , 则

$$|R_n(x)| \leq \left| \int_0^x t^n dt \right| = \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

如果  $0 \leq x < 1$ , 则

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{1-x} \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{(1-x)(n+1)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

因此 (\*) 对  $x \in [-1, 1)$  均成立. 将  $x$  换成  $-x$ , 则得

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots, \quad \forall x \in (-1, 1].$$



特别地, 在上式中取  $x = 1$ , 得

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots.$$

同理,

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + R_n(x),$$

其中余项  $R_n(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt$ . 当  $x \in [-1, 1]$  时

$$|R_n(x)| \leq \int_0^{|x|} t^{2n} dt = \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

这说明

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, \quad \forall x \in [-1, 1].$$

特别地, 在上式中取  $x = 1$ , 得

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots. \quad (\text{Leibniz-Gregory})$$

类似地我们有如下展开式

$$\begin{aligned} e^{-x} &= 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}, \\ \sinh x &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ \cosh x &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \end{aligned}$$

通常, 有很多方法得到一个函数的 Taylor 展开, 但要判断 Taylor 展开是否收敛以及是否收敛到原函数就不是很容易了. 在后面的章节中, 我们将进一步研究象 Taylor 展开这样的无穷求和的收敛和发散性问题.

**例 5.7.5.** Taylor 展开收敛, 但不收敛到函数本身的例子.

定义函数

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0. \end{cases}$$

显然, 在  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$  中  $\phi$  是无限次可微的. 利用归纳法不难证明 (见例 4.2.5),  $\phi$  在  $x = 0$  处也无限次可微, 且  $\phi^{(n)}(0) = 0, n \geq 0$ . 因此,  $\phi$  虽然为非零光滑函数, 它在  $x = 0$  处的 Taylor 展开却恒为 0.

注. 这个光滑函数在一些后续课程中非常有用.

### 习题 5.7

1. 设  $f$  在  $x_0$  处  $n$  阶可导, 则其 Taylor 展开的余项  $R_n(x)$  满足等式

$$R_n(x_0) = R'_n(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

2. 设  $f(x)$  是关于  $x$  的  $n$  次多项式, 则对  $f(x)$  在  $x = x_0$  处作 Taylor 展开时, 其 Peano 余项  $R_n(x)$  必恒为零. (提示: 考虑其它余项公式.)

3. 设  $f(x)$  在  $(a, b)$  内  $n+1$  次可导, 则  $f$  在  $x_0$  处的 Peano 余项  $R_{n+1}(x)$  可以写为

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!} [f^{(n+1)}(\xi) - f^{(n+1)}(x_0)](x - x_0)^{n+1},$$

其中  $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$  ( $0 < \theta < 1$ ).

4. 对公式

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

进行分部积分从而得到  $f$  的 Taylor 展开余项

$$\begin{aligned} R_n(x) &= f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n]. \end{aligned}$$

5. 设  $f$  在  $[a, b]$  上二阶可导, 且  $f'' \geq 0$ . 用 Taylor 公式证明,

$$(1) f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \forall x, x_0 \in [a, b];$$

$$(2) f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1), \quad \forall x_1 < x_2, \text{ 以及 } x_1 \leq x \leq x_2.$$

6. 将下列函数在  $x_0 = 0$  处做 Taylor 展开直到  $x^4$  项:

$$(a) x \cot x, \quad (b) e^{\sin x}, \quad (c) \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}}, \quad (d) \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}, \quad (e) (1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

7. 将下列函数在  $x_0 = 0$  处做 Taylor 展开直到  $x^6$  项:

$$(a) e^{2x-x^2}, \quad (b) \ln(\cos x), \quad (c) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

8. 将下列函数在  $x_0 = 0$  处做 Taylor 展开:

$$(a) \sinh^{-1} x, \quad (b) \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad (c) \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

9. 求函数  $f(x) = \sqrt{1+x}$  在  $x_0 = 0$  处的 Taylor 展开.

10. 设  $f(x), g(x)$  在  $(-1, 1)$  中无限次可微, 且

$$|f^{(n)}(x) - g^{(n)}(x)| \leq n!|x|, \quad \forall x \in (-1, 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

证明  $f(x) = g(x)$ .

11. 用下面的方法重新证明引理 5.7.3: 即对函数  $F(x) = g(x)$ ,  $G(x) = (x - x_0)^{n+1}$  反复使用 Cauchy 微分中值定理.

12. 如果  $f$  在  $x_0$  附近可以表示为

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \quad (x \rightarrow x_0),$$

则  $f(x)$  是否在  $x_0$  处  $n$  阶可导?

13. (\*) 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上二阶可导, 且  $f'(a) = f'(b) = 0$ . 证明, 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$|f''(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

## §5.8 Taylor 公式和微分学的应用

我们来介绍 Taylor 公式以及微分学的几个应用.

### (1) 函数极值的判断

我们知道, 如果  $x_0$  为  $f$  在定义域内部的极值点和可导点, 则  $f'(x_0) = 0$ . 进一步, 如果  $f''(x_0) < 0$ , 则  $x_0$  为极大值点; 如果  $f''(x_0) > 0$ , 则  $x_0$  为极小值点. 利用 Taylor 公式, 我们可以得到如下的一般结果.

**定理 5.8.1.** 设  $f$  在  $x_0$  处  $n$  阶可导, 且

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0,$$

则

(1)  $n$  为偶数时, 如果  $f^{(n)}(x_0) < 0$ , 则  $x_0$  为极大值点; 如果  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , 则  $x_0$  为极小值点;

(2)  $n$  为奇数时,  $x_0$  不是极值点.

**证明.** 根据已知条件,  $f$  在  $x_0$  处有 Taylor 展开:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \\ &= f(x_0) + (x - x_0)^n \left[ \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) + o(1) \right]. \end{aligned}$$

因此结论的证明都是显然的.  $\square$

### (2) Jensen 不等式的余项

下面的结果可以看成 (5.3) 的推广, 它可以给出 Jensen 不等式的误差估计.

**定理 5.8.2.** 设  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  中二阶可导. 当  $x_i \in [a, b]$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 时, 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) - \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) = -\frac{1}{2} f''(\xi) \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j (x_i - x_j)^2, \quad (5.11)$$

其中  $\lambda_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ .

**证明.** 记  $\bar{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in [a, b]$ . 如果  $\bar{x}$  为区间端点, 则当  $\lambda_i \neq 0$  时,  $x_i$  都等于此端点, 此时 (5.11) 左端为零, 从而  $\xi$  可任意选取. 下设  $\bar{x} \in (a, b)$ . 在  $\bar{x}$  处, 根据  $f$  的 Taylor 展开, 有

$$f(x_i) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x_i - \bar{x}) + \frac{1}{2} f''(\xi_i)(x_i - \bar{x})^2, \quad \xi_i \in (a, b).$$

于是

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) &= f(\bar{x}) \sum_{i=1}^n \lambda_i + f'(\bar{x}) \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i - \bar{x}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f''(\xi_i) \lambda_i (x_i - \bar{x})^2 \\ &= f(\bar{x}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f''(\xi_i) \lambda_i (x_i - \bar{x})^2. \end{aligned}$$

记  $m = \min\{f''(\xi_i)\}$ ,  $M = \max\{f''(\xi_i)\}$ , 利用上式以及

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j (x_i - x_j)^2$$

可得

$$\frac{m}{4} \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j (x_i - x_j)^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) - f(\bar{x}) \leq \frac{M}{4} \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j (x_i - x_j)^2.$$

根据  $f''$  的介值性 (Darboux 定理), 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) - f(\bar{x}) = \frac{1}{4} f''(\xi) \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j (x_i - x_j)^2.$$

定理得证.  $\square$

### (3) 计算某些极限

在某些情况下, Taylor 展开可以用来计算极限, 我们仅举例说明.

**例 5.8.1.** 求极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})].$$

**解.** 当  $x \rightarrow \infty$  时,  $x^{-1} \rightarrow 0$ , 因此

$$\ln(1 + \frac{1}{x}) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2}) \quad (x \rightarrow \infty),$$

这说明

$$x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x}) = \frac{1}{2} + o(1) \rightarrow \frac{1}{2} \quad (x \rightarrow \infty).$$

**例 5.8.2.** 设  $f$  在 0 附近二阶可导, 且  $|f''| \leq M$ ,  $f(0) = 0$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n^2}) = \frac{1}{2} f'(0).$$

**证明.** 由 Taylor 公式,

$$f(\frac{k}{n^2}) = f(0) + f'(0) \frac{k}{n^2} + R_{k,n},$$

其中

$$|R_{k,n}| = \frac{1}{2} |f''(\xi_{k,n})| (\frac{k}{n^2})^2 \leq \frac{1}{2} M \frac{k^2}{n^4},$$

因此

$$|\sum_{k=1}^n R_{k,n}| \leq \frac{1}{2} M n^{-4} \sum_{k=1}^n k^2 \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

这说明

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n^2}) &= f'(0) \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n R_{k,n} \\ &= f'(0) \frac{n+1}{2n} + o(1) \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

由此就得到了要证明的极限等式. □

#### (4) 近似计算

如果对余项有好的估计, 则 Taylor 展开也可用于近似计算, 这儿我们只考虑几个简单的例子, 在第九章第四节中我们将提供更进一步的计算方法.

**例 5.8.3.** 求  $e$  的近似值, 要求误差小于  $10^{-4}$ .

**解.** 我们利用等式

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!} \quad (0 < \theta < 1).$$

当  $n = 7$  时,

$$0 < \frac{e^\theta}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{8!} < 10^{-4},$$

这说明

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{7!} \approx 2.71825.$$

**例 5.8.4.** 求  $\pi$  的近似值.

**解.** 利用恒等式

$$\arctan u + \arctan v = \arctan \left( \frac{u+v}{1-uv} \right)$$

可以得到

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \arctan 1 = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} \\ &= 2 \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7} = \cdots \end{aligned}$$

然后利用 Taylor 展开

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

就可以将  $\pi$  很快地算到很精确的值, 详细的讨论见第九章第四节.

**注.** 历史上, 公元 4 到 5 世纪时刘辉和祖冲之分别将  $\pi$  的值精确地计算到了小数点后第 4 位和第 7 位, 领先欧洲一千多年. 祖冲之用的是对圆进行逼近的方法, 那时的计算是非常困难的. 掌握了 Taylor 公式以后, 欧洲人大大地提高了  $\pi$  的计算精度.

### (5) Stirling 公式

根据第二章例 2.2.6 可以知道  $n! \sim (\frac{n}{e})^n$ . 令  $a_n = n!(e/n)^n$ , 则

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n} = e^{1-n\ln(1+\frac{1}{n})} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} e^{1-(n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n})}.$$

利用

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{2n+1}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

以及  $\ln(1+x)$  的 Taylor 展开可得

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 2\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^5} + \cdots\right]. \quad (5.12)$$

于是

$$\begin{aligned} 0 &< \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 < \frac{1}{3}\left[\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots\right] \\ &= \frac{1}{12}\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right). \end{aligned}$$

这说明  $\{n^{-\frac{1}{2}}a_n\}$  严格单调递减,  $\{n^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{12n}}a_n\}$  严格单调递增, 它们收敛于同一极限, 记为  $C$ . 则

$$n^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{12n}}a_n < C < n^{-\frac{1}{2}}a_n, \quad \text{即} \quad a_n = C\sqrt{ne}^{\frac{\theta_n}{12n}}, \quad 0 < \theta_n < 1.$$

现在  $n!$  可写为

$$n! = C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}, \quad 0 < \theta_n < 1.$$

为了决定  $C$  的值, 首先利用上式可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{2n+1} \frac{[2^n n!]^2}{(2n)!} = \frac{C}{2\sqrt{2}}. \quad (5.13)$$

其次, 利用递推可算出积分

$$\int_0^1 (1-x^2)^{n+\frac{1}{2}} dx = \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \frac{\pi}{2},$$

由

$$\int_0^1 (1-x^2)^{n+1} dx < \int_0^1 (1-x^2)^{n+\frac{1}{2}} dx < \int_0^1 (1-x^2)^n dx$$

以及例 5.7.1 (或直接用递推计算) 可得

$$\frac{(2n+2)!!}{(2n+3)!!} < \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \frac{\pi}{2} < \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

上式各项都乘以  $\sqrt{n}$ , 再令  $n \rightarrow \infty$  得

$$\frac{C}{2\sqrt{2}} \leq \frac{\sqrt{2}\pi}{C} \leq \frac{C}{2\sqrt{2}},$$

解出  $C = \sqrt{2\pi}$ . 最后我们得到如下 Stirling 公式

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}, \quad 0 < \theta_n < 1. \quad (5.14)$$

注. (1) 在 (5.12) 中取  $n = 1$  可得  $\ln 2$  的一个收敛较快的展开式, 它可用于近似计算.

(2) (5.13) 式就是所谓的 Wallis 公式, 可参看第六章第三节的相关例子.

### (6) Newton 方法

现在我们考虑这样的问题: 给定函数  $f(x)$ , 怎样解方程

$$f(x) = 0$$

呢? 当  $f(x)$  是二次函数的时候, 我们可以判断它有无解, 并且可以将解显式地写出来. 对于一般的函数, 我们往往只能近似地求解. 下面我们作这样的假设:

(\*)  $f$  在  $[a, b]$  上连续,  $f(a)f(b) < 0$ ;  $f'$  和  $f''$  在  $(a, b)$  中都不变号.

在这个假设之下, 根据介值定理和微分中值定理,  $f(x) = 0$  在  $(a, b)$  中有且仅有一个解  $\xi$ . 为了讨论的简单起见, 我们进一步假设  $f'$  和  $f''$  有正的下界. 此时  $f$  为严格单调递增的凸函数, 因而  $f(a) < 0$ ,  $f(b) > 0$ .

考察  $f$  的图像, 如果从  $(b, f(b))$  作函数  $y = f(x)$  的切线, 其方程为

$$y - f(b) = f'(b)(x - a),$$

此切线和  $x$  轴的交点的横坐标为

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

根据  $f$  的凸性可知,  $x_1$  比  $b$  要更靠近  $\xi$ .

再从  $(x_1, f(x_1))$  出发作  $y = f(x)$  的切线, 交  $x$  轴于  $(x_2, 0)$ , 其中

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

$x_2$  要比  $x_1$  更靠近  $\xi$ .

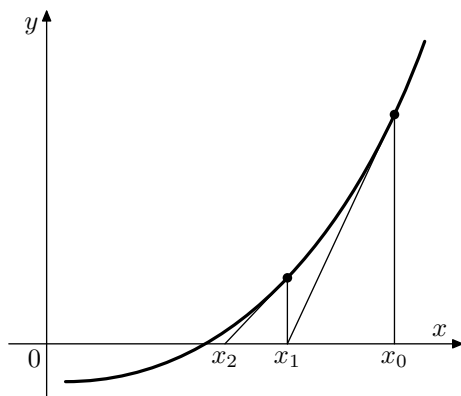


图 5.12 Newton 迭代

这样一直做下去就得到一系列点  $\{x_n\}$ , 它们可以递归地定义为

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0. \quad (5.15)$$

其中  $x_0 = b$ .  $\{x_n\}$  为单调递减数列, 且  $\xi < x_n < b, \forall n \geq 1$ . 因此极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 记为  $\xi'$ . 于是  $\xi \leq \xi' < b$ . 在 (5.15) 中令  $n \rightarrow \infty$  得

$$\xi' = \xi' - \frac{f(\xi')}{f'(\xi')},$$

即  $f(\xi') = 0$ , 这说明  $\xi' = \xi$ . 因此, 我们把  $x_n$  视为  $f(x) = 0$  的近似解是合理的, 这种求近似解的方法称为 Newton 法或切线法, (5.15) 式称为 Newton 迭代公式.

下面我们来估计近似解  $x_n$  和  $\xi$  的之间的误差. 根据 Taylor 公式, 存在点  $c \in (\xi, x_n)$ , 使得

$$0 = f(\xi) = f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{1}{2}f''(c)(\xi - x_n)^2,$$



利用 (5.15) 式, 上式可改写为

$$x_{n+1} - \xi = \frac{1}{2} \frac{f''(c)}{f'(x_n)} (x_n - \xi)^2,$$

因此有

$$|x_{n+1} - \xi| \leq \frac{M}{2m} |x_n - \xi|^2, \quad (5.16)$$

其中

$$M = \sup_{x \in (a,b)} |f''(x)|, \quad m = \inf_{x \in (a,b)} |f'(x)|.$$

从 (5.16) 可以看出, 数列  $\{x_n\}$  趋于极限  $\xi$  的速度是很快的.

需要注意的是, 在我们的假设条件下, 一般来说不能从  $(a, f(a))$  开始作切线求交点来近似求解  $f(x) = 0$ . 不难发现, 当  $f'$  和  $f''$  同号时, 应从  $(b, f(b))$  出发作切线; 当  $f'$  和  $f''$  反号时则应从  $(a, f(a))$  出发作切线.

**例 5.8.5.** 求黄金分割比  $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  的近似值.

显然, 主要是要计算  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ . 首先利用 Taylor 展开找一个逼近程度比较好的近似解:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{5}}{2} &= \left(1 + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \frac{1}{4^2} + \frac{1}{16} \frac{1}{4^3} + \cdots \\ &\approx 1.118\ldots \end{aligned}$$

因此, 我们取  $x_0 = 1.118$ , 因为

$$5 - (2 \times 1.118)^2 = 3.04 \times 10^{-4},$$

初始误差约为

$$0 < \frac{\sqrt{5}}{2} - x_0 = \frac{3.04}{2(\sqrt{5} + 2x_0)} \times 10^{-4} < 0.34 \times 10^{-4}.$$

利用 Newton 迭代, 将  $\frac{\sqrt{5}}{2}$  视为函数  $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{4}{5}$  的根, 则迭代方程为

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n + \frac{1}{2} x_n \left(1 - \frac{4}{5} x_n^2\right),$$

误差估计为

$$0 < \frac{\sqrt{5}}{2} - x_{n+1} = \frac{2}{5} (\sqrt{5} + x_n) \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - x_n\right)^2.$$

以  $x_0$  代入, 得  $x_1 = 1.11803398720$ , 误差为

$$0 < \frac{\sqrt{5}}{2} - x_1 = \frac{2}{5} (\sqrt{5} + x_0) \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - x_0\right)^2 < 1.56 \times 10^{-9},$$

因此

$$1.11803398720 < \frac{\sqrt{5}}{2} < 1.11803398876,$$

这说明  $\alpha \approx x_1 - 0.5 \approx 0.61803398$  在小数点后面的 8 位数字都是准确的.

当然, 我们也可以从函数  $f(x) = x^2 - \frac{5}{4}$  出发作 Newton 迭代. 这时迭代方程为

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{x_n}{2} + \frac{5}{8} \frac{1}{x_n},$$

相应的误差估计为

$$0 < x_{n+1} - \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2x_n} \left( x_n - \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^2.$$

如果取  $x_0 = 1.118034$ , 则

$$0 < x_0 - \frac{\sqrt{5}}{2} < 1.28 \times 10^{-8},$$

代入  $x_0$  得  $x_1 = 1.11803398874989490480\dots$ , 且

$$0 < x_1 - \frac{\sqrt{5}}{2} < \frac{1}{2 \times 1.118034} 1.28^2 \times 10^{-16} < 0.733 \times 10^{-16},$$

因此

$$0.61803398874989483150 < \alpha < 0.61803398874989490481,$$

即  $\alpha \approx 0.618033988749894$ , 小数点后 15 位数字都是准确值.

注. 请读者回顾一下第二章第二节的习题, 看看那里的一些数列极限和本节 Newton 迭代的关系.

### 习题 5.8

1. 计算下列极限:

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - e \right], & \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}, \\ (3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{e}{2} x + x^2 \left[ \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - e \right] \right\}, & \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos x}{x^4}. \end{aligned}$$

2. 计算下列极限:

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} [\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} + 2\sqrt{x}], & \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}, \\ (3) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - ex \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \right], & \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \frac{1}{x} - \cot x \right). \end{aligned}$$

3. 利用 Taylor 公式计算  $\ln 1.2$  的近似值, 要求精确到小数点后第三位.

4. 设  $f(x)$  在  $x_0$  的一个开邻域内  $n+1$  次连续可微, 且  $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$ , 其 Taylor 公式为  $f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0+\theta h)h^n$ , 其中  $0 < \theta < 1$ . 证明  $\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{n+1}$ .

5. 设  $f(x)$  在  $x=0$  的一个开邻域内连续可微, 且  $f'(0)=0$ ,  $f''(0)$  存在. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\ln(1+x))}{x^3}.$$

(提示: 先用微分中值定理.)

6. 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi en!)$ . (提示: 对  $e$  用 Taylor 展开.)

7. 用 Newton 方法求  $\sqrt{2}$  的近似值, 要求精确到小数点后 6 位数.

8. (\*) 设  $a_1 \in \mathbb{R}$ ,  $a_{n+1} = \arctan a_n$  ( $n \geq 1$ ). 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n^2$ .

9. (\*) 设  $f(x)$  在  $(a, +\infty)$  中三阶可导, 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  和  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'''(x)$  均存在且有限, 则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'''(x) = 0$ . (提示: 先用 L'Hôpital 法则考虑极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^3}$ , 再考虑  $f(x \pm 1)$  的 Taylor 展开.)

10. (\*) 设  $f$  在  $\mathbb{R}$  上二阶可导, 且

$$M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| < \infty, \quad M_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)| < \infty.$$

证明  $M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| < \infty$ , 且  $M_1^2 \leq 2M_0 \cdot M_2$ .

(提示: 考虑  $f(x \pm h)$  的 Taylor 展开.)

## 第六章 Riemann 积分

我们在第三章中已经介绍了连续函数在闭区间上的积分. 在实际应用中, 往往也需要考虑非连续函数如何积分的问题. 例如, 函数  $f(x) = 1, x \in [0, 1); f(x) = 2, x \in [1, 2]$  在区间  $[0, 2]$  上有一个间断点, 但  $f(x)$  的图像和三条直线  $x = 0, x = 2$  以及  $y = 0$  所围成的区域仍然是可以求面积的, 即  $f(x)$  在某种意义上也应该可积. Riemann 研究了有界函数的积分, 他把可积函数类从连续函数类做了很大的扩充. Lebesgue 进一步发现可积函数就是“几乎处处”连续的函数.

### §6.1 Riemann 可积

设  $f(x)$  是定义在闭区间  $[a, b]$  上的函数 (不一定连续), 考虑由直线  $x = a, y = b, y = 0$  及曲线  $y = f(x)$  围成的曲边梯形. 受连续函数积分定义的启发, 为了计算它的面积, 我们用若干小矩形面积之和去逼近: 将  $[a, b]$  分割为

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

第  $i$  个小梯形的面积可用  $f(\xi_i)\Delta x_i$  近似逼近, 其中  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ . 于是和  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$  表示曲边梯形 ABCD 的面积近似值. 我们期望, 当  $[a, b]$  的分割越来越细时, 这个近似值越来越接近所求面积, 用极限表示出来就是

$$S_{ABCD} = \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i,$$

这里  $\|\pi\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$ . 如果上述极限存在, 则记为  $\int_a^b f(x)dx$ .

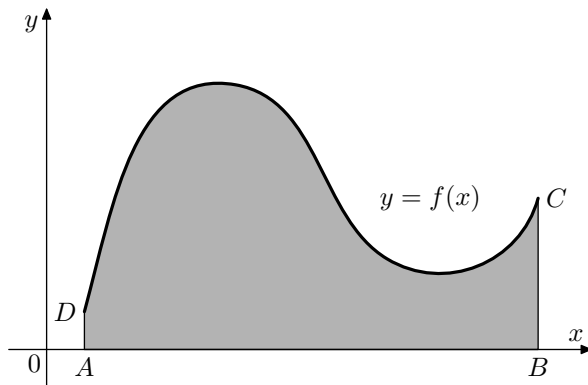


图 6.1 曲边梯形的面积

详细说来, 设函数  $f(x)$  定义于区间  $[a, b]$ ,  $[a, b]$  中有  $n+1$  个点依次为  $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ , 它们将  $[a, b]$  分成  $n$  个小区间  $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$  ( $1 \leq i \leq n$ ), 这些分点及小区间构成了  $[a, b]$  的一个分割, 记为

$$\pi: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

小区间  $\Delta_i$  的长度为  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ , 并记

$$\|\pi\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\},$$

称为分割  $\pi$  的模.

对于分割  $\pi$ , 任取点  $\xi_i \in \Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$  ( $1 \leq i \leq n$ ). 称

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

为  $f$  在  $[a, b]$  上的一个 Riemann 和或积分和.

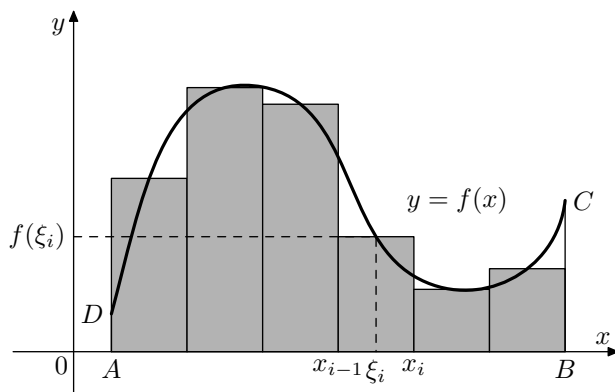


图 6.2 Riemann 和

**定义 6.1.1** (Riemann 积分). 设  $f$  如上, 如果存在实数  $I$ , 使得任给  $\varepsilon > 0$ , 均存在  $\delta > 0$ , 对任何分割  $\pi$ , 只要  $\|\pi\| < \delta$ , 就有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i - I \right| < \varepsilon, \quad \forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, \cdots, n,$$

则称  $f$  在  $[a, b]$  上 Riemann 可积或可积,  $I$  为  $f$  在  $[a, b]$  上的 (定) 积分, 记为

$$I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

其中  $f$  称为被积函数,  $[a, b]$  称为积分区间,  $a, b$  分别称为积分下限与积分上限.

注. (1) 积分与变量  $x$  的选择无关, 即

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$$

(2) 如果  $f$  在  $[a, b]$  上可积, 则积分  $\int_a^b f(x) dx$  是惟一确定的; 根据第三章第五节的讨论可知连续函数总是可积的.

**定理 6.1.1** (可积的必要条件). 若  $f$  在  $[a, b]$  上可积, 则  $f$  在  $[a, b]$  上有界, 反之不然.

**证明.** 假设  $f$  在  $[a, b]$  上可积, 沿用上面的记号, 记  $I$  为其积分. 取  $\varepsilon = 1$ , 由定义, 存在  $\delta > 0$ , 对  $[a, b]$  的任意分割

$$\pi: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

当  $\|\pi\| < \delta$  时, 任取  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  ( $1 \leq i \leq n$ ), 均有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i - I \right| < 1.$$

特别地, 取自然数  $n > \frac{b-a}{\delta}$ , 对区间  $[a, b]$  做  $n$  等分, 即

$$x_i = a + \frac{i}{n}(b-a), \quad i = 0, \cdots, n,$$

此时  $\|\pi\| = \frac{b-a}{n} < \delta$ . 我们有

$$\left| \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) - I \right| < 1, \quad \forall \xi_i \in \left[ a + \frac{i-1}{n}(b-a), a + \frac{i}{n}(b-a) \right],$$

从而

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \right| \leq \frac{n}{b-a}(1 + |I|).$$

对于固定的  $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ , 当  $i \neq j$  时, 我们取  $\xi_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$ , 令

$$M = \max_{0 \leq i \leq n} \left\{ \left| f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right) \right| \right\},$$

则有如下估计:

$$\begin{aligned} |f(\xi_j)| &\leq \left| \sum_{i \neq j} f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right) \right| + \frac{n}{b-a}(1 + |I|) \\ &\leq (n-1)M + \frac{n}{b-a}(1 + |I|), \end{aligned}$$

这个估计对任意  $\xi_j \in [a + \frac{j-1}{a}(b-a), a + \frac{j}{a}(b-a)]$  均成立, 因此有

$$|f(x)| \leq (n-1)M + \frac{n}{b-a}(1+|I|), \quad \forall x \in [a, b],$$

这就说明  $f$  有界.

有界函数未必可积, Dirichlet 函数  $D(x)$  即为例子: 任给一个分割, 当  $\xi_i$  取  $[x_{i-1}, x_i]$  中的无理数时, 积分和为 0; 当  $\xi_i$  取  $[x_{i-1}, x_i]$  中有理数时, 积分和为 1. 因此  $D(x)$  的积分和没有极限.  $\square$

除了连续函数之外, 还有哪些有界函数是可积的呢? 如同研究有界数列的收敛性要考虑上极限和下极限一样, 我们考虑有界函数 Riemann 和的“最大”值和“最小”值. 对于分割

$$\pi: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

记  $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ ,  $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ , 令

$$S = \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Delta x_i, \quad s = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \Delta x_i,$$

我们称  $S$  为  $f$  关于  $\pi$  的 Darboux 上和, 简称上和, 也记为  $S(\pi)$  或  $S(\pi, f)$ ; 而  $s$  称为 Darboux 下和, 简称下和, 也记为  $s(\pi)$  或  $s(\pi, f)$ .

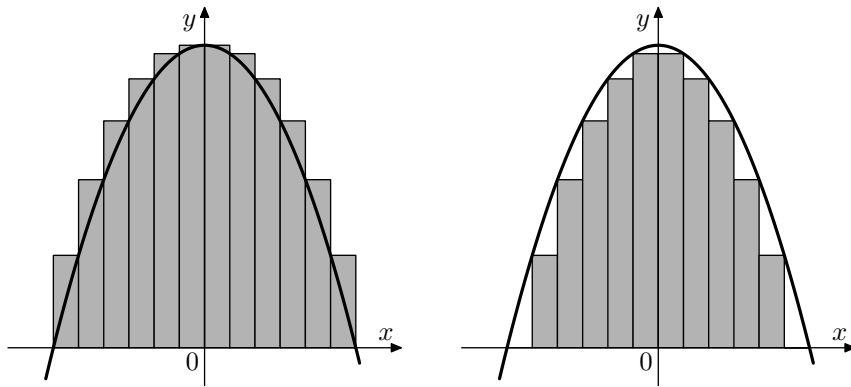


图 6.3 上和与下和

显然, 任何 Riemann 和总是介于下和与上和之间. 跟第三章一样, 我们称

$$\omega_i = M_i - m_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) - \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

为  $f$  在  $[x_{i-1}, x_i]$  上的振幅. 由定义, 上和与下和之差可以表示为

$$S - s = \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot \Delta x_i.$$

Riemann 对于积分的贡献之一就是证明了  $f$  可积当且仅当  $S - s$  的极限为零 (当分割的模趋于零时). Darboux 进一步研究了任意有界函数的上和与下和的极限.

以下总是假定  $f$  为有界函数, 并记  $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ ,  $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ .

下面的引理给出了上和与下和的重要性质, 这种单调性质与数列的情形类似.

**引理 6.1.2.** 设分割  $\pi'$  是从  $\pi$  添加  $k$  个分点得到的, 则有

$$\begin{aligned} S(\pi) &\geq S(\pi') \geq S(\pi) - (M - m)k\|\pi\|, \\ s(\pi) &\leq s(\pi') \leq s(\pi) + (M - m)k\|\pi\|. \end{aligned}$$

特别地, 对于给定的分割增加新的分点时, 下和不减, 上和不增.

**证明.** 为了简单起见, 我们证明  $k = 1$  的情形. 此时, 设新添加的分点为  $\bar{x}$ , 则  $\bar{x}$  必落在某个区间  $(x_{j-1}, x_j)$  内. 由上和的定义,

$$\begin{aligned} S(\pi) &= \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Delta x_i = M_j \cdot \Delta x_j + \sum_{i \neq j} M_i \cdot \Delta x_i, \\ S(\pi') &= M'_j \cdot (\bar{x} - x_{j-1}) + M''_j (x_j - \bar{x}) + \sum_{i \neq j} M_i \cdot \Delta x_i, \end{aligned}$$

这里  $M'_j$  及  $M''_j$  分别是  $f$  在区间  $[x_{j-1}, \bar{x}]$  及  $[\bar{x}, x_j]$  中的上确界. 因为  $M'_j \leq M_j$ ,  $M''_j \leq M_j$ , 从而有

$$\begin{aligned} 0 \leq S(\pi) - S(\pi') &= (M_j - M'_j)(\bar{x} - x_{j-1}) + (M_j - M''_j)(x_j - \bar{x}) \\ &\leq (M - m)(\bar{x} - x_{j-1}) + (M - m)(x_j - \bar{x}) \\ &= (M - m)\Delta x_j \leq (M - m)\|\pi\|. \end{aligned}$$

即  $S(\pi) \geq S(\pi') \geq S(\pi) - (M - m)\|\pi\|$ . 下和的情形同理可证.  $\square$

**推论 6.1.3.** 对于任意两个分割  $\pi_1$  及  $\pi_2$ , 有

$$s(\pi_1) \leq S(\pi_2).$$

**证明.** 用  $\pi_1 \cup \pi_2$  表示将  $\pi_1$  和  $\pi_2$  的所有分点合并后得到的分割 (重复的分点只取一次), 则  $\pi_1 \cup \pi_2$  既可以看成由  $\pi_1$  添加分点而来, 又可以看作从  $\pi_2$  添加分点而来. 由引理 6.1.2, 有

$$s(\pi_1) \leq s(\pi_1 \cup \pi_2) \leq S(\pi_1 \cup \pi_2) \leq S(\pi_2).$$

这也就是说任意下和总是不超过任意上和.  $\square$

下面的定理和有界数列的上极限和下极限都存在也是类似的.



**定理 6.1.4** (Darboux).  $\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} S(\pi) = \inf_{\pi} S(\pi), \quad \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} s(\pi) = \sup_{\pi} s(\pi).$

**证明.** 根据定义, 总有下面的估计:

$$m(b-a) \leq s(\pi) \leq S(\pi) \leq M(b-a),$$

因此  $\inf_{\pi} S(\pi)$  和  $\sup_{\pi} s(\pi)$  都存在.

任给  $\varepsilon > 0$ , 由下确界的定义知, 存在分割  $\pi'$ , 使得

$$S(\pi') < \inf_{\pi} S(\pi) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

设  $\pi'$  由  $k$  个分点构成. 对于任意另一分割  $\pi$ ,  $\pi \cup \pi'$  至多比  $\pi$  多  $k$  个分点. 由引理 6.1.2, 有

$$S(\pi) - (M-m)k\|\pi\| \leq S(\pi \cup \pi') \leq S(\pi') < \inf_{\pi} S(\pi) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是, 当  $\|\pi\| < \delta = \frac{\varepsilon}{2(M-m+1)k}$  时,

$$\begin{aligned} \inf_{\pi} S(\pi) \leq S(\pi) &\leq (M-m)k \frac{\varepsilon}{2(M-m+1)k} + \inf_{\pi} S(\pi) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \inf_{\pi} S(\pi) + \varepsilon, \end{aligned}$$

这就证明了

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} S(\pi) = \inf_{\pi} S(\pi).$$

下和的极限同理可证. □

我们称  $\inf_{\pi} S(\pi)$  为  $f$  在  $[a, b]$  上的上积分,  $\sup_{\pi} s(\pi)$  为  $f$  在  $[a, b]$  上的下积分. Riemann 和 Darboux 关于函数可积性的结果反映在下面的重要定理中, 它可对比于数列极限相应的定理 2.2.3.

**定理 6.1.5** (可积的充要条件). 设  $f$  为  $[a, b]$  上的有界函数, 则以下命题等价:

- (1)  $f$  在  $[a, b]$  上 Riemann 可积.
- (2)  $f$  在  $[a, b]$  上的上积分和下积分相等.
- (3)  $\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot \Delta x_i = 0$ .
- (4) 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $[a, b]$  的某个分割  $\pi$ , 使得

$$S(\pi) - s(\pi) = \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot \Delta x_i < \varepsilon.$$

**证明.** (1)  $\implies$  (2): 设  $f$  在  $[a, b]$  上可积, 其积分为  $I$ . 于是任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 当  $\|\pi\| < \delta$  时, 有

$$I - \varepsilon < \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i < I + \varepsilon.$$

特别地, 我们得到

$$\begin{aligned} I - \varepsilon &\leq \sum_{i=1}^n \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot \Delta x_i = s(\pi) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot \Delta x_i = S(\pi) \\ &\leq I + \varepsilon, \end{aligned}$$

这说明  $\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} s(\pi) = \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} S(\pi) = I$ . 由 Darboux 定理即知  $f$  的上下积分相等.

(2)  $\implies$  (1): 设  $\sup_{\pi} s(\pi) = \inf_{\pi} S(\pi) = I$ . 由 Darboux 定理, 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 当  $\|\pi\| < \delta$  时, 有

$$I - \varepsilon < s(\pi) \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \leq S(\pi) < I + \varepsilon,$$

这说明

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = I,$$

也就是说  $f$  在  $[a, b]$  上可积, 积分为  $I$ .

(2)  $\iff$  (3): 这可由 Darboux 定理及下式得到

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot \Delta x_i = \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} (S(\pi) - s(\pi)) = \inf_{\pi} S(\pi) - \sup_{\pi} s(\pi).$$

(3)  $\implies$  (4): 这是显然的.

(4)  $\implies$  (2): 如果存在分割  $\pi$ , 使得  $S(\pi) - s(\pi) < \varepsilon$ , 则由

$$s(\pi) \leq \sup_{\pi'} s(\pi') \leq \inf_{\pi'} S(\pi') \leq S(\pi)$$

知

$$0 \leq \inf_{\pi'} S(\pi') - \sup_{\pi'} s(\pi') \leq S(\pi) - s(\pi) < \varepsilon.$$

由  $\varepsilon$  的任意性即知  $f$  的上和与下和相等.

这就证明了 (1) (2) (3) (4) 的等价性.  $\square$

**推论 6.1.6.** (1) 设  $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ , 如果  $f$  在  $[a, b]$  上可积, 则  $f$  在  $[\alpha, \beta]$  上也  
可积.

(2) 设  $c \in (a, b)$ , 如果  $f$  在  $[a, c]$  及  $[c, b]$  上都可积, 则  $f$  在  $[a, b]$  上可积.

**证明.** (1) 任给  $\varepsilon > 0$ , 由于  $f$  在  $[a, b]$  上可积, 由定理 6.1.5 (3), 存在  $\delta > 0$ , 当  $\|\pi\| < \delta$  时,  $\sum_{i=1}^n \omega_i \cdot \Delta x_i < \varepsilon$ . 取  $[\alpha, \beta]$  的一个分割  $\pi'$ , 使得  $\|\pi'\| < \delta$ . 显然, 可构造  $[a, b]$  的分割  $\pi$ , 使得  $\pi$  是  $\pi'$  通过添加  $[a, b] - [\alpha, \beta]$  中的分点得到, 且  $\|\pi\| < \delta$ , 则

$$\sum_{\pi'} \omega_i \cdot \Delta x_i \leq \sum_{\pi} \omega_i \cdot \Delta x_i < \varepsilon.$$

由定理 6.1.5 (4) 知,  $f$  在  $[\alpha, \beta]$  上可积.

(2) 用定理 6.1.5 (4) 很容易证明, 留作习题.  $\square$

**例 6.1.1.** 设  $f, g$  均为  $[a, b]$  上的可积函数, 则  $fg$  也是  $[a, b]$  上的可积函数.

**证明.** 因为可积函数是有界的, 故存在  $K > 0$ , 使得

$$|f(x)| \leq K, \quad |g(x)| \leq K, \quad \forall x \in [a, b].$$

任给  $\varepsilon > 0$ , 由定理 6.1.5 (3), 存在  $\delta > 0$ , 当  $\|\pi\| < \delta$  时,

$$\sum_{\pi} \omega_i(f) \cdot \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2K+1}, \quad \sum_{\pi} \omega_i(g) \cdot \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2K+1}.$$

如果  $[x_{i-1}, x_i]$  为  $\pi$  中的一个小区间, 则

$$\begin{aligned} \omega_i(fg) &= \sup_{x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x')g(x') - f(x'')g(x'')| \\ &= \sup_{x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x')g(x') - f(x')g(x'') + f(x')g(x'') - f(x'')g(x'')| \\ &\leq \sup_{x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]} [|f(x')||g(x') - g(x'')| + |g(x'')||f(x') - f(x'')|] \\ &\leq K(\omega_i(g) + \omega_i(f)), \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} \sum_{\pi} \omega_i(fg) \cdot \Delta x_i &\leq K \sum_{\pi} (\omega_i(f) + \omega_i(g)) \cdot \Delta x_i \\ &= K \sum_{\pi} \omega_i(f) \cdot \Delta x_i + K \sum_{\pi} \omega_i(g) \cdot \Delta x_i \\ &< K \cdot \frac{\varepsilon}{2K+1} + K \cdot \frac{\varepsilon}{2K+1} < \varepsilon. \end{aligned}$$

由定理 6.1.5 知  $fg$  可积.  $\square$

根据定理 6.1.5 可以得到几类可积函数, 它们不一定总是连续的.

**定理 6.1.7 (可积函数类).** (1) 若  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 则  $f$  在  $[a, b]$  上可积;

(2) 若有界函数  $f$  只在  $[a, b]$  中有限个点处不连续, 则  $f$  可积;

(3) 若  $f$  为  $[a, b]$  上的单调函数, 则  $f$  可积;

**证明.** (1) 见第三章第五节 (3.3).

(2) 我们用定理 6.1.5 (4) 来证明. 任给  $\varepsilon > 0$ , 设  $\bar{x}_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ) 为  $f$  的间断点, 取  $0 < \rho < \frac{\varepsilon}{4(M-m+1)N}$ , 使得  $(\bar{x}_k - \rho, \bar{x}_k + \rho)$  ( $k = 1, \dots, N$ ) 互不相交. 去掉这些开区间后,  $[a, b]$  剩下的部分由有限个闭区间组成, 且  $f$  在这些闭区间上连续. 根据闭区间上连续函数的一致连续性, 可以取这些闭区间的分割, 使得

$f$  在每个小区间上的振幅均小于  $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ . 这些闭区间的分割连同  $[\bar{x}_k - \rho, \bar{x}_k + \rho]$  ( $1 \leq k \leq N$ ) 组成了  $[a, b]$  的分割, 记为  $\pi$ . 对于此分割, 有

$$\begin{aligned} S(\pi) - s(\pi) &\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) + (M-m) \sum_{i=1}^N 2\rho \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + (M-m) \frac{2N\varepsilon}{4(M-m+1)N} < \varepsilon. \end{aligned}$$

由定理 6.1.5 (4) 知  $f$  可积.

(3) 设  $f$  为  $[a, b]$  上单调函数, 不妨设  $f$  单调递增. 任给  $\varepsilon > 0$ , 任取  $[a, b]$  的分割  $\pi$ , 使得  $\|\pi\| < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a) + 1}$ , 则

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot \Delta x_i &= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \cdot \Delta x_i \\ &\leq \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \cdot \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a) + 1} \\ &= (f(x_n) - f(x_0)) \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a) + 1} \\ &= (f(b) - f(a)) \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a) + 1} < \varepsilon, \end{aligned}$$

由定理 6.1.5 (3) 知  $f$  可积. □

设  $f$  为  $[a, b]$  上定义的函数, 如果存在  $[a, b]$  的分割

$$\pi: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

使得  $f$  在每一个小区间  $(x_{i-1}, x_i)$  中均为常数, 则称  $f$  为**阶梯函数**.

**推论 6.1.8.** 阶梯函数均为可积函数.

**证明.** 这是因为阶梯函数至多只有有限个间断点. □

**例 6.1.2. (\*)**  $[0, 1]$  上的黎曼函数是可积的.

**证明.** 黎曼函数  $R(x)$  定义为

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \in (0, 1), p, q \text{ 为互素正整数}, \\ 1, & x = 0, 1, \\ 0, & x \in (0, 1) \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

显然,  $0 \leq R(x) \leq 1$ . 任给  $\varepsilon > 0$ , 当  $\frac{1}{q} \geq \frac{\varepsilon}{2}$ , 即  $q \leq \frac{2}{\varepsilon}$  时,  $[0, 1]$  中形如  $\frac{p}{q}$  的既约分数不超过  $N = N(\varepsilon)$  个. 取  $\delta = \frac{\varepsilon}{4N}$ , 对于  $\|\pi\| < \delta$  的任意分割, 包含上述既约分数

的小区间至多只有  $2N$  个, 在其余的小区间上  $R(x)$  的取值均小于  $\frac{\varepsilon}{2}$ , 因此

$$0 \leq \sum_i R(\xi_i) \Delta x_i \leq 2N \|\pi\| + \frac{\varepsilon}{2} \sum_i \Delta x_i \leq \varepsilon,$$

这说明  $R(x)$  在  $[0, 1]$  上可积, 且积分为零.  $\square$

从上面的讨论中可以体会到, 要说明  $f$  为可积函数, 我们只要找到某个分割, 使得要么  $f$  在此分割中的小区间上的振幅很小, 要么振幅较大的那些小区间的总长度很小. 这可以总结为下面的结果.

**定理 6.1.9 (Riemann).** 设  $f$  为  $[a, b]$  上的有界函数, 则  $f$  可积的充分必要条件是任给  $\varepsilon, \eta > 0$ , 存在  $[a, b]$  的某个分割  $\pi$ , 使得

$$\sum_{\omega_i \geq \eta} \Delta x_i < \varepsilon.$$

**证明.** (必要性) 设  $f$  可积, 则由定理 6.1.5 (4), 任给  $\varepsilon, \eta > 0$ , 存在分割  $\pi$ , 使得

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \cdot \Delta x_i < \varepsilon \cdot \eta,$$

从而

$$\eta \cdot \sum_{\omega_i \geq \eta} \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot \Delta x_i < \varepsilon \cdot \eta,$$

其中上式左端表示对振幅大于或等于  $\eta$  的区间求和, 即有

$$\sum_{\omega_i \geq \eta} \Delta x_i < \varepsilon.$$

(充分性) 由已知条件, 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $[a, b]$  的分割  $\pi$ , 使得

$$\sum_{\omega_i \geq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}} \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2(M-m+1)}.$$

对于这个分割, 有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot \Delta x_i &= \sum_{\omega_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}} \omega_i \cdot \Delta x_i + \sum_{\omega_i \geq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}} \omega_i \cdot \Delta x_i \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{\omega_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}} \Delta x_i + (M-m) \sum_{\omega_i \geq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}} \Delta x_i \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a) + (M-m) \frac{\varepsilon}{2(M-m+1)} < \varepsilon. \end{aligned}$$

由定理 6.1.5 (4) 知  $f$  可积.  $\square$

**例 6.1.3.** (\*) 设  $f$  在  $[a, b]$  上连续,  $\varphi$  在  $[\alpha, \beta]$  上可积,  $\varphi([\alpha, \beta]) \subset [a, b]$ . 则  $f \circ \varphi$  在  $[\alpha, \beta]$  上仍可积.

**证明.** 因为  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 故一致连续. 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 当  $x, y \in [a, b]$ ,  $|x - y| < \delta$  时,  $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)}$ . 因为  $\varphi$  在  $[\alpha, \beta]$  上可积, 由定理 6.1.9, 存在  $[\alpha, \beta]$  的分割  $\pi: \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = \beta$ , 使得

$$\sum_{\omega_i(\varphi) \geq \delta} \Delta t_i < \frac{\varepsilon}{4K + 1},$$

其中  $K = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ . 于是

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \omega_i(f \circ \varphi) \cdot \Delta t_i &= \sum_{\omega_i(\varphi) \geq \delta} \omega_i(f \circ \varphi) \cdot \Delta t_i + \sum_{\omega_i(\varphi) < \delta} \omega_i(f \circ \varphi) \cdot \Delta t_i \\ &\leq 2K \cdot \sum_{\omega_i(\varphi) \geq \delta} \Delta t_i + \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)} \cdot \sum_{\omega_i(\varphi) < \delta} \Delta t_i \\ &\leq 2K \cdot \frac{\varepsilon}{4K + 1} + \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)} \cdot (\beta - \alpha) < \varepsilon. \end{aligned}$$

由定理 6.1.5 (4) 知  $f \circ \varphi$  在  $[\alpha, \beta]$  上可积. □

**注.** 如果条件改为  $f$  可积,  $\varphi$  连续, 则复合函数  $f(\varphi)$  未必可积 (有反例).

在本节最后, 我们简要介绍一下 Lebesgue 关于可积函数的进一步刻画.

**定义 6.1.2** (零测集). 设  $A \subset \mathbb{R}$ , 如果任给  $\varepsilon > 0$ , 均存在覆盖  $A$  的至多可数个开区间  $\{I_i\}$ , 使得

$$\sum_{i=1}^n |I_i| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq 1,$$

则称  $A$  为零测集.

**例 6.1.4.** (1) 有限集是零测集; (2) 可数集是零测集; (3) 零测集的子集仍为零测集; (4) 可数个零测集之并仍为零测集.

**证明.** (1) 设  $A = \{x_i\}_{i=1}^n$  为有限点集, 任给  $\varepsilon > 0$ , 记

$$I_i = \left(x_i - \frac{\varepsilon}{2n}, x_i + \frac{\varepsilon}{2n}\right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

显然,  $\{I_i\}$  组成了  $A$  的一个覆盖, 且这些开区间的长度之和为

$$\sum_{i=1}^n |I_i| = \sum_{i=1}^n 2 \frac{\varepsilon}{2n} = \varepsilon,$$

因此  $A$  为零测集.

(2) 设  $A = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$  为可数点集, 任给  $\varepsilon > 0$ , 记

$$I_i = \left(x_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, x_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\right), \quad i = 1, 2, \dots.$$

显然,  $\{I_i\}$  组成了  $A$  的一个覆盖, 且

$$\sum_{i=1}^n |I_i| = \sum_{i=1}^n 2 \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} < \varepsilon,$$

因此  $A$  为零测集.

(3) 按定义, 这是显然的.

(4) 设  $A_i$  ( $i \geq 1$ ) 为一列零测集. 于是任给  $\varepsilon > 0$ , 对于固定的  $i$ , 存在  $A_i$  的开区间覆盖  $\{I_{ij}\}$ , 使得  $\{I_{ij}\}$  中任意有限个区间的长度之和均不超过  $\frac{\varepsilon}{2^i}$ . 因为可数个可数集合的并集仍是可数的, 故所有这些开区间  $\{I_{ij}\}$  仍组成了  $\{A_i\}$  的并集的覆盖, 且任意有限个开区间的长度和不超过

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \frac{\varepsilon}{2^3} + \dots \leq \varepsilon.$$

因此  $\{A_i\}$  的并集仍为零测集.  $\square$

现在设  $f$  为  $[a, b]$  上的有界函数. 我们回忆一下, 函数  $f$  在  $x \in [a, b]$  处的振幅定义为

$$\omega(f, x) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \sup\{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in (x-r, x+r) \cap [a, b]\}.$$

$f$  在  $x$  处连续当且仅当  $\omega(f, x) = 0$ . 设  $\delta > 0$ , 记

$$D_\delta = \{x \in [a, b] \mid \omega(f, x) \geq \delta\},$$

则  $f$  的不连续点 (间断点) 全体为  $D_f = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{\frac{1}{n}}$ .

**定理 6.1.10** (Lebesgue). 有界函数  $f$  在  $[a, b]$  上 Riemann 可积的充分必要条件是它的不连续点集  $D_f$  为零测集.

**证明.** (必要性) 设  $f$  在  $[a, b]$  上 Riemann 可积. 固定  $\delta > 0$ , 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $[a, b]$  的分割

$$\pi : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,$$

使得

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \cdot \Delta x_i < \varepsilon \cdot \frac{\delta}{2}.$$

如果  $x \in D_\delta \cap (x_{i-1}, x_i)$ , 则显然  $\omega_i \geq \omega(f, x) \geq \delta$ . 因此从上式可得

$$\sum_{D_\delta \cap (x_{i-1}, x_i) \neq \emptyset} \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}.$$

显然

$$D_\delta \subset \bigcup_{D_\delta \cap (x_{i-1}, x_i) \neq \emptyset} (x_{i-1}, x_i) \bigcup_{i=0}^n \left(x_i - \frac{\varepsilon}{4(n+1)}, x_i + \frac{\varepsilon}{4(n+1)}\right),$$

且

$$\sum_{D_\delta \cap (x_{i-1}, x_i) \neq \emptyset} \Delta x_i + \frac{2\varepsilon}{4(n+1)} \cdot (n+1) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

由定义即知  $D_\delta$  为零测集. 这说明  $Df = \bigcup_{n \geq 1} D_{\frac{1}{n}}$  为零测集.

(充分性) 设  $|f(x)| \leq K, \forall x \in [a, b]$ . 由假设,  $D_f$  为零测集, 故任给  $\varepsilon > 0$ , 存在开区间  $\{(\alpha_j, \beta_j) | j = 1, 2, \dots\}$ , 使得  $D_f \subset \bigcup_j (\alpha_j, \beta_j)$ , 且

$$\sum_j (\beta_j - \alpha_j) \leq \frac{\varepsilon}{4K+1}.$$

对于  $x \in [a, b] - \bigcup_j (\alpha_j, \beta_j)$ , 因为  $f$  在  $x$  处连续, 故存在包含  $x$  的开区间  $I_x$ , 使得  $f$  在  $I_x$  上的振幅小于  $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ . 由于  $\{(\alpha_j, \beta_j), I_x\}$  为紧致集  $[a, b]$  的一个开覆盖, 它有有限子覆盖, 且由下面的 Lebesgue 数引理, 可取  $[a, b]$  的分割

$$\pi: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,$$

使得每一个小区间  $[x_{i-1}, x_i]$  必含于某个  $(\alpha_j, \beta_j)$  或  $I_x$  中. 此时

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot \Delta x_i &\leq \sum_{[x_{i-1}, x_i] \subset (\alpha_j, \beta_j)} \omega_i \cdot \Delta x_i + \sum_{[x_{i-1}, x_i] \subset I_x} \omega_i \cdot \Delta x_i \\ &\leq 2K \sum_{[x_{i-1}, x_i] \subset (\alpha_j, \beta_j)} \Delta x_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{[x_{i-1}, x_i] \subset I_x} \Delta x_i \\ &\leq 2K \sum_j (\beta_j - \alpha_j) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a) \\ &\leq 2K \frac{\varepsilon}{4K+1} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

因此  $f$  在  $[a, b]$  上 Riemann 可积.  $\square$

**引理 6.1.11** (Lebesgue 数). 设  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$  为闭区间  $[a, b]$  的一个开覆盖, 则存在正数  $\lambda > 0$ , 使得任何长度不超过  $\lambda$  的闭区间  $I \subset [a, b]$  必定完全包含于某个开集  $U_\alpha$  中.

**证明.** (反证法) 如果不然, 则存在一列闭区间  $I_n, n = 1, 2, \dots$ , 使得  $|I_n| < \frac{1}{n}$ , 但  $I_n$  均不是任何  $U_\alpha$  的子集. 记  $I_n = [a_n, b_n]$ , 由于  $\{a_n\}$  为有界点列, 从而必有收敛子列, 不妨设  $\{a_n\}$  本身收敛, 其极限记为  $\xi \in [a, b]$ . 显然,  $\{b_n\}$  也收敛到  $\xi$ . 因



为  $\{U_\alpha\}$  为  $[a, b]$  的开覆盖, 故存在某个  $\alpha$ , 使得  $\xi \in U_\alpha$ . 又因为  $U_\alpha$  为开集, 故存在  $\delta > 0$ , 使得  $(\xi - \delta, \xi + \delta) \subset U_\alpha$ . 这说明, 当  $n$  充分大时, 有

$$a_n, b_n \in (\xi - \delta, \xi + \delta) \subset U_\alpha,$$

此时  $I_n = [a_n, b_n] \subset U_\alpha$ . 这与  $I_n$  的选取相矛盾.  $\square$

利用 Lebesgue 定理重新判断本节定理和例子中函数的可积性就显得较简单了, 请读者自行完成.

### 习题 6.1

1. 判断下列函数在  $[0, 1]$  上的可积性:

$$\begin{aligned} (1) f(x) &= \begin{cases} -1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases} & (2) f(x) &= \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases} \\ (3) f(x) &= \begin{cases} \operatorname{sgn}(\sin \frac{\pi}{x}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} & (4) f(x) &= \begin{cases} \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}], & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

2. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 则  $f(x+c)$  在  $[a-c, b-c]$  上可积, 且

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a-c}^{b-c} f(x+c)dx.$$

3. 计算下列积分:

$$(1) \int_a^b |x - \frac{a+b}{2}| dx; \quad (2) \int_a^b (x - \frac{a+b}{2})^2 dx.$$

4. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积,  $g(x)$  与  $f(x)$  只在有限个点处不同, 则  $g(x)$  也可积, 且

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

5. 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上可积, 且  $\int_0^1 f(x)dx = A > 0$ . 证明, 存在子区间  $[\alpha, \beta]$ , 使得  $f(x) > \frac{1}{2}A, \forall x \in [\alpha, \beta]$ . (提示: 用反证法估计上和.)

6. 设  $f(x)$  为  $[0, 1]$  上的非负可积函数, 且  $\int_0^1 f(x)dx = 0$ . 证明, 任给  $\varepsilon > 0$ , 均存在子区间  $[\alpha, \beta]$ , 使得  $f(x) < \varepsilon, \forall x \in [\alpha, \beta]$ .

7. 设  $f(x)$  为  $[a, b]$  上的连续函数. 如果存在一个分割, 使得关于该分割的上和与下和相等, 则  $f$  为常值函数.
8. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 且存在常数  $C > 0$ , 使得  $|f(x)| \geq C$  ( $a \leq x \leq b$ ). 证明  $\frac{1}{f}$  在  $[a, b]$  上也是可积的.
9. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 则函数

$$\underline{f}(x) = \inf_{t \in [a, x]} \{f(t)\}, \quad \overline{f}(x) = \sup_{t \in [a, x]} \{f(t)\}$$

也是  $[a, b]$  上的可积函数.

10. 设  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 且  $f(x)$  与  $g(x)$  在至多可数个点处不相等, 则

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

11. (\*) 设  $f(x) > 0$  为  $[a, b]$  上的可积函数, 证明  $\int_a^b f(x)dx > 0$ .
12. (\*) 证明任何 (非退化的) 区间均不是零测集.
13. (\*) 设  $f, g$  均为可积函数, 如果  $f$  与  $g$  只在一个零测集上不相等, 则它们的积分相等. (提示: 用上题, 考虑任意积分和.)
14. (\*) 设  $f$  可积, 有界函数  $g$  与  $f$  只在一个闭的零测集上不相等, 则  $g$  也是可积的, 且它们的积分相等.

## §6.2 定积分的性质

为了方便起见, 我们约定

$$\text{当 } a < b \text{ 时, } \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx,$$

$$\text{当 } a = b \text{ 时, } \int_a^b f(x)dx = 0.$$

**定理 6.2.1.** (1) 设  $f, g$  在  $[a, b]$  上可积,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , 则  $\lambda f + \mu g$  在  $[a, b]$  上可积, 且

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)dx + \mu \cdot \int_a^b g(x)dx.$$

(2) 设  $f$  在  $[a, b]$  上可积,  $c \in (a, b)$ , 则  $f$  在  $[a, c]$  和  $[c, b]$  上可积, 且

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

**证明.** (1) 任给  $\varepsilon > 0$ , 由  $f, g$  可积知, 存在  $\delta > 0$ , 当  $[a, b]$  的分割  $\pi$  满足  $\|\pi\| < \delta$  时

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon, \quad \left| \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \cdot \Delta x_i - \int_a^b g(x) dx \right| < \varepsilon,$$

从而有

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n [\lambda f(\xi_i) + \mu g(\xi_i)] \cdot \Delta x_i - \left( \lambda \cdot \int_a^b f(x) dx + \mu \cdot \int_a^b g(x) dx \right) \right| \\ & \leq |\lambda| \cdot \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i - \int_a^b f(x) dx \right| + |\mu| \cdot \left| \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \cdot \Delta x_i - \int_a^b g(x) dx \right| \\ & \leq |\lambda| \cdot \varepsilon + |\mu| \cdot \varepsilon = (|\lambda| + |\mu|) \cdot \varepsilon, \end{aligned}$$

根据积分的定义知,  $\lambda f + \mu g$  可积, 且积分为

$$\lambda \cdot \int_a^b f(x) dx + \mu \cdot \int_a^b g(x) dx.$$

(2) 在前节已证  $f$  在小区间上也可积. 设  $\pi_1, \pi_2$  分别是  $[a, c]$  和  $[c, b]$  的分割, 当  $\|\pi_1\| \rightarrow 0, \|\pi_2\| \rightarrow 0$  时,  $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$  也满足条件  $\|\pi\| \rightarrow 0$ . 于是

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{\substack{\|\pi_1\| \rightarrow 0 \\ \|\pi_2\| \rightarrow 0}} \sum_{\pi_1 \cup \pi_2} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \lim_{\|\pi_1\| \rightarrow 0} \sum_{\pi_1} f(\xi_i) \Delta x_i + \lim_{\|\pi_2\| \rightarrow 0} \sum_{\pi_2} f(\xi_i) \Delta x_i \\ &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \end{aligned}$$

**注.** 根据本节开头的约定, 如果  $a, b, c$  属于  $f$  的某可积区间, 则不论它们的相对位置如何, (2) 中等式仍成立.

**定理 6.2.2.** (1) 设  $f$  为  $[a, b]$  上的非负可积函数, 则其积分非负;

(2) 如果  $f, g$  在  $[a, b]$  上可积, 且  $f(x) \geq g(x)$ , 则

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

(3) 如果  $f$  在  $[a, b]$  上可积, 则  $|f(x)|$  也可积, 且

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

**证明.** (1) 如果  $f$  非负可积, 则其积分和总是非负的, 从而积分非负.

(2) 由定理 6.2.1 (1),  $f - g$  在  $[a, b]$  上可积, 由 (1) 知

$$0 \leq \int_a^b (f - g) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx.$$

(3) 设  $f$  在  $[a, b]$  上可积, 则任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $[a, b]$  的分割  $\pi$  满足

$$\sum_{\pi} \omega_i(f) \cdot \Delta x_i < \varepsilon.$$

因为  $||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$ , 故  $\omega_i(|f|) \leq \omega_i(f)$ , 从而

$$\sum_{\pi} \omega_i(|f|) \cdot \Delta x_i < \varepsilon,$$

这说明  $|f|$  可积. 因为

$$\left| \sum_{\pi} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \right| \leq \sum_{\pi} |f(\xi_i)| \cdot \Delta x_i,$$

取极限知

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

下面的结果是连续函数的积分中值定理的推广.

**定理 6.2.3** (积分第一中值定理). 设  $f, g$  在  $[a, b]$  上可积, 且  $g(x)$  不变号, 则存在  $\mu$ ,  $\inf_{x \in [a, b]} f(x) \leq \mu \leq \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ , 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \cdot \int_a^b g(x)dx.$$

**证明.** 不失一般性, 可设  $g(x) \geq 0$ . 则

$$\left( \inf_{x \in [a, b]} f(x) \right) g(x) \leq f(x)g(x) \leq \left( \sup_{x \in [a, b]} f(x) \right) g(x).$$

由定理 6.2.2 知

$$\inf_{x \in [a, b]} f(x) \cdot \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \sup_{x \in [a, b]} f(x) \cdot \int_a^b g(x)dx.$$

上式说明, 如果  $\int_a^b g(x)dx = 0$ , 则  $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ , 此时定理当然成立. 不然, 令

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}, \text{ 则 } \inf_{x \in [a, b]} f(x) \leq \mu \leq \sup_{x \in [a, b]} f(x). \quad \square$$

**注.** 中值定理又称中值公式. 当  $g(x) \equiv 1$  时,

$$\int_a^b f(x)dx = \mu \cdot (b - a).$$

**引理 6.2.4.** 如果  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 令

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b],$$

则  $F$  是  $[a, b]$  上的连续函数.

**证明.** 与第三章第五节例 3.5.4 完全一样, 略. □

**定理 6.2.5** (积分第二中值定理). 设  $f$  在  $[a, b]$  上可积.

(1) 如果  $g$  在  $[a, b]$  上单调递减, 且  $g(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ , 则存在  $\xi \in [a, b]$  使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \cdot \int_a^\xi f(x)dx.$$

(2) 如果  $g$  在  $[a, b]$  上单调递增, 且  $g(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ , 则存在  $\eta \in [a, b]$  使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b) \cdot \int_\eta^b f(x)dx.$$

(3) 一般地, 如果  $g$  为  $[a, b]$  上的单调函数, 则存在  $\zeta \in [a, b]$ , 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \cdot \int_a^\zeta f(x)dx + g(b) \cdot \int_\zeta^b f(x)dx.$$

**证明.** (1) 记  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ . 由引理 6.2.4 知  $F$  连续, 故达到最大值  $M$  和最小值  $m$ . 又因为  $f$  在  $[a, b]$  上可积, 故  $f$  有界. 设  $|f(x)| \leq K, \forall x \in [a, b]$ . 因为  $g$  单调递减, 由前节结论,  $g$  可积. 从而任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $[a, b]$  的分割  $\pi: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ , 使得

$$\sum_{i=1}^n \omega_i(g) \cdot \Delta x_i < \varepsilon.$$

因此有 (注意  $F(x_0) = F(a) = 0$ )

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x)dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [g(x) - g(x_{i-1})] \cdot f(x)dx + \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x) - g(x_{i-1})| \cdot |f(x)|dx + \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \cdot [F(x_i) - F(x_{i-1})] \\ &\leq K \cdot \sum_{i=1}^n \omega_i(g) \cdot \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n-1} F(x_i) \cdot [g(x_{i-1}) - g(x_i)] + F(b) \cdot g(x_{n-1}) \\ &\leq K \cdot \varepsilon + M \cdot \sum_{i=1}^{n-1} [g(x_{i-1}) - g(x_i)] + M \cdot g(x_{n-1}) \\ &= K \cdot \varepsilon + M \cdot g(a). \end{aligned}$$

对于  $-f(x)$ , 上式成为 (注意  $-F$  的最大值是  $-m$ )

$$\int_a^b -f(x) \cdot g(x) dx \leq K \cdot \varepsilon - m \cdot g(a),$$

结合以上两个不等式, 得到

$$m \cdot g(a) - K \cdot \varepsilon \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \cdot g(a) + K \cdot \varepsilon,$$

令  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , 有

$$m \cdot g(a) \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \cdot g(a).$$

如果  $g(a) = 0$ , 则  $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ . 如果  $g(a) > 0$ , 则有

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{g(a)} \leq M,$$

由连续函数的介值定理, 存在  $\xi \in [a, b]$  使得  $F(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{g(a)}$ . 即

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \cdot F(\xi) = g(a) \cdot \int_a^\xi f(x)dx.$$

(2) 令  $\tilde{F}(x) = \int_x^b f(t)dt$ ,  $\tilde{F}$  的最大值记为  $\tilde{M}$ . 与 (1) 类似, 有

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x)dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [g(x) - g(x_i)]f(x)dx + \sum_{i=1}^n g(x_i) \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \\ &\leq K \cdot \sum_{i=1}^n \omega_i(g) \cdot \Delta x_i + \sum_{i=1}^n g(x_i)[\tilde{F}(x_{i-1}) - \tilde{F}(x_i)] \\ &\leq K \cdot \varepsilon + g(x_1) \cdot \tilde{F}(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{F}(x_i)[g(x_{i+1}) - g(x_i)] \\ &\leq K \cdot \varepsilon + \tilde{M} \cdot g(x_1) + \tilde{M} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} [g(x_{i+1}) - g(x_i)] \\ &= K \cdot \varepsilon + \tilde{M} \cdot g(b). \end{aligned}$$

剩下的证明和 (1) 类似.

(3) 先设  $g$  单调递减, 令  $h(x) = g(x) - g(b)$ , 则  $h$  单调递减, 且  $h \geq 0$ . 由 (1), 存在  $\zeta \in [a, b]$ , 使得

$$\int_a^b f(x) \cdot h(x) dx = h(a) \cdot \int_a^\zeta f(x) dx.$$

将  $h(x) = g(x) - g(b)$  代入上式, 化简即得欲证结论.  $g$  单调递增的情况留作习题.  $\square$

注. 在定理的证明过程中用到了求和的 Abel 变换技巧, 进一步的讨论和应用请参见第八章第三节.

**例 6.2.1.** 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0$ .

**证明.** 当  $x \in [0, 1]$  时,  $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x} \leq 1$ , 故  $\frac{1}{2}x^n \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n$ ,

$$\frac{1}{2} \int_0^1 x^n dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^n dx.$$

$n \rightarrow +\infty$  时, 上式两边极限为 0. 本例也可以用第一中值公式证明.  $\square$

**例 6.2.2.** 设  $\beta \geq 0, b > a > 0$ , 证明

$$\left| \int_a^b e^{-\beta x} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \frac{2}{a}.$$

**证明.** 对  $g(x) = \frac{e^{-\beta x}}{x}$ ,  $f(x) = \sin x$  用积分第二中值公式, 此时存在  $\xi \in [a, b]$ , 使得

$$\int_a^b e^{-\beta x} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{e^{-\beta a}}{a} \cdot \int_a^\xi \sin x dx = \frac{e^{-\beta a}}{a} (\cos a - \cos \xi),$$

这说明

$$\left| \int_a^b e^{-\beta x} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq 2 \frac{e^{-\beta a}}{a} \leq \frac{2}{a},$$

欲证结果成立.  $\square$

**例 6.2.3.** 证明  $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx$  存在.

**证明.** 在上例中取  $\beta = 0$ , 则当  $B > A > 0$  时, 有

$$\left| \int_0^B \frac{\sin x}{x} dx - \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx \right| = \left| \int_A^B \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \frac{2}{A} \rightarrow 0 \quad (A \rightarrow \infty),$$

由 Cauchy 收敛准则即知欲证极限存在.  $\square$

**例 6.2.4.** (\*) 证明区间不是零测集.

**证明.** 只要对闭区间证明就可以了. 设闭区间  $[a, b]$  被有限个区间  $\{I_i\}$  所覆盖, 不妨设  $I_i$  均包含于  $[a, b]$ . 记  $\chi_i$  为  $I_i$  的特征函数, 即

$$\chi_i(x) = 1, \text{ 当 } x \in I_i; \quad \chi_i(x) = 0, \text{ 当 } x \notin I_i.$$

于是  $\chi_i$  为  $[a, b]$  上的可积函数, 且

$$\int_a^b \chi_i(x) dx = |I_i|.$$

由  $\{I_i\}$  覆盖  $[a, b]$  可知

$$\sum_i \chi_i(x) \geq 1, \quad \forall x \in [a, b].$$

因此有

$$\sum_i |I_i| = \sum_i \int_a^b \chi_i(x) dx = \int_a^b \sum_i \chi_i(x) dx \geq b - a.$$

如果  $[a, b]$  被一列开区间覆盖, 则存在有限子覆盖, 于是上述论证表明这些开区间的长度之和不小于  $b - a$ . 特别地,  $[a, b]$  不是零测集.  $\square$

**例 6.2.5** (阶梯逼近). 设  $f(x)$  为  $[a, b]$  上的可积函数, 则任给  $\varepsilon > 0$ , 存在阶梯函数  $g(x)$ , 使得

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon.$$

**证明.** 因为  $f$  可积, 故任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $[a, b]$  的分割

$$\pi: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

使得

$$\sum_{i=1}^n \omega_i(f) \Delta x_i < \varepsilon.$$

在  $[a, b]$  上定义阶梯函数  $g$ , 使得

$$g(x) = f(x_{i-1}), \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i), \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

则

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) - g(x)| dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - g(x)| dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - f(x_{i-1})| dx \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \omega_i(f) dx \\ &= \sum_{i=1}^n \omega_i(f) (x_i - x_{i-1}) < \varepsilon. \end{aligned}$$



因此  $g(x)$  就是所求阶梯函数. □

注. 显然, 我们构造的阶梯函数还满足条件

$$\inf_{x \in [a, b]} f(x) \leq g \leq \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

**例 6.2.6** (Riemann-Lebesgue). 设  $f(x)$  为  $[a, b]$  上的可积函数, 则

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x dx = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx = 0.$$

**证明.** 以第一个极限为例. 因为  $f$  可积, 故任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $[a, b]$  的分割

$$\pi: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

使得

$$\sum_{i=1}^n \omega_i(f) \Delta x_i < \frac{1}{2} \varepsilon.$$

又因为  $f$  有界, 故存在  $K$ , 使得  $|f(x)| \leq K, \forall x \in [a, b]$ . 于是当  $\lambda > \frac{4nK}{\varepsilon}$  时, 有

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \sin \lambda x dx \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \sin \lambda x dx \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - f(x_{i-1})] \sin \lambda x dx + \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1}) \sin \lambda x dx \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - f(x_{i-1})| dx + \sum_{i=1}^n |f(x_{i-1})| \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin \lambda x dx \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \omega_i(f) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n K \frac{1}{\lambda} |\cos \lambda x_{i-1} - \cos \lambda x_i| \\ &< \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{2nK}{\lambda} < \varepsilon. \end{aligned}$$

这说明第一个极限等式成立. 第二个极限等式同理可证. □

### 习题 6.2

1. 如果  $f, g$  在  $[a, b]$  上可积, 则  $\max\{f, g\}$  及  $\min\{f, g\}$  均可积.
2. 设  $f(x)$  是  $[a, b]$  上定义的函数. 如果  $f^2(x)$  可积, 则  $|f(x)|$  也可积.
3. 举例说明, 可积函数的复合不一定可积. (提示: 考虑符号函数和 Riemann 函数的复合.)

4. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 证明存在  $\xi \in [a, b]$ , 使得

$$\int_a^\xi f(x)dx = \int_\xi^b f(x)dx.$$

5. 设  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 则有如下 Cauchy-Schwarz 不等式:

$$\left[ \int_a^b f(x)g(x)dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx.$$

6. 设  $f(x) \geq 0$  在  $[a, b]$  上可积,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , 则

$$\left( \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx \right)^2 + \left( \int_a^b f(x) \sin \lambda x dx \right)^2 \leq \left[ \int_a^b f(x) dx \right]^2.$$

(提示:  $f = \sqrt{f} \cdot \sqrt{f}$ , 用上题.)

7. 比较下列各题中积分的大小:

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx \text{ 与 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx; \quad (2) \int_0^1 e^{-x} dx \text{ 与 } \int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

8. 设  $f(x)$  为  $[0, 1]$  上的可积函数, 则  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^n f(x) dx = 0$ .

9. 设  $f(x)$  为  $[0, 1]$  上的连续函数, 则  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx = f(1)$ . (提示:  $nx^n$  在  $[0, 1]$  上积分趋于 1, 在  $[0, \delta]$  上很小, 如果  $0 < \delta < 1$ .)

10. 证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+p} \frac{\cos x}{x} dx = 0 \quad (p > 0).$$

11. (\*) 设  $f(x)$  为  $[a, b]$  上的可积函数, 则任给  $\varepsilon > 0$ , 存在连续函数  $g(x)$ , 使得  $\inf f \leq g(x) \leq \sup f$ , 且

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon.$$

12. (\*) 设  $f(x)$  在  $[c, d]$  上可积, 设  $[a, b] \subset (c, d)$ , 则

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx = 0.$$

13. (\*) 设  $a, b > 0$ ,  $f(x)$  在  $[-a, b]$  上非负可积, 且  $\int_{-a}^b x f(x) dx = 0$ , 则

$$\int_{-a}^b x^2 f(x) dx \leq ab \int_{-a}^b f(x) dx.$$

14. (\*) 设  $f(x), g(x)$  为  $[a, b]$  上同时单调递减或同时单调递增函数, 则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx.$$

## §6.3 微积分基本公式

**定理 6.3.1** (微积分基本定理). 设  $f$  在  $[a, b]$  上可积, 且在  $x_0 \in [a, b]$  处连续, 则  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  在  $x_0$  处可导, 且

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

**证明.** 与定理 4.3.2 相同, 略.  $\square$

**推论 6.3.2.** 设  $f$  在  $[a, b]$  上连续,  $u(x) : (c, d) \rightarrow [a, b]$  与  $v(x) : (c, d) \rightarrow [a, b]$  为可微函数, 则有

$$\left( \int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt \right)' = f(u(x))u'(x) - f(v(x))v'(x).$$

**证明.** 应用复合函数求导的链规则, 有

$$\begin{aligned} \left( \int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt \right)' &= \left( \int_a^{u(x)} f(t)dt - \int_a^{v(x)} f(t)dt \right)' \\ &= \left( \int_a^u f(t)dt \right)' \Big|_{u=u(x)} u'(x) - \left( \int_a^v f(t)dt \right)' \Big|_{v=v(x)} v'(x) \\ &= f(u(x))u'(x) - f(v(x))v'(x). \end{aligned}$$

**例 6.3.1.** 设  $F(x) = \int_{-x}^{2x} \frac{\sin t}{t} dt$ , 求  $F'(x)$  及  $F'(0)$ .

**解.** 在  $t = 0$  处定义  $\frac{\sin t}{t}$  为 1, 此时  $\frac{\sin t}{t}$  为  $\mathbb{R}$  上的连续函数. 由上述推论可得

$$F'(x) = \frac{\sin(2x)}{2x} \cdot 2 - \frac{\sin(-x)}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}(\sin x + \sin 2x)$$

特别地, 当  $x = 0$  时,  $F'(0) = 1 + 2 = 3$ .  $\square$

**定理 6.3.3** (Newton-Leibniz 公式). 设  $F$  在  $[a, b]$  上可微, 且  $F' = f$  在  $[a, b]$  上 Riemann 可积, 则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

(此式又写为  $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$ ).

**证明.** 任取  $[a, b]$  的一个分割  $\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ , 由微分中值定理, 存在  $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ , 使得

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)\Delta x_i, \quad i = 1, \cdots, n.$$

因此

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

因为  $f$  可积, 故当  $\|\pi\| \rightarrow 0$  时上式右边趋于  $\int_a^b f(x) dx$ , 这说明

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

这就证明了公式.  $\square$

注. (1) 本定理结论与第四章第三节相应的定理一样, 只是条件弱一些, 读者可比较两处的证明有何不同.

(2) 需要注意的是, 可微函数的导函数不一定是可积的, 如函数

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

在  $[0, 1]$  上可微, 其导函数为

$$F'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

这是无界函数, 因此不是 Riemann 可积的. 进一步还可以构造导函数有界但不可积的例子.

**例 6.3.2.** 设  $f$  在  $[a, b]$  上连续可微,  $f(a) = 0$ , 则

$$\int_a^b f^2(x) dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b [f'(x)]^2 dx.$$

**证明.** 我们先来估计  $f^2(x)$ :

$$\begin{aligned} f^2(x) &= (f(x) - f(a))^2 = \left[ \int_a^x f'(t) dt \right]^2 \\ &\leq \int_a^x [f'(t)]^2 dt \int_a^x 1^2 dt \quad (\text{Cauchy - Schwarz}) \\ &\leq (x-a) \int_a^x [f'(t)]^2 dt, \end{aligned}$$

这说明

$$\begin{aligned} \int_a^b f^2(x) dx &\leq \int_a^b (x-a) \int_a^x [f'(t)]^2 dt dx \\ &= \int_a^b [f'(t)]^2 dt \frac{(x-a)^2}{2} \Big|_a^b \\ &= \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b [f'(x)]^2 dx. \end{aligned}$$

**定理 6.3.4** (换元法). 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $x = \varphi(t)$  在  $[\alpha, \beta]$  上连续可微, 且  $\varphi([\alpha, \beta]) \subset [a, b]$ ,  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$ , 则

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$

**证明.** 因为  $f$  连续, 由微积分基本定理,  $f$  有原函数  $F$ , 即  $F'(x) = f(x)$ , 故

$$[F(\varphi(t))]' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

再由 Newton-Leibniz 公式,

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt &= \int_{\alpha}^{\beta} [F(\varphi(t))]'dt \\ &= F(\varphi(t))\Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx. \end{aligned}$$

**注.** (1) 根据定理 6.3.3 可知, 关于  $\varphi(t)$  的条件可以降低, 只要  $\varphi'(t)$  可积, 则定理仍成立;

(2) 对于可积 (不一定连续) 的  $f$ , 下面一般的换元公式仍成立:

**(一般的换元法)** 设函数  $g(t)$  在  $[\alpha, \beta]$  上 Riemann 可积, 固定  $c \in [\alpha, \beta]$  令  $G(x) = \int_c^x g(t)dt$ , 则  $G$  为连续函数. 设  $f$  在区间  $G([\alpha, \beta])$  上可积,  $G(\alpha) = a$ ,  $G(\beta) = b$ , 则  $f(G(t))g(t)$  在  $[\alpha, \beta]$  上可积, 且

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(G(t))g(t)dt.$$

我们来证明上述一般换元公式的一个特殊情形, 它对于大多数应用已经足够了, 一般的情形参见第十四章附录.

**定理 6.3.5** (换元法之二). (\*) 设  $\varphi$  为  $[\alpha, \beta]$  上的单调可微函数, 且  $\varphi'$  可积. 如果  $f$  在区间  $\varphi([\alpha, \beta])$  上可积,  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$ , 则  $f(\varphi(t))\varphi'(t)$  在  $[\alpha, \beta]$  上可积, 且

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

**证明.** 不妨设  $\varphi$  是单调递增函数. 任取  $[\alpha, \beta]$  的一个分割

$$\pi: \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta,$$

则得到  $[a, b]$  的一个如下分割

$$\pi': a = \varphi(\alpha) = x_0 \leq \varphi(t_1) = x_1 \leq \cdots \leq \varphi(t_n) = x_n = b,$$

这个分割中可能有相同的分点. 根据微分中值定理, 存在  $\zeta_i \in (t_{i-1}, t_i)$ , 使得

$$\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\zeta_i)(t_i - t_{i-1}),$$

特别地, 因为  $\varphi'$  可积, 从而是有界函数, 上式就表明当  $\|\pi\|$  趋于零时,  $\|\pi'\|$  也趋于零. 由  $\varphi$  的单调性知  $\varphi(\zeta_i) \in [\varphi(t_{i-1}), \varphi(t_i)] = [x_{i-1}, x_i]$ , 因此下面的和

$$\sum_{i=1}^n f(\varphi(\zeta_i))(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}))$$

仍为  $f$  在  $[a, b]$  上的一个 Riemann 和, 且

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\varphi(\zeta_i))(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})) = \int_a^b f(x)dx.$$

另一方面, 任取  $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ , 考虑函数  $f(\varphi(t))\varphi'(t)$  关于分割  $\pi$  的 Riemann 和  $\sum_{i=1}^n f(\varphi(\xi_i))\varphi'(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$ , 我们有如下估计

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n f(\varphi(\zeta_i))(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})) - \sum_{i=1}^n f(\varphi(\xi_i))\varphi'(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \right| \\ & \leq \left| \sum_{i=1}^n [f(\varphi(\zeta_i)) - f(\varphi(\xi_i))](\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})) \right| \\ & \quad + \left| \sum_{i=1}^n f(\varphi(\xi_i))(\varphi'(\zeta_i) - \varphi'(\xi_i))(t_i - t_{i-1}) \right| \\ & \leq \sum_{i=1}^n \omega_i(f)\Delta x_i + \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \sum_{i=1}^n \omega_i(\varphi')\Delta t_i, \end{aligned}$$

根据  $f$  和  $\varphi'$  的可积性可知, 当  $\|\pi\| \rightarrow 0$  时上式最后的不等号的右端趋于零, 因此  $f(\varphi(t))\varphi'(t)$  的 Riemann 和收敛, 且极限为  $f$  在  $[a, b]$  上的积分.  $\square$

**定理 6.3.6 (分部积分).** 设  $u(x), v(x)$  在  $[a, b]$  上可微且导函数可积, 则

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

**证明.** 在题设条件下, 函数  $u(x)v'(x)$  和  $u'(x)v(x)$  都是可积的. 由定理 6.3.3 得

$$\begin{aligned} & \int_a^b u(x)v'(x)dx + \int_a^b u'(x)v(x)dx \\ & = \int_a^b (u(x)v'(x) + u'(x)v(x))dx \\ & = \int_a^b (uv)'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b. \end{aligned}$$

定理得证.  $\square$

例 6.3.3. 求下列积分

$$(1) \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{t \cdot \sin 2t^2}{1 + \sin t^2} dt; \quad (2) \int_a^{2a} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^4} dx \quad (a > 0); \quad (3) \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

解. (1) 因为

$$t \cdot \sin 2t^2 = 2t \sin t^2 \cdot \cos t^2 = \sin t^2 \cdot (\sin t^2)',$$

故令  $x = \sin t^2$ , 有

$$\text{积分} = \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx = [x - \ln(1+x)]_0^1 = 1 - \ln 2.$$

(2) 令  $x = \frac{a}{\cos t}$ , 当  $x$  从  $a$  变到  $2a$  时,  $t$  从  $0$  变到  $\frac{\pi}{3}$ , 故

$$\text{积分} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{a^2} \sin^2 t \cdot \cos t dt = \frac{1}{3a^2} \sin^3 t \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{8a^2}.$$

(3) 记

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx, \end{aligned}$$

对后一积分令  $x = \pi - t$ , 有

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -\frac{(\pi - t) \sin t}{1 + \cos^2 t} dt \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t \sin t}{1 + \cos^2 t} dt, \end{aligned}$$

因此

$$I = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt = \pi \left( -\arctan(\cos t) \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}.$$

例 6.3.4. 计算积分 ( $m \in \mathbb{Z}^+$ )

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx, \quad J_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x dx.$$

解. 用分部积分法. 易见  $I_0 = \pi/2$ ,  $I_1 = 1$ . 当  $m \geq 2$  时

$$\begin{aligned} I_m &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x d(\cos x) \\ &= (-\sin^{m-1} x)(\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (m-1) \sin^{m-2} x \cdot \cos^2 x dx \\ &= (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x (1 - \sin^2 x) dx \\ &= (m-1) I_{m-2} - (m-1) I_m, \end{aligned}$$

因此  $I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}$ . 从而有

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} I_{2n-4} = \cdots = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2}.$$

同理可得

$$I_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

利用变换  $x = \frac{\pi}{2} - t$  知  $J_m = I_m$ . □

注. 注意到当  $0 \leq x \leq \pi/2$  时,  $\sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x \leq \sin^{2n-1} x$ , 因此有

$$I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1},$$

代入上述计算结果, 得

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!},$$

或改写为

$$\frac{1}{2n+1} \left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \leq \frac{\pi}{2} \leq \left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n},$$

上式两端之差小于  $\frac{1}{2n} \frac{\pi}{2}$ , 故极限存在且为  $\frac{\pi}{2}$ , 这就得到了下面的 Wallis 公式:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n+1}.$$

**例 6.3.5.** 设  $f$  是周期为  $T$  的可积周期函数. 则对任意的  $a \in \mathbb{R}$ , 有

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

**证明.**

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx.$$

最后的一项积分通过变换  $x = t + T$  成为

$$\int_0^a f(t+T) dt = \int_0^a f(t) dt,$$

代入前式就得到了等式的证明. □

**例 6.3.6.** (\*) 设  $f$  为  $[a, b]$  上的可积函数, 则

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b (b-x) f(x) dx,$$

其中

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b].$$



**证明.** 先设  $f$  连续. 此时  $F$  可导, 且  $F' = f$ . 由分部积分法可得

$$\begin{aligned}\int_a^b F(x)dx &= F(x)x \Big|_a^b - \int_a^b F'(x)x dx \\ &= bF(b) - \int_a^b xf(x)dx = \int_a^b (b-x)f(x)dx.\end{aligned}$$

对于一般的情形, 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在连续函数  $g$ , 使得

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|dx \leq \varepsilon.$$

此时, 令

$$G(x) = \int_a^x g(t)dt, \quad x \in [a, b],$$

则有

$$|F(x) - G(x)| = \left| \int_a^x (f(t) - g(t))dt \right| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b],$$

并且

$$\int_a^b G(x)dx = \int_a^b (b-x)g(x)dx.$$

于是

$$\begin{aligned}\left| \int_a^b F(x)dx - \int_a^b (b-x)f(x)dx \right| &= \left| \int_a^b (F(x) - G(x))dx - \int_a^b (b-x)(f(x) - g(x))dx \right| \\ &\leq \int_a^b |F(x) - G(x)|dx + \int_a^b (b-x)|f(x) - g(x)|dx \\ &\leq (b-a)\varepsilon + (b-a) \int_a^b |f(x) - g(x)|dx \\ &\leq 2(b-a)\varepsilon,\end{aligned}$$

由  $\varepsilon$  的任意性即知欲证等式对  $f$  成立. □

### 习题 6.3

1. 求下列各导数:

$$(1) \frac{d}{dx} \int_0^{\cos^2 x} \sqrt{1+t^2} dt, \quad (2) \frac{d}{dx} \int_{\sin x}^x \frac{dt}{\sqrt{1+\sin^2 t}}, \quad (3) \frac{d}{dx} \int_a^b \sin(x+t)dt.$$

2. 计算下列积分:

$$\begin{aligned}(1) & \int_0^\pi \cos^2 x dx; & (2) & \int_1^4 \frac{1+x}{\sqrt{x}} dx; & (3) & \int_0^a \sqrt{a-x} dx; \\ (4) & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x dx}{1+\cos x}; & (5) & \int_0^\pi \sin^3 x dx; & (6) & \int_{-\pi}^\pi x^2 \cos x dx; \\ (7) & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cos 4x dx; & (8) & \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx; & (9) & \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x} dx.\end{aligned}$$

3. 计算下面的积分, 并利用它们证明  $3 + 1/15 < \pi < 3 + 1/7$ :

$$(1) \int_0^1 \frac{(1-x^2)x^4}{1+x^2} dx; \quad (2) \int_0^1 \frac{(1-x)^4 x^4}{1+x^2} dx.$$

4. 利用积分求下列极限:

$$\begin{aligned} (1) & \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right); \\ (2) & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{n-1}{n} \pi \right); \\ (3) & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} (1 + 2^3 + \cdots + n^3). \end{aligned}$$

5. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \int_0^x \sin^3 t dt; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x \cos t^2 dt; \quad (3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{\int_0^x e^{2t^2} dt}.$$

6. 设  $m, n$  为非零整数, 则

$$\begin{aligned} (1) & \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx dx = \pi, \\ (2) & \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0 \quad (m \neq \pm n), \\ (3) & \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0. \end{aligned}$$

7. 用递推公式求下列积分 ( $m, n$  为非负整数):

$$\begin{aligned} (1) & \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx; & (2) & \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx; & (3) & \int_0^1 (1-x^2)^n dx; \\ (4) & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin nx dx; & (5) & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx dx; & (6) & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin^n x dx; \\ (7) & \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx; & (8) & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{\sin x} dx; & (9) & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x} dx. \end{aligned}$$

8. 如果  $f(x)$  为  $[0, 1]$  上的连续函数, 则

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx,$$

并利用这个等式计算积分  $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ .

9. 计算下列积分:

$$(1) \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx; \quad (2) \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x} dx.$$

10. 设  $0 < \alpha, \beta < 1$ , 证明

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-2\alpha x + \alpha^2} \sqrt{1-2\beta x + \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \ln \frac{1+\sqrt{\alpha\beta}}{1-\sqrt{\alpha\beta}}.$$

11. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上二阶连续可导, 则

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2}[f(a) + f(b)](b-a) + \frac{1}{2} \int_a^b (x-a)(x-b)f''(x) dx.$$

12. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续可微, 且  $f(a) = f(b) = 0$ . 证明, 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$|f'(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$$

(提示: 考虑  $(x - \frac{a+b}{2})f'(x)$  的积分.)

13. 设  $f(x)$  是周期为  $T$ , 且在闭区间上可积的函数, 则

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda f(x) dx = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx.$$

14. (\*) 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx = \frac{\pi}{2} f(0).$$

15. (\*) 设  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上连续, 证明

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{-1}^1 \frac{hf(x)}{h^2+x^2} dx = \pi f(0).$$

## §6.4 定积分的近似计算



本节内容可以作为选读材料. 虽然利用微积分基本公式可以很方便地算出很多定积分, 但如果被积函数的原函数没有显式表示, 或者被积函数比较复杂, 直接利用微积分基本公式往往不太实际. 为此我们在本节介绍一些初步的近似计算方法, 并讨论误差估计.

### (1) 矩形公式

设  $f$  为  $[a, b]$  上的可积函数. 取  $c \in [a, b]$ , 我们可以近似的用矩形的面积  $f(c)(b-a)$  来估算  $f$  在  $[a, b]$  上的积分. 为了估计误差, 设  $f$  可微, 且  $|f'(x)| \leq M_1$ ,  $\forall x \in (a, b)$ . 由微分中值定理, 有

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - f(c)(b-a) \right| &= \left| \int_a^b (f(x) - f(c)) dx \right| = \left| \int_a^b f'(\xi)(x-c) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f'(\xi)| |x-c| dx \leq M_1 \int_a^b |x-c| dx \\ &= \frac{1}{2} M_1 [(c-a)^2 + (b-c)^2]. \end{aligned}$$

从上式可以看出, 当  $c = \frac{a+b}{2}$  时误差估计达到最优. 即有

$$\left| \int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \right| \leq \frac{1}{4}M_1(b-a)^2. \quad (6.1)$$

注意到, 如果  $f$  为线性函数, 则上式左端为零 (即误差为零), 而右端并不能反映出这一点. 现在我们进一步设  $f$  二阶可微, 且  $|f''(x)| \leq M_2, \forall x \in [a, b]$ . 将  $f$  在  $\frac{a+b}{2}$  处做 Taylor 展开, 得

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}f''(\xi)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2,$$

两边积分, 得

$$\int_a^b f(x)dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \frac{1}{2} \int_a^b f''(\xi)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx,$$

因此有

$$\left| \int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \right| \leq \frac{1}{2}M_2 \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{24}M_2(b-a)^3. \quad (6.2)$$

一般地, 我们将区间  $[a, b]$  作  $n$  等分, 在每一个小区间上均用矩形面积逼近积分, 即令

$$R_n = \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{2i-1}{n}(b-a)\right), \quad (6.3)$$

称为  $f$  在  $[a, b]$  上的矩形公式. 当  $f$  可微时, 误差估计为

$$\left| \int_a^b f(x)dx - R_n \right| \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{4}M_1\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 = \frac{M_1}{4n}(b-a)^2; \quad (6.4)$$

当  $f$  二阶可微时, 误差估计为

$$\left| \int_a^b f(x)dx - R_n \right| \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{24}M_2\left(\frac{b-a}{n}\right)^3 = \frac{M_2}{24n^2}(b-a)^3. \quad (6.5)$$

## (2) 梯形公式

设  $f$  为  $[a, b]$  上的连续函数, 如果  $f$  二阶可微, 且  $|f''(x)| \leq M_2, \forall x \in [a, b]$ , 则由第五章第四节 (5.3) 式可得

$$|f(x) - l(x)| \leq \frac{1}{2}M_2(x-a)(b-x), \quad x \in [a, b],$$

其中

$$l(x) = \frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b), \quad x \in [a, b].$$

因此有

$$\int_a^b l(x)dx = \frac{f(a) + f(b)}{2}(b-a),$$

这也就是梯形面积公式. 我们有如下误差估计

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \frac{f(a) + f(b)}{2}(b-a) \right| \leq \frac{1}{2}M_2 \int_a^b (x-a)(b-x)dx = \frac{M_2}{12}(b-a)^3. \quad (6.6)$$

将区间  $[a, b]$  作  $n$  等分, 在每一个小区间上均用梯形面积逼近积分, 则得到  $f$  的梯形公式

$$T_n = \sum_{i=1}^n \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} \left[ \sum_{i=1}^{n-1} f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right) + \frac{f(a) + f(b)}{2} \right]. \quad (6.7)$$

相应地有误差估计

$$\left| \int_a^b f(x)dx - T_n \right| \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{12}M_2 \left(\frac{b-a}{n}\right)^3 = \frac{M_2}{12n^2}(b-a)^3. \quad (6.8)$$

### (3) Simpson 公式

设  $f$  三阶可微, 且  $|f'''(x)| \leq M_3, \forall x \in [a, b]$ . 考虑经过平面上三点

$$(a, f(a)), \left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right), (b, f(b))$$

的抛物线, 即考虑满足条件

$$p_2(a) = f(a), \quad p_2\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad p_2(b) = f(b)$$

的二次插值多项式, 其表达式为

$$p_2(x) = \frac{(x - \frac{a+b}{2})(x-b)}{(a - \frac{a+b}{2})(a-b)} f(a) + \frac{(x-a)(x-b)}{(\frac{a+b}{2} - a)(\frac{a+b}{2} - b)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(x-a)(x - \frac{a+b}{2})}{(b-a)(b - \frac{a+b}{2})} f(b),$$

直接的计算表明

$$\int_a^b p_2(x)dx = \frac{b-a}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right],$$

这是  $f$  在  $[a, b]$  上的近似积分, 称为一次抛物线公式或 Simpson 公式. 根据插值多项式的余项公式, 有

$$f(x) - p_2(x) = \frac{1}{6}f'''(\xi)(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b), \quad \xi \in (a, b).$$

因此

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)] \right| \\ & \leq \frac{1}{6}M_3 \int_a^b (x-a)\left|x - \frac{a+b}{2}\right|(b-x)dx = \frac{M_3}{192}(b-a)^4. \end{aligned} \quad (6.9)$$

注意到

$$\int_a^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)dx = 0,$$

因此这个误差估计达不到最优. 下面假设  $f$  四阶可微. 我们选定常数  $\mu$ , 使得函数

$$g(x) = f(x) - p_2(x) - \mu(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)$$

在  $\frac{a+b}{2}$  处的导数为零. 设  $c \neq a, \frac{a+b}{2}, b$ . 考虑辅助函数

$$F(x) = g(x) - \frac{g(c)}{(c-a)(c-\frac{a+b}{2})^2(c-b)}(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b),$$

于是  $F(a) = F(\frac{a+b}{2}) = F(b) = F(c) = 0$ ,  $F'(\frac{a+b}{2}) = 0$ . 由 Rolle 定理, 存在三个不同的点  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  使得

$$F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = F'(\xi_3) = 0,$$

这三个点与  $\frac{a+b}{2}$  也不相同, 因此对  $F'$  继续重复使用 Rolle 定理, 就得到点  $\xi$ , 使得  $F^{(4)}(\xi) = 0$ . 即

$$f^{(4)}(\xi) - \frac{g(c)}{(c-a)(c-\frac{a+b}{2})^2(c-b)}4! = 0,$$

改写为 ( $c$  换成  $x$ )

$$g(x) = \frac{1}{24}f^{(4)}(\xi)(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b),$$

在  $[a, b]$  上积分, 得

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] \\ &= \frac{1}{24} \int_a^b f^{(4)}(\xi)(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)dx, \end{aligned}$$

如果  $|f^{(4)}(x)| \leq M_4$ , 则有下面的误差估计

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] \right| \\ & \leq \frac{1}{24}M_4 \int_a^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(b-x)dx = \frac{M_4}{180 \times 2^4}(b-a)^5. \end{aligned} \quad (6.10)$$

我们也可以将区间  $[a, b]$  作  $n$  等分, 在每个小区间上用抛物线逼近函数得到一般的 Simpson 公式:

$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{6n} \left[ f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) + f(x_i) \right]. \quad (6.11)$$

误差估计分别如下. 当  $f$  三阶可微时,

$$\left| \int_a^b f(x)dx - S_n \right| \leq \frac{M_3}{192n^3}(b-a)^4; \quad (6.12)$$

当  $f$  四阶可微时,

$$\left| \int_a^b f(x)dx - S_n \right| \leq \frac{M_4}{180(2n)^4}(b-a)^5. \quad (6.13)$$

#### (4) Newton-Cotes 公式

我们可以将上述积分的近似逼近过程继续做下去, 即用高阶插值多项式来逼近  $f$ . 例如, 将区间  $[a, b]$  分为  $m$  等分, 分点为

$$x_i = a + \frac{i}{m}(b-a), \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

考虑在  $\{x_i\}$  处与  $f$  取相同值的 Lagrange 插值多项式  $p_m$ ,

$$p_m(x) = \sum_{i=0}^m \left[ \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right] f(x_i),$$

我们把  $p_m$  的积分看成  $f$  的积分的近似值:

$$\int_a^b p_m(x)dx = (b-a) \sum_{i=0}^m C(m, i) f(x_i), \quad (\text{Newton-Cotes})$$

其中, 系数  $C(m, i)$  与  $f$  无关:

$$\begin{aligned} C(m, i) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx = \frac{1}{m} \int_0^m \prod_{j \neq i} \frac{t - j}{i - j} dt \\ &= \frac{1}{m} \frac{(-1)^{m-i}}{i!(m-i)!} \int_0^m \prod_{j \neq i} (t - j) dt. \end{aligned}$$

如果  $f$  是  $m+1$  阶可微函数, 则由插值多项式的余项公式, 有

$$f(x) - p_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} \prod_{i=0}^m (x - x_i),$$

如果  $|f^{(m+1)}(x)| \leq M_{m+1}$ , 则有如下误差估计

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b p_m(x)dx \right| &\leq \frac{M_{m+1}}{(m+1)!} \int_a^b \prod_{i=0}^m |x - x_i| dx \\ &= \frac{M_{m+1}(b-a)^{m+2}}{(m+1)!m^{m+2}} \int_0^m \prod_{i=0}^m |t - i| dt. \end{aligned}$$

关于积分近似计算的其它公式, 读者可参考其它专门著作, 我们不再赘述.

**例 6.4.1.** 计算积分  $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$  的近似值.

解. 以  $n = 2$  为例. 矩形公式计算积分为

$$R_2 = \frac{1}{2} \left[ f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) \right] = \frac{336}{425} \approx 0.791;$$

梯形公式计算积分为

$$T_2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} f(1) \right] = \frac{31}{40} \approx 0.775;$$

Simpson 公式计算积分为

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{12} \left[ f(0) + 4f\left(\frac{1}{4}\right) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 4f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1) \right] \\ &= \frac{8011}{10200} \approx 0.78539. \end{aligned}$$

根据第四章第二节中高阶导数的计算, 函数  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  的四阶导数可以写为

$$f^{(4)}(x) = (\arctan x)^{(5)} = 24 \cos^5(\arctan x) \sin 5(\arctan x + \frac{\pi}{2}),$$

因此  $|f^{(4)}(x)| \leq 24$ . 这说明  $n = 2$  的 Simpson 公式的误差要小于

$$\frac{24}{180 \cdot 4^4} = \frac{1}{1920} < 0.0005.$$

实际的误差比这个还要小.

#### 习题 6.4

1. 证明矩形公式和梯形公式之间满足下面的关系:

$$R_n = 2T_{2n} - T_n.$$

2. 证明矩形公式, 梯形公式和 Simpson 公式之间满足下面的关系:

$$S_n = \frac{2}{3}R_n + \frac{1}{3}T_n.$$

3. 是否存在常数  $C$ , 使得对于满足条件  $|f'''(x)| \leq M$  的任意函数  $f$  有如下估计:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{f(a) + f(b)}{2} (b-a) \right| \leq CM(b-a)^4.$$

4. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上二阶连续可微, 则存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\xi).$$



5. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续可微, 且  $|f'(x)| \leq M, \forall x \in [a, b]$ . 证明

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{f(a) + f(b)}{2}(b-a) \right| \leq \frac{1}{4} M(b-a)^2.$$

6. 分别设  $f$  的一次导数和二次导数有界, 试估计 Simpson 公式的误差.

7. 证明 Newton-Cotes 公式中的系数满足下面的等式:

$$C(m, i) = C(m, m-i), \quad 0 \leq i \leq m; \quad \sum_{i=0}^m C(m, i) = 1.$$

8. 计算由三次插值多项式给出的 Newton-Cotes 积分近似公式.

9. 将区间  $[a, b]$  等分为  $2k$  个小区间, 分点为

$$x_i = a + \frac{i}{2k}(b-a), \quad i = 0, 1, \dots, 2k.$$

证明

$$\int_a^b \prod_{i=0}^{2k} (x - x_i) dx = 0.$$

10. 设  $f$  为  $2k+2$  阶可微函数,  $p_{2k}$  是  $f$  的插值多项式, 证明存在  $\xi$  使得

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b p_{2k}(x) dx = \frac{1}{(2k+2)!} \int_a^b f^{(2k+2)}(\xi) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) \prod_{i=0}^{2k} (x - x_i) dx.$$

11. 分别用矩形公式, 梯形公式和 Simpson 公式计算积分  $\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$  的近似值, 要求精确到小数点后第二位.

12. 设  $f$  在  $[a, b]$  上 4 阶连续可微, 用分部积分证明下面的公式:

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x) dx - \frac{f(a) + f(b)}{2}(b-a) \\ &= \frac{1}{24} \int_a^b f^{(4)}(x)(x-a)^2(x-b)^2 dx - \frac{1}{12}(b-a)^2[f'(b) - f'(a)]. \end{aligned}$$

## 第七章 积分的应用和推广

我们在这一章里先考虑定积分在几何上的一些应用, 例如计算简单图形的面积或体积, 求曲线的弧长等等. 需要指出的是, 关于这些应用的更严格的理论探讨应参见第十三章和第十四章. 我们利用积分的梯形面积公式及其误差估计还重新给出了计算阶乘的 Stirling 公式. 最后几节则将积分推广到一般的区间以及可能是无界的函数上, 并给出了若干积分计算的例子.

### §7.1 定积分的应用

#### §7.1.1 曲线的长度

设  $I = [\alpha, \beta]$  为区间, 映射  $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  用分量表示为

$$\sigma(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in I.$$

如果  $x(t), y(t)$  均为连续函数, 则称  $\sigma$  为  $\mathbb{R}^2$  上的连续曲线. 如果  $x(t), y(t)$  均可微 (连续可微), 则称  $\sigma$  为可微 (连续可微) 曲线.

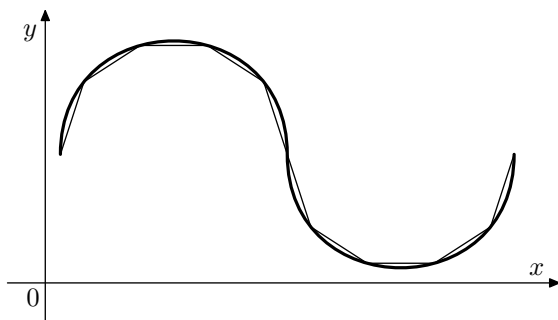


图 7.1 曲线的长度

设  $\sigma$  为连续可微曲线, 通过分割曲线并用直线段长度之和作逼近, 我们可以定义  $\sigma$  的长度为

$$L(\sigma) = \int_{\alpha}^{\beta} [(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{\frac{1}{2}} dt.$$

这个公式可以如下推导. 首先注意到下面的简单不等式:

$$|\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2}| \leq |b - c|, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$$

我们将  $[\alpha, \beta]$  分割为  $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$ , 点  $(x(t_i), y(t_i))$  把曲线分成若干段, 每一段的长度可以近似地用直线段的长度表示, 即

$$L(\sigma) \approx \sum_{i=1}^n \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2},$$

由微分中值定理, 存在  $\xi_i, \eta_i \in (t_{i-1}, t_i)$ , 使得

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\xi_i)(t_i - t_{i-1}), \quad y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\eta_i)(t_i - t_{i-1}),$$

从而有

$$\sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} = \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\eta_i))^2} \Delta t_i.$$

因为

$$|\sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\eta_i))^2} \Delta t_i - \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\xi_i))^2} \Delta t_i| \leq |y'(\eta_i) - y'(\xi_i)| \Delta t_i,$$

而

$$\sum_{i=1}^n |y'(\eta_i) - y'(\xi_i)| \Delta t_i \leq \sum_{i=1}^n \omega_i(y') \Delta t_i \rightarrow 0, \quad (\|\pi\| = \max\{|t_i - t_{i-1}|\} \rightarrow 0)$$

因此有

$$\begin{aligned} L(\sigma) &= \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} \\ &= \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\xi_i))^2} \Delta t_i \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} [(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{\frac{1}{2}} dt. \end{aligned}$$

注. 如果  $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0$ , 令

$$s = \phi(t) = \int_{\alpha}^t [(x'(u))^2 + (y'(u))^2]^{\frac{1}{2}} du, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

则  $\phi: [\alpha, \beta] \rightarrow [0, L(\sigma)]$  是严格单调递增函数, 从而可逆, 其逆记为  $t = \psi(s)$ ,  $s$  称为  $\sigma$  的弧长参数. 记  $\tilde{\sigma}(s) = \sigma(\psi(s))$ ,  $s \in [0, L(\sigma)]$ . 根据反函数的求导公式易见

$$\|\tilde{\sigma}'(s)\| = \sqrt{(\tilde{x}'(s))^2 + (\tilde{y}'(s))^2} = 1.$$

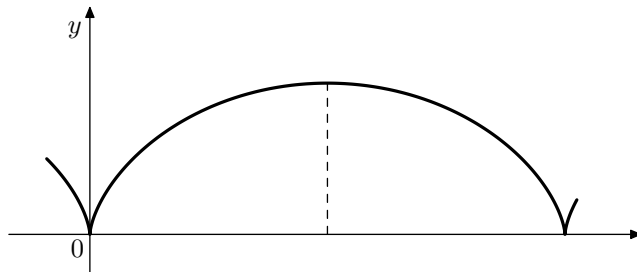


图 7.2 摆线

## 例 7.1.1. 求摆线

$$(x(t), y(t)) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t)), \quad a > 0$$

一拱的长度.

解. 我们求  $t \in [0, 2\pi]$  时曲线的长度

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} [(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_0^{2\pi} a[(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t]^{\frac{1}{2}} dt \\ &= 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 8a. \end{aligned}$$

注. 曲线也可以由别的参数给出 (如极坐标), 这时弧长公式要考虑变量替换.

## §7.1.2 简单图形的面积

(1) 如果  $f > 0$  为  $[a, b]$  上的连续函数, 则由  $y = f(x)$ ,  $x = a$ ,  $x = b$  ( $a < b$ ) 与  $y = 0$  围成的曲边梯形的面积为

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

一般地, 当  $f$  变号时, 上式仍有意义, 称为代数面积和, 而

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

才是所围面积之和. 更一般地, 由  $y = f_2(x)$ ,  $y = f_1(x)$  以及  $x = a$ ,  $x = b$  围成的图形的面积为

$$S = \int_a^b |f_2(x) - f_1(x)| dx.$$

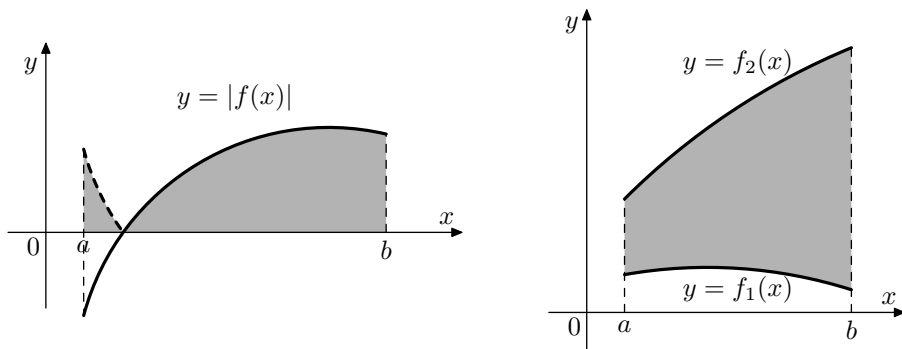


图 7.3 函数图像围成的图形

(2) 设  $\sigma$  为平面曲线, 由极坐标方程

$$r = r(\theta), \quad \theta \in [\alpha, \beta]$$

给出, 其中  $r(\theta)$  关于  $\theta$  连续,  $\beta - \alpha \leq 2\pi$ . 则由  $\sigma$ ,  $\theta = \alpha$ ,  $\theta = \beta$  所围成的图形面积为

$$S = \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} r^2(\xi_i) \cdot \Delta\theta_i = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta.$$

这个公式是通过使用扇形的面积和逼近图形面积得到的.

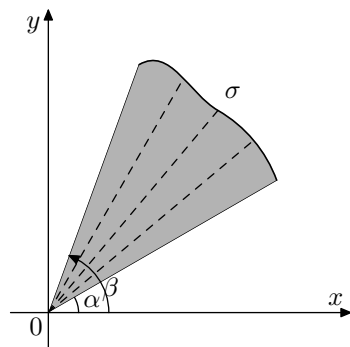


图 7.4 极坐标表示的曲线

(3) 如果曲线  $\sigma$  由  $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$  给出, 其中  $y(t) \geq 0$ ,  $x$  关于  $t$  单调递增,  $x([\alpha, \beta]) = [a, b]$ . 则  $\sigma$  与  $x = a$ ,  $x = b$  以及  $y = 0$  围成的曲边梯形的面积为

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt.$$

这个公式仍然是通过使用矩形面积之和去逼近曲边梯形得到. 一般地, 如果只设  $x$  是单调的, 则面积公式为

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} |y(t)x'(t)|dt.$$

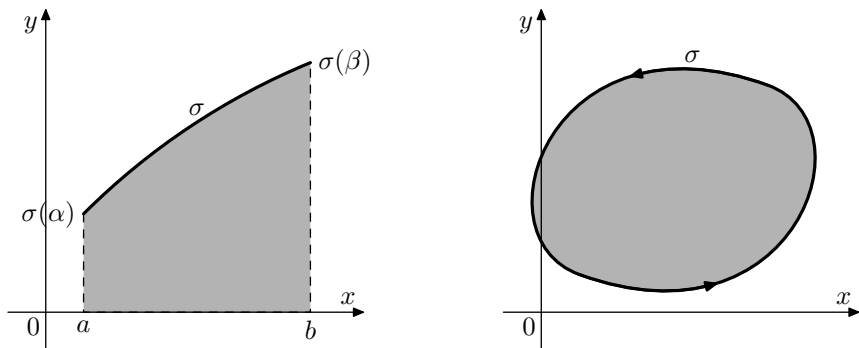


图 7.5 曲线围成的图形

如果  $\sigma$  除在  $t = \alpha, \beta$  处以外无自交点, 则  $\sigma$  本身围成的图形的面积为

$$S = \left| \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt \right| = \left| \int_{\alpha}^{\beta} x(t)y'(t)dt \right|,$$

因为

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt &= y(t)x(t) \Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} y'(t)x(t)dt \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} y'(t)x(t)dt, \end{aligned}$$

故这个面积公式也可以改写为

$$S = \frac{1}{2} \left| \int_{\alpha}^{\beta} [y(t)x'(t) - y'(t)x(t)] dt \right|.$$

**例 7.1.2.** 求椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  所围成的面积.

**解.** 由图形的对称性, 有

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_0^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx \\ &= 4b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} a \cos t dt \\ &= 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \pi ab. \end{aligned}$$

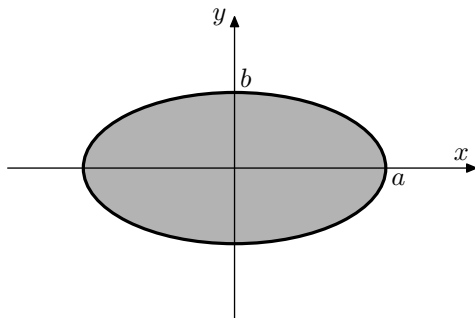


图 7.6 椭圆

**例 7.1.3.** 求双纽线  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$  所围成的面积.

**解.** 用极坐标  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  代入方程, 得

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta, \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right].$$

由图形的对称性, 有

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2(\theta) d\theta = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta = a^2.$$

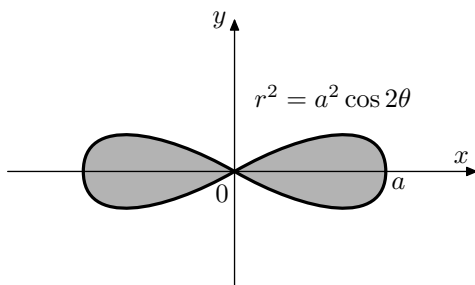


图 7.7 双纽线

#### (4) 旋转曲面的面积

设  $\sigma$  为平面曲线

$$\sigma(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in [\alpha, \beta], \quad y(t) \geq 0.$$

$\sigma$  绕  $x$  轴旋转所得曲面的面积为

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi y(t) [(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{\frac{1}{2}} dt.$$

这个公式可以这样来推导: 取  $[\alpha, \beta]$  的一个分割, 在分点  $t_{i-1}, t_i$  之间的曲线段经过

旋转后所形成的曲面的面积可以用圆台的面积近似逼近, 这一部分圆台的面积为

$$\pi(y(t_{i-1}) + y(t_i)) \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2},$$

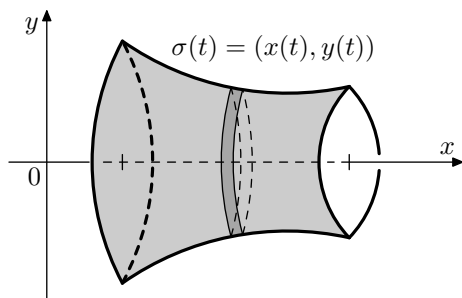


图 7.8 旋转曲面

因此

$$S \approx \sum_{i=1}^n \pi(y(t_{i-1}) + y(t_i)) \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2},$$

和曲线弧长公式的推导过程类似, 当分割的模趋于零时, 我们近似地有

$$(y(t_{i-1}) + y(t_i)) \approx 2y(\xi_i), \quad (\xi_i \in [t_{i-1}, t_i])$$

以及

$$\sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} \approx \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\xi_i))^2} \Delta t_i,$$

当分割的模趋于零时, 近似逼近所引起的这些误差之和趋于零. 因此有

$$\begin{aligned} S &= \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\pi y(\xi_i) [(x'(\xi_i))^2 + (y'(\xi_i))^2]^{\frac{1}{2}} \Delta t_i \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi y(t) [(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{\frac{1}{2}} dt. \end{aligned}$$

**例 7.1.4.** 求将  $x^2 + (y-b)^2 = a^2$  ( $0 < a \leq b$ ) 绕  $x$  轴旋转所得曲面的面积.

**解.** 曲线的参数方程为

$$x(t) = a \cos t, \quad y(t) = b + a \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

故旋转曲面面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} 2\pi(b + a \sin t) [a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t]^{\frac{1}{2}} dt \\ &= 2\pi a \int_0^{2\pi} (b + a \sin t) dt = 4\pi^2 ab. \end{aligned}$$

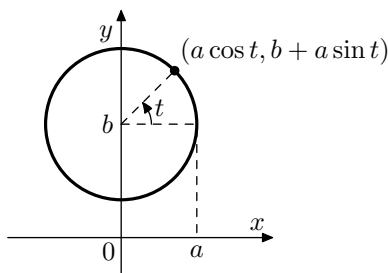


图 7.9 环面 (轮胎面)

### §7.1.3 简单立体的体积

#### (1) 平行截面之间的立体体积

设  $\Omega$  为  $\mathbb{R}^3$  中一块立体区域, 夹在平面  $x = a$  与  $x = b$  ( $a < b$ ) 之间. 记  $S(x)$  为  $x \in [a, b]$  处垂直于  $x$  轴的平面截  $\Omega$  的截面面积函数. 如果  $S(x)$  关于  $x$  连续, 则  $\Omega$  的体积为

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

特别地, 如果两块区域  $\Omega_A$  和  $\Omega_B$  的截面面积函数相等, 则其体积相同. 这个事实在公元 5 到 6 世纪由祖暅 (祖冲之之子) 所发现, 17 世纪时意大利人 Cavalieri 也发现了这一事实.

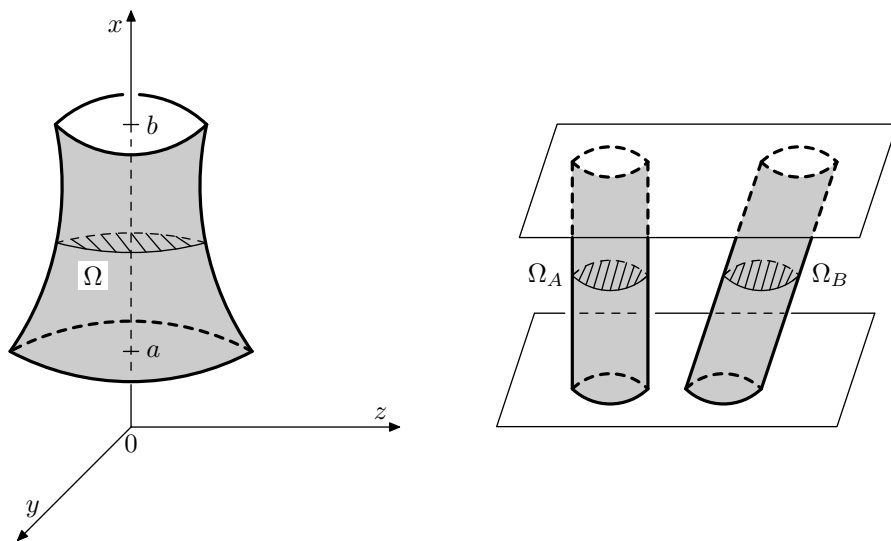


图 7.10 简单立体图形

**例 7.1.5.** 求椭球体  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$  的体积.

**解.** 固定  $x \in (-a, a)$ , 它的截面为椭圆面  $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq (1 - \frac{x^2}{a^2})$ , 截面面积为

$S(x) = \pi b(1 - \frac{x^2}{a^2})^{\frac{1}{2}} c(1 - \frac{x^2}{a^2})^{\frac{1}{2}} = \pi bc(1 - \frac{x^2}{a^2})$ , 故椭球的体积为

$$V = \int_{-a}^a S(x) dx = \int_{-a}^a \pi bc(1 - \frac{x^2}{a^2}) dx = \frac{4}{3} \pi abc.$$

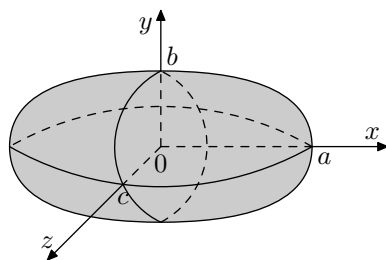


图 7.11 椭球

## (2) 旋转体的体积

设  $f$  为  $[a, b]$  上的连续函数,  $\Omega$  是由平面图形

$$\{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq |y| \leq |f(x)|\}$$

绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体. 该旋转体在  $x \in [a, b]$  处的截面为圆盘, 其面积为

$$S(x) = \pi f^2(x).$$

因此  $\Omega$  的体积为

$$V = \int_a^b S(x) dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

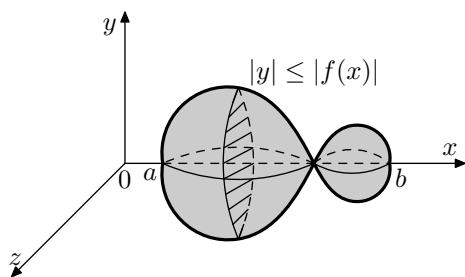


图 7.12 旋转体



**例 7.1.6.** 求高为  $h$ , 底半径为  $r$  的圆锥体的体积.

**解.** 由上面的体积公式, 有

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

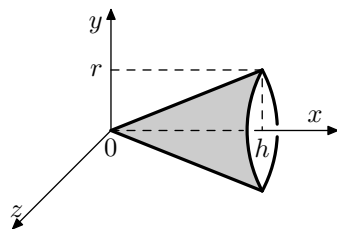


图 7.13 圆锥体

#### §7.1.4 物理应用举例

##### (1) 降落伞的原理

质量为  $m$  的物体在重力作用下自由下落, 下落时所受空气阻力与下落速度成正比, 比例常数为  $k$ , 则由牛顿定律,

$$mg - kv = m \frac{dv}{dt},$$

其中,  $g$  为重力加速度,  $v$  为物体的速度, 我们选择指向地心的坐标. 上面的方程等价于

$$\frac{d}{dt}(e^{\frac{k}{m}t}v) = ge^{\frac{k}{m}t},$$

假设初速度为零, 则

$$e^{\frac{k}{m}t}v = g \int_0^t e^{\frac{k}{m}s} ds = \frac{mg}{k}(e^{\frac{k}{m}t} - 1),$$

即

$$v(t) = \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t}).$$

特别地,  $t \rightarrow \infty$  时  $v(t) \rightarrow \frac{mg}{k}$ , 即速度不会增加到无限大.

##### (2) 第二宇宙速度

从地球表面发射火箭, 如果要求火箭无限飞离地球, 问: 火箭的初速度至少为多大? 这里主要考虑火箭摆脱地球引力的问题, 因此我们忽略太阳的引力. 根据万有引力定律, 在距地心  $x$  处火箭所受地球引力为

$$F = GMmx^{-2},$$

其中,  $G$  为万有引力常数,  $M$  为地球质量,  $m$  为火箭质量. 在地球表面, 有

$$GMmR^{-2} = mg,$$

其中  $R$  为地球半径. 火箭从地面升到距地心  $r$  ( $r > R$ ) 处需要做的功为

$$\int_R^r GMmx^{-2} dx = \int_R^r mgR^2 x^{-2} dx = mgR^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right).$$

因此, 火箭无限飞离地球需要做功

$$W = \lim_{r \rightarrow \infty} mgR^2 \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) = mgR.$$

由能量守恒原理, 火箭的初速度至少为  $v_0$ , 则

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgR,$$

因而

$$v_0 = \sqrt{2gR} \approx \sqrt{2 \times 9.81(m/s^2) \times 6.371 \times 10^6 m} \approx 11.2 (km/s).$$

### (3) 缆绳的工作原理

绳索在日常生活中应用十分广泛, 例如在码头上经常用来系住船舶. 为什么绳索能拉住大型船舶? 下面我们就来作一个力学分析, 它揭示了绳索产生巨大拉力的原理.

设一段绳索缠绕在一圆柱体上, 绳索一端施以拉力  $f$ , 绳索与圆柱体之间的摩擦系数为  $k$ , 如果绳索共绕了  $n$  圈, 在绳索的另一端产生的拉力为  $F$ , 我们来求  $F$  的值.

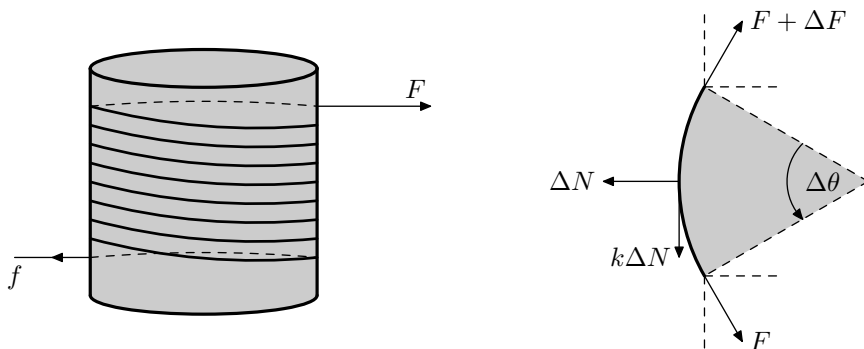


图 7.14 缆绳受力分析

取角度为  $\Delta\theta$  的一小段绳索, 研究其受力状况. 设这一段绳索承受圆柱体的正压力为  $\Delta N$ , 则摩擦力为  $k\Delta N$ . 这一段绳索两端所受拉力分别为  $F, F + \Delta F$ , 则考虑沿圆柱体外法向和切向这两个方向绳索的受力, 得到方程

$$\begin{cases} \Delta N = (F + \Delta F) \sin \frac{\Delta\theta}{2} + F \sin \frac{\Delta\theta}{2}, \\ (F + \Delta F) \cos \frac{\Delta\theta}{2} = F \cos \frac{\Delta\theta}{2} + k\Delta N. \end{cases}$$

从方程中消去  $\Delta N$ , 令  $\Delta\theta \rightarrow 0$ , 得

$$\frac{dF}{d\theta} = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta\theta} = kF,$$

利用积分解得

$$F(\theta) = f \cdot e^{k\theta}.$$

当  $\theta = 2n\pi$  时,  $F = f \cdot e^{2kn\pi}$ . 例如, 设摩擦系数  $k = \frac{1}{4}$ ,  $n = 6$ ,  $f = 10kg$ , 则  $F = 10e^{3\pi}kg > 100000kg$ .

### §7.1.5 进一步应用的例子

(1) 近似计算与 Stirling 公式

设  $f$  为  $[a, b]$  上的二次连续可微函数, 则由第五章第四节 (5.3) 式可得

$$|f(x) - l(x)| \leq \frac{1}{2}M(x-a)(b-x), \quad \forall x \in [a, b],$$

其中,  $M = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$ , 且

$$l(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a), \quad x \in [a, b].$$

因此有如下的积分估计

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b l(x)dx \right| \leq \frac{1}{2}M \int_a^b (x-a)(b-x)dx = \frac{1}{12}M(b-a)^3.$$

这也就是  $f$  在  $[a, b]$  上的积分用梯形面积逼近的误差公式.

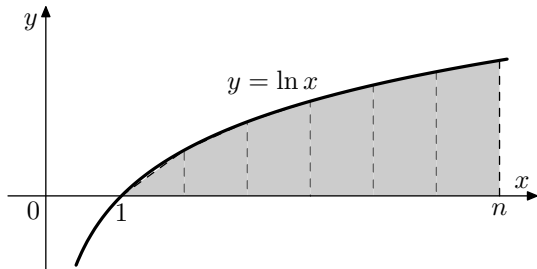


图 7.15 梯形面积逼近

我们考虑函数  $f = \ln x$  在  $[1, n]$  上的积分. 令

$$\begin{aligned} A_n &= \int_1^n \ln x dx = x \ln x \Big|_1^n - \int_1^n (\ln x)' x dx = n \ln n - n + 1, \\ B_n &= \frac{1}{2}(\ln 1 + \ln 2) + \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln 3) + \cdots + \frac{1}{2}(\ln(n-1) + \ln n) \\ &= \ln n! - \frac{1}{2} \ln n, \end{aligned}$$

根据上面的误差估计, 并注意  $\ln x$  为凹函数, 则有

$$0 < \int_k^{k+1} \ln x dx - \frac{1}{2}(\ln k + \ln(k+1)) < \frac{1}{12} \frac{1}{k^2}.$$

令  $C_n = A_n - B_n$ , 则  $C_n$  是  $n-1$  次累计误差, 它关于  $n$  是单调递增的. 从而

$$0 < C_n < \frac{1}{12} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} < \frac{1}{12} \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \right) = \frac{1}{6},$$

这说明极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = C$  存在, 且

$$\begin{aligned} 0 < C - C_n &< \frac{1}{12} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \\ &< \frac{1}{12} \left[ \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots \right] = \frac{1}{12} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

下面我们来求极限  $C$  的值. 由定义, 有

$$C_n = A_n - B_n = n \ln n - n + 1 - \ln n! + \frac{1}{2} \ln n,$$

因此

$$n! = e^{1-C_n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}.$$

由第六章第三节 Wallis 公式,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\pi},$$

将  $n!$  和  $(2n)!$  的表达式代入, 有

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{2(1-C_n)} n^{2n+1} e^{-2n}}{e^{1-C_{2n}} (2n)^{(2n+\frac{1}{2})} e^{-2n}} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}} = \frac{e^{1-C}}{\sqrt{2}},$$

这就得到  $n!$  的如下表示

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left( \frac{n}{e} \right)^n e^{C-C_n}, \quad (\text{Stirling 公式})$$

其中

$$1 < e^{C-C_n} < e^{\frac{1}{12}(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n})} < 1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{10n^2}, \quad \forall n > 1.$$

(2)  $\pi$  为什么为无理数.

历史上, 最早被发现的无理数之一是  $\sqrt{2}$ , 这是毕达哥拉斯学派发现的, 这个发现在当时引起了很大的恐慌. 1761 年, Lambert 证明了  $\pi$  为无理数. 1947 年, Niven 给出了  $\pi$  为无理数的一个简单证明, 下面的证明基本上就是 Niven 提出的.

证明用的是反证法. 假设  $\pi$  为有理数,  $\pi = \frac{a}{b}$ ,  $a, b$  为互素正整数. 令

$$f(x) = \frac{1}{n!} x^n (a - bx)^n, \quad x \in [0, \pi],$$

其中  $n$  为待定正整数. 我们有

- (1)  $f(x) = f(\pi - x)$ ,  $x \in [0, \pi]$ ;
- (2)  $f^{(k)}(0)$  为整数,  $k = 1, 2, \dots, 2n$ ;
- (3)  $f^{(k)}(\pi)$  为整数,  $k = 1, 2, \dots, 2n$ .

其中, (1) 是显然的. (2) 成立是因为, 当  $0 \leq k < n$  时  $f^{(k)}(0) = 0$ ; 当  $n \leq k \leq 2n$  时,

$$f^{(k)}(0) = \frac{1}{n!} C_n^{k-n} a^{2n-k} (-b)^{k-n} \cdot k!,$$

这是整数. (3) 可由 (1) 和 (2) 直接得到.

如果令

$$F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \dots + (-1)^n f^{(2n)}(x),$$

则显然有

$$F''(x) + F(x) = f(x),$$

因此

$$\int_0^\pi f(x) \sin x \, dx = [F'(x) \sin x - F(x) \cos x] \Big|_0^\pi = F(\pi) + F(0) \in \mathbb{Z}.$$

另一方面, 在  $(0, \pi)$  上  $0 < f(x) \leq \frac{1}{n!}(\pi a)^n$ , 因此

$$\begin{aligned} 1 &\leq \int_0^\pi f(x) \sin x \, dx \leq \int_0^\pi f(x) \, dx \\ &\leq \frac{(\pi a)^n}{n!} \pi \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

这就导出了矛盾. □

### 习题 7.1

1. 计算下列曲线的弧长:

- (1)  $y = x^{\frac{3}{2}}$ ,  $(0 \leq x \leq 4)$ ;
- (2)  $x = e^t \cos t$ ,  $y = e^t \sin t$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ;
- (3)  $x = a \cos^4 t$ ,  $y = a \sin^4 t$ ,  $a > 0$ ,  $t \in [0, \pi]$ ;
- (4)  $y^2 = 2ax$ ,  $a > 0$ ,  $0 \leq x \leq a$ .

2. 求下列曲线所围成图形的面积:

- (1)  $y^2 = ax$ ,  $y = \frac{1}{a}x^2$ ,  $a > 0$ ;
- (2)  $y = x^2 - 2x$ ,  $y = -x^2$ ;

- (3)  $y = x(x-1)(x-2)$ ,  $y = 0$ ;  
 (4)  $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$ ,  $a > 0$ ;  
 (5)  $r = a(1 - \cos \theta)$ ,  $a > 0$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ ;  
 (6)  $r = a \sin 3\theta$ ,  $a > 0$ .

3. 求下列曲线旋转所成曲面的面积:

- (1)  $y = \tan x$  绕  $x$  轴,  $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ ;  
 (2)  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$  绕直线  $y = a$ ,  $a > 0$ ,  $t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ ;  
 (3)  $x^2 + y^2 = a^2$  绕  $x$  轴,  $a > 0$ ;  
 (4)  $r^2 = a^2 \cos 2\theta$  绕直线  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

4. 求下列曲面所围成的体积:

- (1)  $x + y + z^2 = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ;  
 (2)\*  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $y^2 + z^2 = a^2$ ,  $a > 0$ ;  
 (3)  $z^2 = b(a - x)$ ,  $x^2 + y^2 = ax$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ ;  
 (4)\*  $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = a^2$ ,  $a > 0$ .

5. 求下列旋转体的体积:

- (1)  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  绕  $x$  轴旋转所成旋转体;  
 (2)  $(x-a)^2 + y^2 = b^2$  ( $a > b > 0$ ) 的内部绕  $y$  轴旋转所成旋转体;  
 (3)  $y^2 = 2ax$  ( $a > 0$ ) 绕  $x = b$  ( $b > 0$ ) 旋转所围成的旋转体;  
 (4)  $y = \sin x$ ,  $x \in [0, \pi]$  绕  $x$  轴旋转所围成的旋转体.

6. 记  $c_n = (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}) - \ln n$  ( $n \geq 1$ ). 在 Stirling 公式的证明中, 将函数  $f(x) = \ln x$  换成  $f(x) = x^{-1}$ , 由此证明

- (1) 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$  存在;  
 (2) 记  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(c_n - c) = \frac{1}{2}$ .

7. 设  $\sigma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  为连续可微的曲线, 证明

$$L(\sigma) \geq |\sigma(1) - \sigma(0)|,$$

其中  $L(\sigma)$  是  $\sigma$  的长度,  $|p - q|$  表示平面上两点  $p$  和  $q$  的直线距离.

## §7.2 广义积分

在前一章, 我们研究了有界函数在闭区间上的 Riemann 积分. 一个自然的问题就是, 对于一般的区间以及对于无界的函数, 如何定义积分? 在前一节计算第二宇宙速度时, 我们曾经用到取极限的办法, 得到了区间  $[R, +\infty)$  上的积分. 现在来看另一个例子, 这个例子中涉及的函数不是有界的. 事实上, 考虑  $(0, 1]$  区间上的函数  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ , 这是一个连续函数, 其图像  $y = f(x)$  和直线  $x = 0$ ,  $x = 1$  以及  $y = 0$  围成的区域虽然无界, 但其面积却是有界的. 下面我们就把这些例子推广到一般的情形.

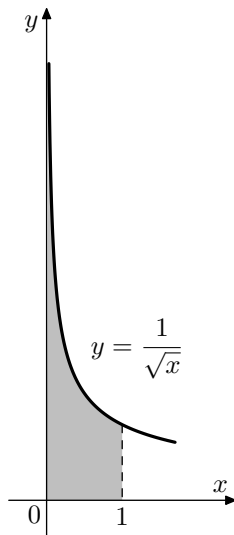


图 7.16 无界函数的积分

**定义 7.2.1** (无穷积分). 设  $a \in \mathbb{R}$ , 定义在  $[a, +\infty)$  中的函数  $f$  如果在任何有限区间  $[a, A]$  上都是 Riemann 可积的, 且极限

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$$

存在 (且有限), 则称无穷积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  存在或收敛, 记为

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx,$$

否则就称无穷积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  不存在或发散.

类似地, 我们也可以定义无穷积分  $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ , 以及  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ . 并且无穷积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  收敛当且仅当  $\int_{-\infty}^a f(x) dx$  和  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  均收敛, 此时

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

需要注意的是, 利用极限

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(x) dx$$

也可以定义  $f$  在  $(-\infty, +\infty)$  上的一种积分, 它和前一种定义不是等价的, 称为 Cauchy 主值积分, 记为

$$(V.P.) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(x) dx.$$

从无穷积分的定义立即得到如下的基本判别法:

(无穷积分的 **Cauchy 准则**)  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上的积分收敛  $\iff$  任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $M = M(\varepsilon)$ , 使得当  $B > A > M$  时,

$$\left| \int_A^B f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

对于  $(-\infty, a]$  和  $(-\infty, +\infty)$  上的无穷积分有完全类似的判别法.

**例 7.2.1.** 讨论无穷积分  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$  ( $p \in \mathbb{R}$ ) 的敛散性.

**解.** 当  $A > 1$  时,

$$\int_1^A \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \ln A, & p = 1, \\ \frac{1}{1-p}(A^{1-p} - 1), & p \neq 1. \end{cases}$$

因此只有  $p > 1$  时积分才是收敛的, 此时

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-p}(A^{1-p} - 1) = \frac{1}{p-1}.$$

一般地, 如果连续函数  $f$  在  $[a, +\infty)$  上存在原函数  $F$ , 则由微积分基本公式,

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} F(A) - F(a),$$

即积分是否收敛与极限  $\lim_{A \rightarrow +\infty} F(A)$  是否存在是一致的.

**例 7.2.2.** 计算无穷积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ .

**解.**  $\frac{1}{1+x^2}$  的原函数为  $\arctan x$ , 因此

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx + \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \arctan x \Big|_0^{+\infty} + \arctan x \Big|_{-\infty}^0 \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi. \end{aligned}$$

和无穷积分类似, 我们也可以通过极限来处理无界函数的积分.

**定义 7.2.2** (瑕积分). 设函数  $f$  在任何区间  $[a', b]$  ( $a < a' < b$ ) 上均 *Riemann* 可积, 如果极限

$$\lim_{a' \rightarrow a^+} \int_{a'}^b f(x) dx$$



存在 (且有限), 则称瑕积分  $\int_a^b f(x) dx$  存在或收敛, 记为

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{a' \rightarrow a^+} \int_{a'}^b f(x) dx,$$

否则就称瑕积分  $\int_a^b f(x) dx$  不存在或发散.

不难看出, 如果  $f$  在  $[a, b]$  上 Riemann 可积, 则  $f$  的瑕积分等于其 Riemann 积分. 如果  $f$  在  $a$  附近无界, 从而在  $[a, b]$  上不是 Riemann 可积的, 则称  $a$  为  $f$  的瑕点. 类似地, 可以在  $[a, b)$  上定义瑕积分, 当瑕点不只一个时也可类似地定义瑕积分, 瑕积分的收敛性仍有和广义积分类似的 Cauchy 准则判别法.

如果一个函数既是无界的, 定义域又是无界区间, 则把上面两种积分, 即无穷积分和瑕积分的处理方法结合起来往往可以对于这种函数的积分加以处理, 得到的积分统称广义积分, 在别的书上也称反常积分.

**例 7.2.3.** 讨论积分  $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$  ( $p \in \mathbb{R}$ ) 的敛散性.

**解.** 当  $0 < a < 1$  时,

$$\int_a^1 \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} -\ln a, & p = 1, \\ \frac{1}{1-p}(1 - a^{1-p}), & p \neq 1. \end{cases}$$

因此只有  $p < 1$  时积分才是收敛的, 此时

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{1-p}(1 - a^{1-p}) = \frac{1}{1-p}.$$

**例 7.2.4.** 计算积分  $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ .

**解.** 被积函数有两个瑕点  $\pm 1$ . 我们有

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \arcsin x \Big|_{-1}^0 + \arcsin x \Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi. \end{aligned}$$

广义积分具有和 Riemann 积分类似的性质, 一些运算法则, 例如分部积分, 变量代换等也可以直接推广过来.

**命题 7.2.1.** 假设积分限  $a, b, c$  等可以取  $-\infty$  或  $+\infty$ , 则

(1) 如果  $f$  在  $[a, b]$ ,  $[b, c]$  上积分存在, 则  $f$  在  $[a, c]$  上的积分也存在, 且

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx;$$

(2) 如果  $f, g$  在  $[a, b]$  上积分存在, 则  $\lambda f + \mu g$  ( $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ) 在  $[a, b]$  上的积分也存在, 且

$$\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$$

**例 7.2.5.** 计算积分  $\int_0^1 \ln x dx$ .

**解.** 利用  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$  得

$$\int_0^1 \ln x dx = x \ln x \Big|_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{1}{x} dx = -1.$$

**例 7.2.6.** 讨论积分  $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$  的敛散性.

**解.** 只要讨论被积函数在  $[1, +\infty)$  上的积分就可以了. 作变量代换  $x = \sqrt{t}$ , 得

$$\int_1^{+\infty} \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt.$$

我们利用分部积分和 Cauchy 准则来判断积分的收敛性:

$$\begin{aligned} \left| \int_A^B \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt \right| &= \left| \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \Big|_A^B + \frac{1}{2} \int_A^B \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{A}} + \frac{1}{\sqrt{B}} + \frac{1}{2} \int_A^B t^{-\frac{3}{2}} dt = \frac{2}{\sqrt{A}} \rightarrow 0 \quad (B > A \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

这说明积分是收敛的.

这个例子也告诉我们,  $f$  在  $[a, +\infty)$  上的积分存在并不意味着  $f(x) \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow +\infty$ ).

## 习题 7.2

1. 设  $f$  为  $[a, b]$  上的有界函数. 如果对于任意的  $a' \in (a, b)$ ,  $f$  均在  $[a', b]$  上 Riemann 可积, 则  $f$  在  $[a, b]$  上可积, 且

$$\lim_{a' \rightarrow a^+} \int_{a'}^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

2. 计算下列无穷积分:

$$\begin{aligned} (1) & \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}; & (2) & \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx; & (3) & \int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x \ln^2(\ln x)}; \\ (4) & \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx; & (5) & \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx; & (6) & \int_0^{+\infty} x^5 e^{-x^2} dx; \\ (7) & \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x)}; & (8) & \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)(x+3)}; & (9) & \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}. \end{aligned}$$

3. 计算下列瑕积分:

$$\begin{aligned} (1) & \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx; & (2) & \int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}; & (3) & \int_{-1}^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx; \\ (4) & \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}; & (5) & \int_\alpha^\beta \frac{x dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}; & (6) & \int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx. \end{aligned}$$

4. 讨论下列广义积分的敛散性:

$$(1) \int_0^{+\infty} |\cos x^2| dx; \quad (2) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x \sqrt{x}}.$$

5. 讨论下列瑕积分的敛散性:

$$(1) \int_0^1 \frac{dx}{\ln x}; \quad (2) \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx; \quad (3) \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}.$$

6. 设  $f(x)$  为  $[a, +\infty)$  中的非负连续函数, 如果  $\int_a^{+\infty} f(x) dx = 0$ , 证明  $f(x) \equiv 0$ .

7. 设  $f(x) > 0$ , 如果  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上广义可积, 则  $\int_a^{+\infty} f(x) dx > 0$ .

8. 设  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上广义可积, 如果  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  中一致连续, 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

(提示: 先用 Cauchy 准则和中值定理找收敛子列.)

9. 设  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上广义可积, 如果  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  中可导, 且导函数  $f'(x)$  有界, 则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . (提示: 用上一题.)

10. 设  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  中连续可导, 如果  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  和  $\int_a^{+\infty} f'(x) dx$  均收敛, 则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

11. (\*) 举例说明, 当无穷积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 且  $f(x)$  为正连续函数时, 无穷积分  $\int_a^{+\infty} f^2(x) dx$  不一定收敛.

12. (\*) 举例说明, 当无穷积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 且  $f(x)$  为正连续函数时, 不一定有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

### §7.3 广义积分的收敛判别法

在前一节我们知道可以用 Cauchy 准则来判断广义积分的敛散性. 下面我们进一步介绍其它的判别法, 假定函数在有限区间上可积. 首先研究非负函数, 注意到如果  $f$  非负, 则积分  $\int_a^A f(x) dx$  关于  $A$  单调递增, 因此其极限存在当且仅当它有上界, 这就得到了非负函数广义积分的如下基本判别法:

**定理 7.3.1.** 设  $f \geq 0$ , 则无穷积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛当且仅当

$$F(A) = \int_a^A f(x) dx$$

是  $A \in [a, +\infty)$  的有界函数; 对瑕积分有完全类似的结果.

由此又得到如下的比较判别法:

**定理 7.3.2.** 设  $0 \leq f \leq Mg$ ,  $M > 0$  为常数, 则当无穷积分  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  收敛时, 无穷积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  也收敛; 当无穷积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  发散时, 无穷积分  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  也发散; 瑕积分有完全类似的结果.

**证明.** 令

$$F(A) = \int_a^A f(x) dx, \quad G(A) = \int_a^A g(x) dx,$$

则  $0 \leq F(A) \leq M \cdot G(A)$ ,  $A \in [a, +\infty)$ . 因此, 如果  $G(A)$  有界, 则  $F(A)$  也有界;  $F(A)$  无界时,  $G(A)$  也无界.  $\square$

**注.** (1) 常数  $M$  的存在性通常利用极限去找. 即如果极限  $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  存在, 则当  $0 < l < \infty$  时, 积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  和  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  同时收敛或发散; 当  $l = 0$  时, 如果  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  收敛, 则  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  也收敛; 当  $l = +\infty$  时, 如果  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  发散, 则  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  也发散.

(2) 我们可以拿函数  $f$  与  $x^{-p}$  比较, 则得到如下的 Cauchy 判别法:

(i) 如果  $p > 1$ , 且存在常数  $C > 0$ , 使得

$$0 \leq f(x) \leq \frac{C}{x^p} \quad (\forall x \geq x_0),$$

则  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛;

(ii) 如果  $p \leq 1$ , 且存在常数  $C > 0$ , 使得

$$f(x) \geq \frac{C}{x^p} \quad (\forall x \geq x_0),$$

则  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  发散;

当然, 常数  $C$  通常是求极限得到的, 即如果极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p f(x) = l$  存在, 则

(iii) 如果  $p > 1, 0 \leq l < +\infty$ , 则  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛;

(iv) 如果  $p \leq 1, 0 < l \leq +\infty$ , 则  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  发散;

(3) 对于瑕积分, 利用与函数  $x^{-p}$  的比较, 可以得到完全类似的 Cauchy 判别法.

**例 7.3.1.** 判别积分  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}} dx$  的敛散性.

**解.** 因为

$$0 \leq \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}} \leq x^{-2}, \quad \forall x \geq 1,$$

故积分是收敛的. □

**例 7.3.2.** 判别积分  $\int_1^{+\infty} x^a e^{-x} dx$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) 的敛散性.

**解.** 因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 x^a e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{2+a}}{e^x} = 0,$$

故积分是收敛的. □

**例 7.3.3.** 判别积分  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+\ln x)} dx$  的敛散性.

**解.** 被积函数有原函数  $F(x) = \ln(1 + \ln x)$ , 由 Newton-Leibniz 公式易见积分是发散的. □

这里要提醒读者注意, 比较判别法只适用于非负函数. 对于一般函数的广义积分, 有时可以化为非负函数的积分来判断是否收敛.

设  $f$  为一般函数, 记

$$f^+(x) = \max\{0, f(x)\}, \quad f^-(x) = \max\{0, -f(x)\},$$

则  $f^+$  和  $f^-$  均为非负函数, 且  $f = f^+ - f^-$ . 因此, 如果  $f^+$  和  $f^-$  的积分均收敛, 则  $f$  的积分也收敛, 此时称  $f$  的积分**绝对收敛**, 这和  $|f| = f^+ + f^-$  的积分收敛是一致的. 如果  $f$  的积分收敛, 但  $|f|$  的积分发散, 则称  $f$  的积分**条件收敛**.

**例 7.3.4.** 判别积分  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx$  ( $p > 1$ ) 的敛散性.

**解.** 因为

$$\left| \frac{\cos x}{x^p} \right| \leq x^{-p}, \quad \forall x \geq 1,$$

而  $p > 1$  时  $x^{-p}$  积分收敛, 故原积分是绝对收敛的.  $\square$

**例 7.3.5.** 判别积分  $\int_1^{+\infty} \cos x^p dx$  ( $p > 1$ ) 的敛散性.

**解.** 利用变量代换  $x = t^{\frac{1}{p}}$  以及前节最后例子中的办法 (Cauchy 准则), 不难看出积分是收敛的. 但是

$$|\cos x^p| \geq \cos^2 x^p = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x^p),$$

函数  $\cos 2x^p$  的积分是收敛的, 因此  $\cos x^p$  在  $[1, +\infty)$  上的积分是条件收敛的.  $\square$

对于两个函数乘积的广义积分, 在某些情形下利用第二积分中值公式可以给出下面的判别法.

**定理 7.3.3** (Dirichlet). 设  $F(A) = \int_a^A f(x) dx$  在  $[a, +\infty)$  中有界, 函数  $g(x)$  在  $[a, +\infty)$  中单调, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ , 则积分  $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$  收敛.

**证明.** 设  $|F(A)| \leq C, \forall A \geq a$ . 则

$$\left| \int_A^B f(x) dx \right| = \left| \int_a^B f(x) dx - \int_a^A f(x) dx \right| \leq 2C, \quad \forall A, B \geq a.$$

又因为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ , 故任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $M > 0$ , 使得当  $x > M$  时

$$|g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4C}.$$

由积分第二中值定理, 当  $A, B > M$  时

$$\begin{aligned} \left| \int_A^B f(x)g(x) dx \right| &= \left| g(A) \int_A^\xi f(x) dx + g(B) \int_\xi^B f(x) dx \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4C} \left| \int_A^\xi f(x) dx \right| + \frac{\varepsilon}{4C} \left| \int_\xi^B f(x) dx \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4C} 2C + \frac{\varepsilon}{4C} 2C = \varepsilon. \end{aligned}$$

由 Cauchy 准则知积分  $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$  收敛.  $\square$

**例 7.3.6.** 判断积分  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$  ( $0 < p < 2$ ) 的敛散性.

解. 因为

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{p-1} \frac{\sin x}{x^p} = 1,$$

故在  $(0, 1]$  上  $\frac{\sin x}{x^p}$  积分的敛散性和  $x^{1-p}$  的积分敛散性一致. 当  $p < 2$  时  $x^{1-p}$  的积分在  $(0, 1]$  上收敛. 下面只要判断  $\frac{\sin x}{x^p}$  在  $[1, +\infty)$  上的敛散性即可. 由于积分  $\int_1^A \sin x \, dx$  显然有界, 而  $\frac{1}{x^p}$  ( $p > 0$ ) 在  $[1, +\infty)$  中单调趋于零, 故由 Dirichlet 判别法知原积分是收敛的.  $\square$

注. 请读者自行证明, 当  $0 < p \leq 1$  时, 该积分是条件收敛的; 当  $1 < p < 2$  时该积分是绝对收敛的.

**定理 7.3.4** (Abel). 如果广义积分  $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$  收敛, 函数  $g(x)$  在  $[a, +\infty)$  中单调有界, 则积分  $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) \, dx$  也收敛.

证明. 因为  $g$  有界, 可设

$$|g(x)| \leq C, \quad \forall x \in [a, +\infty).$$

又因为  $f$  积分收敛, 故任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $M > 0$ , 使得当  $A, B > M$  时

$$\left| \int_A^B f(x) \, dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2C}.$$

由积分第二中值定理,

$$\begin{aligned} \left| \int_A^B f(x)g(x) \, dx \right| &= \left| g(A) \int_A^\xi f(x) \, dx + g(B) \int_\xi^B f(x) \, dx \right| \\ &\leq C \left| \int_A^\xi f(x) \, dx \right| + C \left| \int_\xi^B f(x) \, dx \right| \\ &\leq C \frac{\varepsilon}{2C} + C \frac{\varepsilon}{2C} = \varepsilon. \end{aligned}$$

由 Cauchy 准则知积分  $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) \, dx$  收敛.  $\square$

这些判别法对于瑕积分也有完全类似的表达形式, 我们不再赘述.

**例 7.3.7.** 设  $a \geq 0$ , 研究积分  $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{x} \, dx$  的敛散性.

解. 函数  $e^{-ax}$  在  $[0, +\infty)$  中单调递减且有界, 函数  $\frac{\sin x}{x}$  在  $[0, +\infty)$  上积分收敛, 因此由 Abel 判别法知原积分收敛.  $\square$

**例 7.3.8.** 判断积分  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} \arctan x \, dx$  ( $p > 0$ ) 的敛散性.

解. 令  $f(x) = \frac{\sin x}{x^p}$ ,  $g(x) = \arctan x$ , 则  $f$  在  $[1, +\infty)$  上的积分收敛, 而  $g$  在  $[1, +\infty)$  中单调有界, 故由 Abel 判别法知原积分收敛.  $\square$

### 习题 7.3

1. 判断下列无穷积分的敛散性:

$$\begin{aligned} (1) & \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}; & (2) & \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}; & (3) & \int_0^{+\infty} \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^7}}; \\ (4) & \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}} dx; & (5) & \int_1^{+\infty} \frac{x \arctan x}{1+x^3} dx; & (6) & \int_1^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^6}} dx; \\ (7) & \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx; & (8) & \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx; & (9) & \int_1^{+\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{x} dx. \end{aligned}$$

2. 判断下列瑕积分的敛散性:

$$\begin{aligned} (1) & \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}; & (2) & \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} \ln x}; & (3) & \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}; \\ (4) & \int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}; & (5) & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^m} dx; & (6) & \int_0^1 \frac{\ln x}{(1-x)^2} dx; \\ (7) & \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} \sin \frac{1}{x} dx; & (8) & \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx; & (9) & \int_{0.5}^1 \frac{dx}{\ln x}. \end{aligned}$$

3. 判断下列无穷积分是绝对收敛还是条件收敛的 ( $p > 0$ ):

$$\begin{aligned} (1) & \int_1^{+\infty} \frac{\sin \sqrt{x}}{x} dx; & (2) & \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx; & (3) & \int_e^{+\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} \sin x dx; \\ (4) & \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \sin x}{1+x} dx; & (5) & \int_1^{+\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x} dx; & (6) & \int_0^{+\infty} \frac{\sin x (1-\cos x)}{x^p} dx. \end{aligned}$$

4. 研究下列广义积分的敛散性 ( $p, q > 0$ ):

$$\begin{aligned} (1) & \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^p}; & (2) & \int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^q} dx; & (3) & \int_0^1 \frac{x^p}{\sqrt[3]{1-x^4}} dx; \\ (4) & \int_0^{+\infty} \frac{e^x - 1}{x^p} dx; & (5) & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}; & (6) & \int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} dx. \end{aligned}$$

5. 设  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  中连续, 如果  $\int_1^{+\infty} f^2(x) dx$  收敛, 则  $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$  绝对收敛. (提示: 用平均值不等式.)

6. 设  $f(x)$  在  $[a, A]$  ( $A < \infty$ ) 上均可积. 如果  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$  收敛, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ , 证明  $L = 0$ , 且  $\int_a^{+\infty} f^2(x) dx$  也收敛.



7. 设  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  中单调递减, 且  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛, 证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0$ .  
(提示: 在区间  $[A/2, A]$  上估计积分.)
8. 设  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  中单调递减趋于零, 且  $\int_a^{+\infty} \sqrt{f(x)/x} dx$  收敛, 则  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  也收敛. (提示: 利用上题, 比较被积函数.)
9. 设  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛, 如果  $x \rightarrow +\infty$  时  $xf(x)$  单调递减趋于零, 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) \ln x = 0.$$

10. (\*) 设  $f(x) > 0$  在  $[0, +\infty)$  中连续, 且  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{f(x)}$  收敛, 证明

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda f(x)dx = +\infty.$$

11. (\*) 研究广义积分

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x} \quad (p, q \in \mathbb{R})$$

的敛散性.

## §7.4 广义积分的几个例子



本节内容可以作为选读材料. 我们计算几个广义积分作为示例.

**例 7.4.1.** 计算积分  $I = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx dx \quad (a > 0)$ .

**解.** 利用分部积分, 计算出被积函数的原函数为

$$F(x) = -\frac{a \sin bx + b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{-ax},$$

因此, 由 Newton-Leibniz 公式, 有

$$I = F(+\infty) - F(0) = -F(0) = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

**例 7.4.2.** 计算积分  $I = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2} dx \quad (0 < r < 1)$ .

**解.** 令  $t = \tan \frac{x}{2}$ , 则有

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-r^2}{1-2r \frac{1-t^2}{1+t^2} + r^2} \frac{2dt}{1+t^2} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2(1-r^2)}{(1-r)^2 + (1+r)^2 t^2} dt \\ &= 2 \arctan \frac{1+r}{1-r} t \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 2\pi. \end{aligned}$$

**例 7.4.3.** 计算积分  $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$ .

**解.** 令  $x = \frac{1}{t}$ , 则

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^{-2} dt}{1+t^{-4}} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt,$$

因此有

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2+2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

这说明  $I = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ .

**例 7.4.4.** 计算积分  $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$  ( $n$  为非负整数).

**解.** 当  $n=0$  时,

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1,$$

当  $n \geq 1$  时,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = -e^{-x} x^n \Big|_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \\ &= n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = n I_{n-1}, \end{aligned}$$

因此

$$I_n = n!, \quad \forall n \geq 0.$$

**例 7.4.5.** 计算积分  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$  ( $n \geq 1$ ).

**解.** 当  $n=1$  时,

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2},$$

当  $n \geq 2$  时,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n} dx \\ &= I_{n-1} + \int_0^{+\infty} \frac{-x^2}{(1+x^2)^n} dx \\ &= I_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)} \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} \Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{2(n-1)} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} dx \\ &= \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}. \end{aligned}$$

因此

$$I_n = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}, \quad \forall n \geq 1.$$

**例 7.4.6.** 计算积分  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$  (Euler-Poisson 积分).

**解.** 由 Taylor 展开易见

$$e^t \geq 1+t, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

因此

$$1-x^2 \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x > 0.$$

从而得到如下的积分估计

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} dx,$$

上式左边利用变量代换  $x = \sin t$ , 中间利用变量代换  $x = \frac{t}{\sqrt{n}}$ , 右边利用上面的例子, 最后得到

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!},$$

利用 Wallis 公式

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(2n)!!]^2}{[(2n-1)!!]^2 (2n+1)}$$

和数列极限的夹逼定理可得

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

**例 7.4.7.** 计算积分  $I = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2 - \frac{b}{x^2}} dx$  ( $a, b > 0$ ).

解. 令  $x = \sqrt{\frac{b}{a}} \frac{1}{t}$ , 则

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{b}{t^2} - at^2} \sqrt{\frac{b}{a}} \frac{1}{t^2} dt,$$

因此有

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^{+\infty} e^{-ax^2 - \frac{b}{x^2}} \left(1 + \sqrt{\frac{b}{a}} \frac{1}{x^2}\right) dx \\ &= \frac{e^{-2\sqrt{ab}}}{\sqrt{a}} \int_0^{+\infty} e^{-(\sqrt{a}x - \frac{\sqrt{b}}{x})^2} d\left(\sqrt{a}x - \frac{\sqrt{b}}{x}\right) \\ &= \frac{e^{-2\sqrt{ab}}}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{ab}}. \end{aligned}$$

这说明

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{ab}}.$$

例 7.4.8. 计算积分  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ .

解. 利用等式  $\sin(2n-1)x - \sin(2n-3)x = 2 \sin x \cos 2(n-1)x$  易得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n-1)x}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad \forall n \geq 1.$$

再利用等式  $\sin^2 nx - \sin^2(n-1)x = \sin(2n-1)x \sin x$  可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x} dx = \sum_{k=1}^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2k-1)x}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2} n, \quad \forall n \geq 1.$$

在区间  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上, 利用不等式  $x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin x \leq x$  可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{x^2} dx &\leq \frac{\pi}{2} = \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x} dx \\ &\leq \frac{1}{n} \int_0^{\delta} \frac{\sin^2 nx}{x^2} \left(1 - \frac{\delta^2}{6}\right)^{-1} dx + \frac{1}{n} \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{\pi^2}{24}\right)^{-1} dx. \end{aligned}$$

作变量代换  $x = \frac{t}{n}$ , 并令  $n \rightarrow +\infty$ , 得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \leq \frac{\pi}{2} \leq \left(1 - \frac{\delta^2}{6}\right)^{-1} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$$

再令  $\delta \rightarrow 0^+$  即得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

注. 利用分部积分和简单的变量替换, 由此例不难得出

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

**例 7.4.9.** 计算积分  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx$  (Euler 积分).

**解.** 作变量代换  $x = 2t$ , 得

$$I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin 2t \, dt = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin t \, dt + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t \, dt,$$

在上式最后的积分中作变量代换  $t = \frac{\pi}{2} - s$ , 得

$$I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin 2t \, dt = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin t \, dt + 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin s \, ds,$$

即

$$I = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2I,$$

因此  $I = -\frac{\pi}{2} \ln 2$ . □

象 Riemann 积分一样, 广义积分有时也可以看成某种部分和的极限.

**命题 7.4.1.** 设函数  $f$  在  $(0, b]$  中单调递减, 则

$$\int_0^b f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}b\right);$$

类似地, 如果函数  $f$  在  $[0, b)$  中单调递增, 则

$$\int_0^b f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k-1}{n}b\right);$$

**证明.** 当  $f$  在  $(0, b]$  中单调递减时, 不妨设  $f \geq 0$  (不然考虑  $f(x) - f(b)$ ). 我们有估计

$$\frac{b}{n} f\left(\frac{k+1}{n}b\right) \leq \int_{\frac{k}{n}b}^{\frac{k+1}{n}b} f(x) \, dx \leq \frac{b}{n} f\left(\frac{k}{n}b\right),$$

因此有

$$\frac{b}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}b\right) \leq \int_0^b f(x) \, dx$$

以及

$$\int_{\frac{b}{n}}^b f(x) \, dx \leq \frac{b}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}b\right) \leq \frac{b}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}b\right),$$

当  $\int_0^b f(x) \, dx$  收敛时, 由数列极限的夹逼定理知极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}b\right)$  存在且等于积分  $\int_0^b f(x) \, dx$ . 反之, 如果极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}b\right)$  存在, 则积分  $\int_{\frac{b}{n}}^b f(x) \, dx$  有上界, 因而收敛, 因此也得到欲证极限等式.

当函数  $f$  在  $[0, b)$  上单调递增时, 证明是完全类似的, 略.  $\square$

同理, 无穷积分有时也可以转化为极限, 这种极限要用到无穷求和, 这是下一章的内容.

#### 习题 7.4

1. 计算下列积分 ( $n$  为正整数):

$$(1) \int_0^{+\infty} x^{2n-1} e^{-x^2} dx; \quad (2) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}; \quad (3) \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx \quad (a > 0).$$

2. 计算下列积分 ( $n$  为正整数,  $a > 0$ ):

$$(1) \int_0^1 (\ln x)^n dx; \quad (2) \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}} dx; \quad (3) \int_0^1 \frac{x^n dx}{1-x}; \quad (4) \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin^n x dx.$$

3. 计算下列积分:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} dx; \quad (2) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} e^x dx; \quad (3) \int_0^1 \sqrt{\ln \frac{1}{x}} dx.$$

4. 计算下列积分:

$$(1) \int_0^\pi x \ln \sin x dx; \quad (2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cot x dx; \quad (3) \int_0^1 \frac{\arcsin x}{x} dx;$$
$$(4) \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 - \cos x} dx; \quad (5) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2}{\sin^2 x} dx; \quad (6) \int_0^\pi \frac{x^2}{1 - \cos x} dx.$$

5. 计算下列积分:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}; \quad (2) \int_0^1 \frac{1+x^4}{1+x^6} dx; \quad (3) \int_0^{+\infty} \frac{1+x^4}{1+x^6} dx.$$

6. 计算下列积分:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} \quad (\alpha \in \mathbb{R}); \quad (2) \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx.$$

7. 当积分有意义时, 证明下面的等式

$$\int_0^{+\infty} f\left[ax - \frac{b}{x}\right] dx = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(y^2) dy \quad (a, b > 0).$$

8. 设  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上连续, 且对任意  $c > 0$ , 积分  $\int_c^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$  收敛, 则

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx = f(0) \ln \frac{\beta}{\alpha} \quad (\alpha, \beta > 0).$$

9. 设  $f(x)$  是定义在  $(0, +\infty)$  上的函数, 如果对于任意  $b > a > 0$ , 积分  $\int_a^b \frac{f(x)}{x} dx$  收敛, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = L, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = M,$$

则

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx = [L - M] \ln \frac{\beta}{\alpha} \quad (\alpha, \beta > 0).$$

10. 计算下列积分 ( $a, b > 0$ ):

$$(1) \int_0^{+\infty} \left( \frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2} \right) \frac{dx}{x^2}; \quad (2) \int_0^{+\infty} \frac{b \sin ax - a \sin bx}{x^2} dx.$$

11. 计算下列积分:

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln |\sin^2 x - a| dx \quad (0 \leq a \leq 1); \quad (2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin^2 x + a) dx \quad (a > 0).$$

(提示: (2) 可先承认第九章 (9.13) 式.)

## 第八章 数项级数

在研究 Taylor 展开时, 我们遇到过级数的收敛问题, 这一章和下一章我们就来处理这样的问题. 和积分一样, 对于一系列数 (不一定有限) 的求和可以看成一种新的运算, 这种运算不属于初等的四则运算, 但具有类似的性质.

### §8.1 级数收敛与发散的概念

设  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  为一列实数, 形式和

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

称为无穷级数,  $a_n$  称为通项或一般项,  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + \dots + a_n$  称为级数的第  $n$  个部分和.

如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$  存在且有限, 则称级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 其和为  $S$ , 记为

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

否则就称级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散. 级数的收敛或发散性质统称为敛散性. 利用数列极限的性质可得

**级数收敛的必要条件:** 如果  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则通项  $a_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). 这是因为

$$a_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow S - S = 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

**级数收敛的充要条件 (Cauchy 准则):**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛  $\iff$  任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N = N(\varepsilon)$ , 当  $n > N$  时

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon, \quad \forall p \geq 1.$$

这时因为

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p} = S_{n+p} - S_n,$$

对数列  $\{S_n\}$  用 Cauchy 收敛准则即可.

**例 8.1.1.** 判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  的敛散性.

**解.** 我们计算其部分和

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty),$$

故原级数收敛. □



**例 8.1.2.** 判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  的敛散性.

**解.** 当  $n > 1$  时,  $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ . 与前例类似, 有

$$0 < \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{n+p} \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

由 Cauchy 准则, 原级数收敛 (事实上, 以后将证明其和为  $\pi^2/6$ ). □

**例 8.1.3.** 判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  的敛散性 (调和级数).

**解.** 当  $n \geq 1$ , 有

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

由 Cauchy 准则, 原级数发散. □

**例 8.1.4.** 判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$  的敛散性.

**解.** 如果级数收敛, 则  $\sin n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$ . 利用等式

$$\sin(n+1) = \sin n \cdot \cos 1 + \cos n \cdot \sin 1$$

知, 此时也有  $\cos n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$ . 但

$$\sin^2 n + \cos^2 n \equiv 1,$$

这就导出了矛盾, 从而说明原级数发散. □

**例 8.1.5.** 设  $q > 0$ , 则当  $q < 1$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$  收敛;  $q \geq 1$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$  发散 (几何级数).

**证明.** 当  $0 < q < 1$  时,

$$S_n = \sum_{k=1}^n q^k = q \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \rightarrow \frac{q}{1-q},$$

此时原级数收敛; 当  $q \geq 1$  时,  $q^n \rightarrow 0$ , 此时原级数发散. □

**命题 8.1.1.** (1) 如果  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  均收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$  也收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

(2) 级数的敛散性与其有限项的值无关.

**证明.** 证明和数列极限的情形完全类似, 我们略去.  $\square$

### 习题 8.1

1. 研究下列级数的敛散性:

$$\begin{aligned} (1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}; \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}; \\ (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n(n+1)}; \quad (5) \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right); \quad (6) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{(-1)^n}{2n+2}\right). \end{aligned}$$

2. 求下列级数之和:

$$\begin{aligned} (1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n-1)}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}); \\ (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}; \\ (5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}; \quad (6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

3. 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的部分和为  $S_n$ . 如果  $S_{2n} \rightarrow S$ , 且  $a_n \rightarrow 0$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

4. 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$  收敛, 则数列  $\{a_n\}$  收敛. (提示: 用 Cauchy 准则.)

5. 设数列  $na_n$  收敛, 且级数  $\sum_{n=2}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$  收敛, 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  也是收敛的.

6. 证明, 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$  也收敛. (提示: 用平均值不等式.)

7. 研究级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\alpha n + \beta)$  的敛散性, 其中  $\alpha, \beta$  为常数.

8. 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  为发散级数, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} \min\{a_n, 1\}$  也发散.

9. 设  $\{a_n\}$  为一列实数, 在  $[1, +\infty)$  上分段定义函数  $f(x)$  如下: 当  $x \in [k, k+1)$  时, 令  $f(x) = a_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). 证明, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛的充分必要条件是无穷积分  $\int_1^{\infty} f(x)dx$  收敛, 且收敛时有

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \int_1^{\infty} f(x)dx.$$

10. 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$  均收敛, 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  也收敛, 且

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \right| \leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

11. 设  $|a_n| \leq b_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  也收敛.

### §8.2 正项级数收敛与发散的判别法

如果  $a_n > 0$ , 则称  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  为正项级数. 此时, 部分和  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  关于  $n$  是单调递增的. 因此有

(基本判别法)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛  $\iff \{S_n\}$  收敛  $\iff \{S_n\}$  有上界.

这个判别法对于  $a_n \geq 0$  的级数当然也成立.

例 8.2.1. 判断  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \cdot (n+1)}$  的敛散性.

解. 我们有如下估计

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n} \cdot (n+1)} &< \frac{2}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) \cdot \sqrt{n+1}} \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1}} \\ &= 2 \left( \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right), \end{aligned}$$

从而

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} \cdot (k+1)} < 2 \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) = 2 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) < 2.$$

故原级数收敛. □

例 8.2.2. 设  $q > 1$  为正整数,  $0 \leq a_n \leq q-1$  ( $\forall n \geq 1$ ), 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{q^n}$$

收敛, 其和介于 0 和 1 之间.

证明. 当  $0 \leq a_n \leq q-1$  时,

$$\begin{aligned} 0 \leq S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{q^k} \\ &\leq (q-1) \sum_{k=1}^n \frac{1}{q^k} \\ &= 1 - q^{-n} < 1. \end{aligned}$$

因此级数收敛且和介于 0 与 1 之间. 如果  $a_n$  都是整数, 则这个级数的和  $S$  可记为

$$S_{(q)} = 0.a_1a_2a_3 \cdots a_n \cdots,$$

这也就是  $S \in [0, 1]$  的  $q$  进制小数表示.  $q = 10$  时就是常用的 10 进制小数表示.  $[0, 1]$  区间中的数都可以用  $q$  进制小数来表示, 但这种表示不是惟一的, 例如在十进制中

$$0.999 \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{10} \frac{1 - 10^{-n}}{1 - 10^{-1}} = 1.$$

当  $q = 2$  时,  $a_n$  只取 0 或 1. 在应用中, 我们可以用某些物质的特定状态来表示 0 或 1, 因而这些状态的不同组合就可以表示实数 (由于实际上的限制, 一般只能表示有理数). 由于这个原因, 二进制被广泛地应用于计算机和信息科学.  $\square$

**定理 8.2.1 (比较判别法).** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  为正项级数, 如果存在常数  $M > 0$ , 使得

$$a_n \leq M b_n, \quad \forall n \geq 1. \quad (*)$$

则 (1)  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛时  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  也收敛; (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散时  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  也发散.

**证明.** 比较两级数的部分和并利用基本判别法即可.  $\square$

注. (1) 条件 (\*) 只要对充分大的  $n$  成立即可.

(2) 条件 (\*) 也可改写为

$$\frac{a_n}{b_n} \leq M,$$

$M$  的存在性通常用求极限的办法得到, 即, 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda,$$

则有

(i)  $0 < \lambda < +\infty$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  同敛散;

(ii)  $\lambda = 0$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛时  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  也收敛;  $\lambda = \infty$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  发散时  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  也发散.

(3) 另一个求  $\frac{a_n}{b_n}$  上界的方法是利用单调性, 即如果

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad (\Longleftrightarrow \quad \frac{a_n}{b_n} \text{ 单调递减})$$

则 (i)  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛时  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  也收敛; (ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散时  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  也发散.

(4) (Cauchy 判别法或根值判别法) 在定理 8.2.1 中取  $b_n = q^n$  ( $q$  是固定正数), 得到如下结果:

如果  $n$  充分大时,  $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;

如果存在无穷多个  $n$ , 使得  $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

如何寻找  $q$  呢? 还是求极限比较方便: 设

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda.$$

则  $\lambda < 1$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;  $\lambda > 1$  时, 级数发散 ( $\lambda = 1$  时无法判别).

(5) (d'Alembert 判别法或比值判别法) 在 (3) 中取  $b_n = q^n$ , 得如下结果:

如果  $n$  充分大时,  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;

如果  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$  (对充分大的  $n$  成立), 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

当然, 还是求极限来寻找  $q$  比较容易. 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda,$$

则  $\lambda < 1$  时级数收敛,  $\lambda > 1$  时发散 ( $\lambda = 1$  时无法判别).

**例 8.2.3.** 判别  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right]$  的敛散性.

**解.** 根据 Taylor 展开,

$$0 < \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] \bigg/ \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2},$$

而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛, 故原级数收敛. □

**例 8.2.4.** 设  $p \in \mathbb{R}$ , 判别级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{p}{n}\right)^{n^2}$  的敛散性.

**解.** 因为

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(1 - \frac{p}{n}\right)^n \rightarrow e^{-p},$$

故  $p > 0$  时原级数收敛;  $p < 0$  时级数发散. 显然,  $p = 0$  时级数也发散. □

**例 8.2.5.** 设  $x > 0$ , 判别级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n! (\frac{x}{n})^n$  的敛散性.

**解.** 因为

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x}{(1 + \frac{1}{n})^n} \rightarrow \frac{x}{e},$$

故  $0 < x < e$  时级数收敛;  $x > e$  时级数发散.  $x = e$  时,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = e / (1 + \frac{1}{n})^n \geq 1,$$

故此时级数也发散. □

在前面, 我们说明了  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  为发散级数,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛. 对于一般的实数  $s \in \mathbb{R}$ , 如果判别级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  的敛散性? 这个问题可以用下面的办法解决.

**定理 8.2.2 (积分判别法).** 设  $f(x)$  是定义在  $[1, +\infty)$  上的非负单调递减函数, 记  $a_n = f(n)$  ( $n \geq 1$ ). 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的敛散性与广义积分  $\int_1^{+\infty} f(x)dx$  的敛散性相同.

**证明.** 令

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt, \quad \forall x \geq 1.$$

因为  $f$  为单调递减函数, 故当  $n \leq x \leq n+1$  时

$$a_{n+1} = f(n+1) \leq f(x) \leq f(n) = a_n,$$

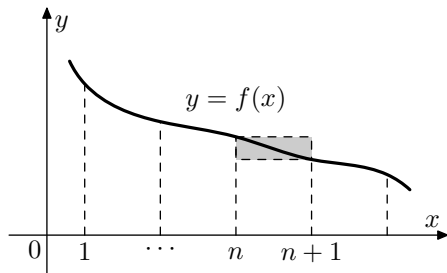


图 8.1 积分判别法

这说明

$$a_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq a_n,$$

从而有

$$S_n \leq a_1 + F(n), \quad F(n) \leq S_{n-1}.$$

其中  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  为级数的部分和. 因为  $S_n$  及  $F(n)$  关于  $n$  都是单调递增的, 二者同时有界或无界, 即  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  与  $\int_1^{+\infty} f(x)dx$  同敛散. □

**例 8.2.6.** 设  $s \in \mathbb{R}$ , 判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  的敛散性.

**解.**  $s \leq 0$  时, 一般项  $\rightarrow 0$ , 故级数发散.  $s > 0$  时, 考虑  $f(x) = x^{-s}$ ,  $f$  为非负单调递减函数, 且

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt = \int_1^x t^{-s}dt = \begin{cases} \ln x, & s = 1, \\ \frac{1}{1-s}(x^{1-s} - 1), & s \neq 1. \end{cases}$$

当  $0 < s \leq 1$  时,  $F(x) \rightarrow +\infty$  ( $x \rightarrow +\infty$ );  $s > 1$  时,  $F(x) \rightarrow \frac{1}{s-1}$  ( $x \rightarrow +\infty$ ). 这说明  $s \leq 1$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  发散;  $s > 1$  时  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  收敛.

**注.**  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  称为 Riemann-Zeta 函数, 这是一个非常重要的函数, 它和现代数论的关系特别紧密.

**例 8.2.7.** 判断  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(\ln(n+1))^s}$  的敛散性, 其中  $s \in \mathbb{R}$ .

**解.** 当  $s \leq 0$  时, 级数的一般项大于或等于  $\frac{1}{n+1}$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 故原级数发散. 下设  $s > 0$ . 令

$$f(t) = \frac{1}{(1+t)(\ln(1+t))^s},$$

则  $f$  为非负单调递减函数, 且

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^x f(t)dt = \int_1^x \frac{dt}{(1+t)(\ln(1+t))^s} \\ &= \begin{cases} \ln \ln(1+x) - \ln \ln 2, & s = 1, \\ \frac{1}{1-s} [(\ln(1+x))^{1-s} - (\ln 2)^{1-s}], & s \neq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

因此  $s \leq 1$  时原级数发散;  $s > 1$  时原级数收敛.  $\square$

现在, 如果在比较判别法中令  $b_n = \frac{1}{n^s}$  或  $\frac{1}{n \ln n}$  等, 就可以由此进一步得到新的判别法. 不过, 我们来介绍一个相当一般的判别法, 由此出发再得到两个新的判别法. 以下仍假设  $\lambda$  是常数.

**定理 8.2.3 (Kummer).** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  为正项级数, 如果  $n$  充分大时

- (1)  $\frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \geq \lambda > 0$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;
- (2)  $\frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \leq 0$  且  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  发散, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

**证明.** (1) 条件可改写为

$$a_{n+1} \leq \frac{1}{\lambda} \left( \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right), \quad \forall n \geq N.$$

这说明当  $n \geq N$  时

$$\begin{aligned} S_{n+1} &\leq S_N + \frac{1}{\lambda} \sum_{k=N}^n \left( \frac{a_k}{b_k} - \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} \right) \\ &= S_N + \frac{1}{\lambda} \left( \frac{a_N}{b_N} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right) \\ &\leq S_N + \frac{1}{\lambda} \frac{a_N}{b_N}, \end{aligned}$$

即  $\{S_n\}$  有上界, 从而  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

(2) 由

$$\frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \leq 0$$

可知

$$\frac{a_n}{b_n} \leq \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}},$$

即  $\{\frac{a_n}{b_n}\}$  关于  $n$  单调递增, 从而  $a_n \geq \frac{a_1}{b_1} b_n$ , 因此由  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  发散知  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  也发散.  $\square$

注. (1) 和前面一样,  $\lambda$  的存在性用极限去判断较容易: 设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) = \lambda,$$

则  $\lambda > 0$  时  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;  $\lambda < 0$  且  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  发散时  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  也发散.

(2) 取  $b_n = 1$ , 由 Kummer 判别法就得到了 d'Alembert 判别法.

(3) (Raabe) 取  $b_n = \frac{1}{n}$ , 则得 ( $\mu$  为常数)

(i)  $n \cdot \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \geq \mu > 1$  时  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;

(ii)  $n \cdot \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 1$  时  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

Raabe 判别法当然也有极限形式 (略).

(4) (Gauss) 取  $b_n = \frac{1}{n \ln n}$ , 则得如下判别法: 假设 ( $\theta$  为常数)

$$(*) \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\theta}{n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right),$$

则  $\theta > 1$  时  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;  $\theta \leq 1$  时级数发散.

事实上, 由 Raabe 判别法, 只要考虑  $\theta = 1$  的情形就可以了, 此时有

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ n \ln n \left[ 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right) \right] - (n+1) \ln(n+1) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \ln \frac{n}{n+1} = -1 < 0. \end{aligned}$$



由于  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  发散, 故由 Kummer 判别法, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.  $\square$

**例 8.2.8.** 判别下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)} \quad (\alpha > 0); \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^s \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

**解.** (1) 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left( \frac{\alpha + n + 1}{n + 1} - 1 \right) = \alpha,$$

根据 Raabe 判别法,  $\alpha > 1$  时原级数收敛,  $\alpha < 1$  时发散.  $\alpha = 1$  时,  $a_n = \frac{1}{n+1}$ , 此时原级数也发散.

(2) 因为

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \left( \frac{2n+2}{2n+1} \right)^s \frac{2n+3}{2n+1} = \left( 1 + \frac{1}{2n+1} \right)^s \left( 1 + \frac{2}{2n+1} \right) \\ &= \left( 1 + \frac{s}{2n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \left( 1 + \frac{2}{2n+1} \right) \\ &= 1 + \frac{s+2}{2n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= 1 + \frac{(s+2)/2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

根据 Gauss 判别法, 当  $s > 0$  时原级数收敛;  $s \leq 0$  时原级数发散.  $\square$

最后, 我们介绍一个单调递减正项级数的收敛性判别法, 它有时可以用来代替积分判别法.

**例 8.2.9** (Cauchy 凝聚判别法). 设  $a_n$  单调递减趋于零. 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛当且仅当  $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$  收敛.

**证明.** 记  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ,  $T_n = \sum_{k=0}^n 2^k a_{2^k}$ . 当  $2^k \leq n < 2^{k+1}$  时, 有

$$\begin{aligned} S_n &\geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k}) \\ &\geq a_1 + a_2 + 2a_4 + \cdots + 2^{k-1}a_{2^k} \\ &\geq \frac{1}{2}(a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k}) \\ &= T_k/2. \end{aligned}$$

这说明当  $S_n$  有界时,  $T_n$  也有界, 即  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛时  $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$  也收敛. 类似地, 有

$$\begin{aligned} S_n &\leq a_1 + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}) \\ &\leq a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k} \\ &= T_k. \end{aligned}$$

从而当  $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$  收敛时  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  也收敛.  $\square$

下面的例子已经用积分判别法讨论过了, 我们用 Cauchy 凝聚判别法再看一下.

**例 8.2.10.** 讨论下列级数的敛散性 ( $p$  为实数):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}.$$

**解.** 显然, 当  $p \leq 0$  时级数都是发散的. 下设  $p > 0$ . 因为  $a_n = \frac{1}{n^p}$  单调递减趋于零, 由 Cauchy 凝聚判别法, 只要考察下面的级数的敛散性:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^{kp}} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1-p)},$$

这是几何级数, 当  $2^{1-p} < 1$ , 即  $p > 1$  时收敛; 当  $2^{1-p} \geq 1$ , 即  $p \leq 1$  时发散.

第二个级数可类似处理, 考察级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k (k \ln 2)^p} = (\ln 2)^{-p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p},$$

根据刚才的讨论可知, 当  $p > 1$  时级数收敛, 否则级数发散.  $\square$

### 习题 8.2

1. 判断下列级数的敛散性:

$$\begin{aligned} (1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+n^2}}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}; \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{1}{n}); \\ (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tan \frac{1}{n}; \quad (5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}; \quad (6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}. \end{aligned}$$

2. 判断下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}; \quad (2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \ln n}; \quad (3) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}.$$

3. 判断下列级数的敛散性:

$$\begin{aligned} (1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}; \\ (3) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1)^p \quad (a > 1); \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}; \\ (5) \sum_{n=1}^{\infty} (1 - n \sin \frac{1}{n})^p; \quad (6) \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{2n+1})^n. \end{aligned}$$

4. 设正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 证明  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  也收敛.
5. 设正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 证明  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} a_n$  也收敛.
6. 设  $a_n > 0$ ,  $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ , 证明
- (1) 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^2}$  总是收敛的;
- (2) 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{S_n}}$  收敛当且仅当  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.
7. 设正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散, 试用积分判别法证明  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{S_n}$  也发散, 其中  $S_n$  为  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的部分和.
8. 判断下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+p}}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1) \cdots (p+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^q} \quad (p > 0, q > 0);$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(a+\sqrt{1})(a+\sqrt{2}) \cdots (a+\sqrt{n})} \quad (a > 0).$$

9. 设  $a_n > 0$ ,  $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ , 证明
- (1) 当  $\alpha > 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$  总是收敛的;
- (2) 当  $\alpha \leq 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$  收敛当且仅当  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.
10. 设  $a_n > 0$  关于  $n$  单调递增. 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{a_n}{a_{n+1}})$  收敛当且仅当级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1)$  收敛.
11. 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  为正项级数, 且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\alpha_n}{n \ln n}.$$

如果  $n$  充分大时  $\alpha_n \geq \mu > 1$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛; 如果  $n$  充分大时  $\alpha_n \leq 1$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散. 这个结果称为 Bertrand 判别法.

12. 设  $a_n$  单调递减趋于零, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \min\{a_n, \frac{1}{n}\}$  也发散.

13. 构造一个收敛的正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , 使得它有无限项满足条件  $a_{n_k} \geq \frac{1}{n_k}$ .

14. (\*) 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  为收敛的正项级数, 则存在另一收敛的正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ , 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = +\infty.$$

15. (\*) 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  为发散的项级数, 则存在另一发散的项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ , 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 0.$$

16. 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  为收敛的正项级数, 证明  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n})$  也收敛.

17. (\*) 设  $a_n > 0$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$  收敛. 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$  也收敛.

### §8.3 一般级数收敛与发散判别法

在第五章中, 利用 Taylor 公式我们曾得到如下等式:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}, \\ \ln 2 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

上面两个级数的特点是正负项交替出现, 我们将这样的级数称为交错级数.

**定理 8.3.1 (Leibniz).** 设  $a_n$  单调递减趋于 0, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$  收敛.

**证明.** 我们利用 Cauchy 准则来证明. 考虑  $S_{n+p} - S_n$ :

$$\begin{aligned} S_{n+p} - S_n &= (-1)^n \cdot a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \cdots + (-1)^{n+p-1} a_{n+p} \\ &= (-1)^n [a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots + (-1)^{p-1} a_{n+p}]. \end{aligned}$$

因此当  $p = 2k - 1$  时,

$$\begin{aligned} (-1)^n (S_{n+p} - S_n) &= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \cdots \leq a_{n+1}, \\ (-1)^n (S_{n+p} - S_n) &= (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \cdots + a_{n+2k-1} \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

这说明

$$(*) \quad |S_{n+p} - S_n| \leq a_{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

当  $p = 2k$  时, 类似地可证上式仍成立. 因此原级数收敛.  $\square$

注. 在 (\*) 中令  $p \rightarrow \infty$  得

$$|S - S_n| \leq a_{n+1},$$

其中  $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$  为级数的和, 这是交错级数的误差估计.

**例 8.3.1.** 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$  收敛.

**证明.** 这是因为  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  单调减趋于零, 由 Leibniz 判别法即知级数收敛.  $\square$

为了得到更一般的结果, 我们需要一个分部求和的技巧, 这个技巧其实在第六章第二节 (第二积分中值定理) 中已经用过了.

**引理 8.3.2** (分部求和). 设  $\{a_k\}, \{b_k\}$  为数列, 则

$$\sum_{k=m}^{n-1} a_{k+1}(b_{k+1} - b_k) + \sum_{k=m}^{n-1} b_k(a_{k+1} - a_k) = a_n b_n - a_m b_m.$$

**证明.** 将欲证左式两项合并, 然后利用裂项相消法即可:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=m}^{n-1} a_{k+1}(b_{k+1} - b_k) + \sum_{k=m}^{n-1} b_k(a_{k+1} - a_k) \\ &= \sum_{k=m}^{n-1} [a_{k+1}b_{k+1} - a_{k+1}b_k + b_k a_{k+1} - b_k a_k] \\ &= \sum_{k=m}^{n-1} (a_{k+1}b_{k+1} - a_k b_k) \\ &= a_n b_n - a_m b_m. \end{aligned}$$

引理证毕.  $\square$

**例 8.3.2.** 分部求和公式的简单应用.

如果取  $a_k = b_k = k$ , 代入分部求和公式, 得

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) + \sum_{k=0}^{n-1} k = n^2 - 0,$$

即

$$2 \sum_{k=1}^n k = n^2 + n,$$

这就得到公式

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

类似地, 如果令  $a_k = k^2$ ,  $b_k = k$  代入, 则得

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2 + \sum_{k=0}^{n-1} k(2k+1) = n^3,$$

整理以后就得到公式

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

读者可以用这个办法继续求和. □

如果约定  $b_0 = 0$ , 记

$$B_0 = 0, \quad B_k = b_1 + b_2 + \cdots + b_k \quad (k \geq 1),$$

并用  $B_k$  代替上述分部求和公式中的  $b_k$ , 则得到

**推论 8.3.3** (Abel 变换). 设  $a_i, b_i$  ( $i \geq 1$ ) 为两组实数, 则有

$$\sum_{i=m+1}^n a_i b_i = \sum_{i=m+1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) B_i + a_n B_n - a_{m+1} B_m, \quad \forall m \geq 0. \quad (8.1)$$

**证明.** 这可由分部求和公式得到, 也可直接计算如下

$$\begin{aligned} \sum_{i=m+1}^n a_i b_i &= \sum_{i=m+1}^n a_i (B_i - B_{i-1}) = \sum_{i=m+1}^n a_i B_i - \sum_{i=m+1}^n a_i B_{i-1} \\ &= \sum_{i=m+1}^n a_i B_i - \sum_{i=m}^{n-1} a_{i+1} B_i \\ &= \sum_{i=m+1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) B_i + a_n B_n - a_{m+1} B_m. \end{aligned}$$

**推论 8.3.4** (Abel 引理). 设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为单调数列, 且  $|B_i| \leq M$  ( $i \geq 1$ ), 则

$$\left| \sum_{i=m+1}^n a_i b_i \right| \leq 2M(|a_n| + |a_{m+1}|), \quad \forall m \geq 0.$$

**证明.** 由 (8.1) 得

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=m+1}^n a_i b_i \right| &\leq M \sum_{i=m+1}^{n-1} |a_i - a_{i+1}| + M(|a_n| + |a_{m+1}|) \\ &= M \left| \sum_{i=m+1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) \right| + M(|a_n| + |a_{m+1}|) \\ &= M|a_{m+1} - a_n| + M(|a_n| + |a_{m+1}|) \\ &\leq 2M(|a_{m+1}| + |a_n|). \end{aligned}$$

其中, 在第一个等号处我们用到了  $\{a_i\}$  的单调性.  $\square$

**定理 8.3.5** (Dirichlet). 设数列  $\{a_n\}$  单调趋于 0, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  的部分和有界, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  收敛.

**证明.** 由假设, 存在  $M > 0$  使得

$$\left| \sum_{i=1}^n b_i \right| \leq M, \quad \forall n \geq 1.$$

由 Abel 变换及其推论,

$$\left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i b_i \right| \leq 2M(|a_{n+1}| + |a_{n+p}|) \leq 4M|a_{n+1}| \rightarrow 0.$$

由 Cauchy 准则知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  收敛.  $\square$

**注.** 如果在  $[1, +\infty)$  上分段地定义函数  $f(x), g(x)$  如下: 当  $x \in [k, k+1)$  时, 令  $f(x) = a_k, g(x) = b_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). 则  $f(x)$  和  $g(x)$  满足第七章第三节关于广义积分的 Dirichlet 定理的条件, 因而  $f(x)g(x)$  在  $[1, +\infty)$  上的广义积分收敛, 即级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  收敛. 这说明数项级数的 Dirichlet 定理可以看成广义积分的 Dirichlet 定理的推论. 下面的 Abel 定理也是如此.

**定理 8.3.6** (Abel). 如果  $\{a_n\}$  为单调有界数列,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  收敛.

**证明.**  $\{a_n\}$  单调有界意味着极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  存在. 于是  $\{a_n - a\}$  单调趋于 0.

由 Dirichlet 判别法,  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a)b_n$  收敛. 从而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a)b_n + \sum_{n=1}^{\infty} a \cdot b_n$$

也收敛.  $\square$

**例 8.3.3.** 判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx$  的敛散性.

**解.**  $a_n = \frac{1}{n}$  单调递减趋于 0,  $b_n = \sin nx$ . 利用公式

$$2 \sin \frac{x}{2} \cdot \sin kx = \cos(k - \frac{1}{2})x - \cos(k + \frac{1}{2})x$$

得

$$\sum_{k=1}^n b_k = \begin{cases} 0, & x = 2k\pi, \\ (\cos \frac{x}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})x) / 2 \sin \frac{x}{2}, & x \neq 2k\pi. \end{cases}$$

即  $b_n$  的部分和总是有界的. 故由 Dirichlet 判别法知, 原级数收敛.  $\square$

**例 8.3.4.** 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} na_n$  收敛, 证明  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  也收敛.

**证明.** 记  $a_n = \frac{1}{n} \cdot (na_n)$ , 而  $\frac{1}{n}$  单调趋于 0,  $\sum_{n=1}^{\infty} na_n$  收敛, 故由 Abel 判别法, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.  $\square$

对于更一般的级数, 没有普适的判别法, 但有时可以转化为正项级数予以处理.

**定义 8.3.1 (绝对收敛).** 如果  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  收敛, 则称  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  绝对收敛 (此时, 由于

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| \rightarrow 0,$$

故  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的确为收敛级数).

如果  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛而  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  发散, 则称  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  条件收敛.

**例 8.3.5.** 判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) 的敛散性.

**解.** 令  $a_n = \frac{|x|^n}{n}$ , 则  $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow |x|$ . 故  $|x| < 1$  时原级数绝对收敛; 而  $|x| > 1$  时显然发散.  $x = 1$  时级数条件收敛;  $x = -1$  时级数发散.  $\square$

### 习题 8.3

1. 判断下列级数的敛散性:

$$\begin{aligned} (1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n - \ln n}; & \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right); \\ (3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n}{\ln n}; & \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n} \frac{1}{\sqrt{n}}; \\ (5) \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1}); & \quad (6) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\ln n} \right). \end{aligned}$$

2. 在分部求和公式中令  $a_k = k^3$ ,  $b_k = k$ , 求  $\sum_{k=1}^n k^3$  的表达式.

3. 在 Abel 引理的条件下, 证明

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq M(|a_1| + 2|a_n|).$$



4. 在 Abel 引理的条件下, 当  $\{a_i\}$  非负单调递减时, 证明

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq M a_1.$$

5. 判断下列级数的敛散性, 如果收敛的话是条件收敛还是绝对收敛:

$$\begin{aligned} (1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n!}; & \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}; \\ (3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 - \cos \frac{\pi}{\sqrt{n}}\right); & \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + x^2}); \\ (5) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{n} - 1); & \quad (6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{x+\frac{1}{n}}}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

6. 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  绝对收敛,  $\{b_n\}$  为有界数列, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  也是绝对收敛的.

7. (\*) 如果  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$  是否也收敛? 证明你的结论.

8. 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$  收敛且  $a_n$  极限为零, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  的部分和有界, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  收敛. (提示: Abel 求和.)

9. 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$  收敛, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  也收敛.

10. 设  $\{a_n\}$  单调递减趋于零. 证明下面的级数是收敛的:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

11. 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} = 0.$$

12. (\*) 设  $a_n > 0$ ,  $na_n$  单调趋于 0,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛. 证明  $n \ln n \cdot a_n \rightarrow 0$ .

13. 设  $a_n \leq b_n \leq c_n$  ( $n \geq 1$ ). 如果  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  均收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  也收敛.

## §8.4 数项级数的进一步讨论



本节内容可以作为选读材料.

## §8.4.1 级数求和与求极限的可交换性

我们可以把级数的和看成是其部分和的极限, 也就是一个数列极限. 现在我们来考虑这样的问题: 如果有一列数项级数, 它们的和就是一列数, 这一列数的极限有何性质? 为此, 我们考虑依赖于指标  $i, j$  ( $i, j = 1, 2, \dots$ ) 的实数  $a_{ij}$ .

**定义 8.4.1** (级数的一致收敛). 一列收敛级数  $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = A_i$  关于  $i$  一致收敛是指, 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N$ , 当  $n > N$  时,

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{ij} - A_i \right| < \varepsilon, \quad \forall i \geq 1. \quad (8.2)$$

**定理 8.4.1.** 设一列级数  $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = A_i$  关于  $i$  一致收敛, 如果  $\lim_{i \rightarrow \infty} a_{ij} = a_j$  ( $j \geq 1$ ), 则极限  $\lim_{i \rightarrow \infty} A_i$  存在, 级数  $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$  收敛, 且

$$\lim_{i \rightarrow \infty} A_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_j,$$

或改写为

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{i \rightarrow \infty} a_{ij}.$$

**证明.** 由一致收敛的定义, 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N_0$ , 当  $n \geq N_0$  时,

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{ij} - A_i \right| < \frac{1}{4}\varepsilon, \quad \forall i \geq 1.$$

因此, 当  $m > n \geq N_0$  时

$$\left| \sum_{j=n+1}^m a_{ij} \right| \leq \left| \sum_{j=1}^m a_{ij} - A_i \right| + \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} - A_i \right| < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \forall i \geq 1.$$

在上式中令  $i \rightarrow \infty$ , 得

$$\left| \sum_{j=n+1}^m a_j \right| \leq \frac{1}{2}\varepsilon,$$

由 Cauchy 准则即知级数  $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$  收敛, 且在上式中令  $m \rightarrow \infty$  可得

$$\left| \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j \right| \leq \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \forall n \geq N_0.$$

对于  $j = 1, 2, \dots, N_0$ , 因为  $a_{ij} \rightarrow a_j$ , 故存在  $N$ , 当  $i > N$  时,

$$|a_{ij} - a_j| < \frac{\varepsilon}{4N_0}, \quad j = 1, 2, \dots, N_0.$$

因此, 当  $i > N$  时, 有

$$\begin{aligned} \left| A_i - \sum_{j=1}^{\infty} a_j \right| &\leq \left| A_i - \sum_{j=1}^{N_0} a_{ij} \right| + \left| \sum_{j=1}^{N_0} a_{ij} - \sum_{j=1}^{N_0} a_j \right| + \left| \sum_{j=N_0+1}^{\infty} a_j \right| \\ &< \frac{1}{4}\varepsilon + N_0 \frac{\varepsilon}{4N_0} + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

这说明  $\{A_i\}$  的极限存在且极限为  $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ . □

注. 这个结果给出了求极限与求和这两个运算可交换次序的一个充分条件.

**推论 8.4.2.** 设  $\lim_{i \rightarrow \infty} a_{ij} = a_j$  ( $j \geq 1$ ),  $|a_{ij}| \leq b_j$  ( $i \geq 1$ ), 且  $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$  收敛, 则级数  $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$  收敛, 且

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{i \rightarrow \infty} a_{ij} = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}.$$

**证明.** 由  $a_{ij} \rightarrow a_j$ , 且  $|a_{ij}| \leq b_j$  知  $|a_j| \leq b_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . 因为级数  $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$  收敛, 故级数  $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$  绝对收敛. 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N$ , 当  $n > N$  时,

$$0 \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} b_j < \varepsilon.$$

此时, 对任意  $i \geq 1$ , 有

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{ij} - \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \right| = \left| \sum_{j=n+1}^{\infty} a_{ij} \right| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} b_j < \varepsilon,$$

从而级数  $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$  关于  $i$  是一致收敛的. 由上一定理知本推论结论成立. □

注. 这个结果可以称为级数和的控制收敛定理,  $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$  称为控制级数.

**推论 8.4.3.** 设  $\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}| \leq A_j$  ( $j \geq 1$ ), 且  $\sum_{j=1}^{\infty} A_j$  收敛, 则对任意  $i \geq 1$ , 级数  $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$  收敛, 且

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.$$

**证明.** 首先, 由题设知,  $|a_{ij}| \leq A_j, j = 1, 2, \dots$ . 这说明, 对任意  $i \geq 1$ , 级数  $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$  是绝对收敛的. 因为

$$\left| \sum_{i=1}^k a_{ij} \right| \leq \sum_{i=1}^k |a_{ij}| \leq A_j, \quad j \geq 1.$$

故由上一推论, 有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^k a_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k a_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}. \end{aligned}$$

这就证明了本推论. □

注. 这个推论给出了两个无穷求和运算可交换次序的一个充分条件.

**例 8.4.1.** 设  $\sum_{n=2}^{\infty} |a_n|$  收敛, 记  $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n, x \in [-1, 1]$ . 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \zeta(n),$$

其中  $\zeta(s)$  是 Riemann-Zeta 函数.

**证明.** 因为

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{|a_n|}{m^n} \leq \frac{1}{m^2} \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|, \quad \forall m \geq 1,$$

而级数  $\sum_{m=1}^{\infty} m^{-2}$  收敛, 由推论 8.4.3 得

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_n}{m^n} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{m^n},$$

即

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \zeta(n) = \sum_{m=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{m}\right).$$

利用这个例子, 我们可以给出  $\ln 2$  的两个不同的级数表示. 首先, 由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0$$

得

$$\begin{aligned}\ln 2 &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1 + (-1)^n x^{n+1}}{1+x} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-x)^k dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \int_0^1 (-x)^k dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}.\end{aligned}$$

上式也可以改写为

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n-1)},$$

如果考虑函数

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n = \frac{x^2}{2(2-x)},$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-2}}{2(2-n^{-1})} = \ln 2.$$

因此, 根据刚才的例子, 有

$$\ln 2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} \zeta(n),$$

这就是  $\ln 2$  的另一个级数表示, 它的好处是收敛速度较快. □

### §8.4.2 级数的乘积

我们在前面考虑了收敛级数的线性运算性质, 现在我们考虑级数的乘法运算性质. 对于有限个数的和的乘积, 显然有

$$(a_0 + a_1 + \cdots + a_m)(b_0 + b_1 + \cdots + b_n) = \sum_{k=0}^{m+n} \sum_{i+j=k} a_i b_j.$$

对于无穷级数, 我们作如下推广: 设  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  和  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  为两个级数, 定义它们的乘积

为级数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ , 其中

$$c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j, \quad n \geq 0.$$

这种乘积也称为级数的 Cauchy 乘积.

**定理 8.4.4** (Cauchy). 如果  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  和  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  绝对收敛, 则它们的乘积级数也绝对收敛, 且

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

**证明.** 这个定理的证明留作习题.  $\square$

**注.** 在定理的条件下不难看出, 将  $\{a_i b_j\}$  任意排列次序, 得到的级数仍 (绝对) 收敛, 且其和不变.

我们现在将 Cauchy 定理的条件减弱, 这时下面的结果仍然成立.

**定理 8.4.5** (Mertens). 如果  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  和  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  收敛, 且至少其中一个级数绝对收敛, 则它们的乘积级数也收敛, 且

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

**证明.** 不妨设  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  绝对收敛. 分别记

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^n b_k, \quad C_n = \sum_{k=0}^n c_k.$$

则  $A_n \rightarrow A, B_n \rightarrow B$ , 而

$$C_n = \sum_{i+j \leq n} a_i b_j = a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \cdots + a_n B_0 = A_n B + \delta_n,$$

其中

$$\delta_n = a_0(B_n - B) + a_1(B_{n-1} - B) + \cdots + a_n(B_0 - B).$$

我们只要证明  $\delta_n \rightarrow 0$  即可. 因为  $B_n \rightarrow B$ , 故  $\{B_n\}$  关于  $n$  有界, 从而存在  $K$ , 使得

$$|B_n - B| \leq K, \quad \forall n \geq 0.$$

由于  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  绝对收敛, 故任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N_0$ , 当  $n > N_0$  时

$$|a_{N_0+1}| + \cdots + |a_n| < \frac{\varepsilon}{2K+1}.$$

记  $L = |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{N_0}|$ . 由于  $B_n - B \rightarrow 0$ , 故存在  $N_1$ , 当  $n > N_1$  时

$$|B_n - B| < \frac{\varepsilon}{2L+1}.$$

从而当  $n > N_0 + N_1$  时, 有

$$\begin{aligned} |\delta_n| &\leq \sum_{k=0}^{N_0} |a_k| |B_{n-k} - B| + (|a_{N_0+1}| + \cdots + |a_n|)K \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2L+1} (|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{N_0}|) + \frac{\varepsilon}{2K+1} K \\ &= \frac{\varepsilon}{2L+1} L + \frac{\varepsilon}{2K+1} K \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

这说明  $\delta_n \rightarrow 0$ , 因而  $C_n = A_n B + \delta_n \rightarrow AB$ .  $\square$

注. 定理中的绝对收敛的条件不能去掉, 反例就是将  $a_n$  和  $b_n$  均取为交错级数  $(-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ , 此时所得乘积级数是发散的. 但是, 如果乘积级数仍然收敛, 则其和等于两个级数和的乘积. 为了说明这一点, 需要下面的引理.

**引理 8.4.6 (Abel).** 设级数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = C$  收敛, 令

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad x \in [0, 1),$$

则  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = C$ .

**证明.** 级数收敛表明  $\{c_n\}$  有界, 因此当  $x \in [0, 1)$  时,  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  绝对收敛. 记

$$C_{-1} = 0, \quad C_n = \sum_{k=0}^n c_k, \quad n \geq 0.$$

则有

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n c_k x^k &= \sum_{k=0}^n (C_k - C_{k-1}) x^k \\ &= \sum_{k=0}^n C_k x^k - x \sum_{k=0}^{n-1} C_k x^k \\ &= C_n x^n + (1-x) \sum_{k=0}^{n-1} C_k x^k \\ &= C_n x^n + C(1-x^n) + (1-x) \sum_{k=0}^{n-1} (C_k - C) x^k. \end{aligned}$$

在上式中令  $n \rightarrow \infty$  就得到

$$f(x) = C + (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} (C_k - C) x^k.$$

因为  $C_k - C \rightarrow 0$ , 故任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N$ , 当  $k > N$  时

$$|C_k - C| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

令  $M = \sum_{k=0}^N |C_k - C|$ , 则有估计

$$|f(x) - C| \leq M(1-x) + (1-x) \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2}\varepsilon x^k \leq M(1-x) + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

因此, 当  $0 < 1-x < \frac{\varepsilon}{2M+1}$  时,

$$|f(x) - C| \leq M \frac{\varepsilon}{2M+1} + \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon.$$

这说明  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = C$ . □

**定理 8.4.7 (Abel).** 设级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  以及它们的乘积  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  均收敛, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

**证明.** 当  $x \in [0, 1)$  时, 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  和  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  绝对收敛, 它们的乘积级数为  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ . 根据 Cauchy 定理, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right).$$

令  $x \rightarrow 1^-$ , 由上述 Abel 引理即得欲证结论. □

**例 8.4.2.**  $\ln 2$  的级数展开的乘积.

我们已经得到  $\ln 2$  的如下展开

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1},$$

因此其 Cauchy 乘积为

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{i+j=n} \frac{1}{(i+1)(j+1)} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+2} \sum_{i+j=n} \left( \frac{1}{i+1} + \frac{1}{j+1} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n+2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n+1} \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$



不难验证数列  $c_n = \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$  单调递减趋于零, 因此上述乘积级数收敛, 从而得到了下面的等式

$$\frac{1}{2}(\ln 2)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right).$$

**例 8.4.3.** 指数函数  $e^x$  的级数定义.

假设我们事先不知道指数函数的级数展开, 先定义函数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

则  $f(0) = 1$ , 且

$$f(x)f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} \frac{x^i}{i!} \frac{y^j}{j!},$$

利用二项式展开, 有

$$\sum_{i+j=n} \frac{x^i}{i!} \frac{y^j}{j!} = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n C_n^i x^i y^{n-i} = \frac{(x+y)^n}{n!},$$

代入前式就得

$$f(x)f(y) = f(x+y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

这个连续函数的方程的解必形如  $f(x) = a^x$ , 而  $a = f(1) = e$ . 即用级数定义了指数函数  $e^x$ .

三角函数  $\sin x$  和  $\cos x$  也可以这么定义. □

### §8.4.3 乘积级数

我们将级数定义中的加法运算改为乘积运算, 就可以得到一种新的级数, 它们的性质与加法级数的性质十分类似. 为此, 设

$$p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots$$

是一列实数, 我们将形式积

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n \cdots$$

称为无穷乘积. 记

$$P_n = \prod_{k=1}^n p_k, \quad n \geq 1$$

称为部分乘积. 如果数列  $\{P_n\}$  的极限存在, 且极限为有限或为正无穷, 或为负无穷, 则此极限称为无穷乘积的值, 记为

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n.$$

当极限为有限且非零时, 称无穷乘积是收敛的, 否则就称它是发散的.

如果某个  $p_n$  为零, 则显然无穷乘积为零. 下面我们假设  $p_n$  均为非零实数. 设无穷乘积  $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$  收敛, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = P/P = 1,$$

特别地, 当  $n$  充分大时, 必有  $p_n > 0$ . 因为去掉有限项后不影响敛散性, 因此下面进一步假设  $p_n > 0, \forall n \geq 1$ .

由于

$$P_n = \prod_{k=1}^n p_k = e^{\sum_{k=1}^n \ln p_k},$$

因此, 我们可以将无穷乘积化为无穷级数加以讨论, 我们有

**命题 8.4.8.** 设  $p_n > 0, \forall n \geq 1$ . 则

(1) 无穷乘积  $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$  收敛当且仅当级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$  收敛, 且

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n = e^{\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n};$$

(2) 记  $p_n = 1 + a_n$ . 如果  $n$  充分大时  $a_n > 0$  (或  $a_n < 0$ ), 则无穷乘积  $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$  收敛当且仅当级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;

(3) 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  均收敛, 则无穷乘积  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  也收敛.

**证明.** (1) 是显然的. (2) 只要利用

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + a_n)}{a_n} = 1$$

以及数项级数的比较判别法即可. (3) 则是利用 ( $a_n$  不为零时)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[a_n - \ln(1 + a_n)]}{a_n^2} = \frac{1}{2}$$

以及 (1). □

例 8.4.4. Wallis 公式的乘积表示.

我们在第六章第三节中得到了如下 Wallis 公式

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n+1},$$

它可以改写为

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \right),$$

或

$$\frac{\pi}{4} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n(2n+2)}{(2n+1)^2}.$$

例 8.4.5. Riemann-Zeta 函数的乘积表示.

设  $\{p_n\}$  为素数全体, 则由

$$\frac{1}{1-p_n^{-s}} = 1 + \frac{1}{p_n^s} + \frac{1}{p_n^{2s}} + \cdots + \frac{1}{p_n^{ms}} + \cdots$$

以及整数的因子分解定理不难看到

$$(1-2^{-s})^{-1}(1-3^{-s})^{-1} \cdots (1-p_n^{-s})^{-1} \cdots = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} + \cdots$$

即

$$\zeta(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{1}{p_n^s} \right)^{-1}.$$

例 8.4.6. 双曲正弦函数  $\sinh x$  的乘积表示.

按照定义, 有

$$e^x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sinh x + \cosh x,$$

因此

$$\begin{aligned} e^{(2n+1)x} &= (\sinh x + \cosh x)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k (\cosh x)^k (\sinh x)^{2n+1-k} \\ &= \sum_{l=0}^n C_{2n+1}^{2l} (\cosh x)^{2l} (\sinh x)^{2n+1-2l} + \sum_{l=0}^n C_{2n+1}^{2l+1} (\cosh x)^{2l+1} (\sinh x)^{2n-2l}, \end{aligned}$$

利用等式  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$  并考虑函数的奇偶分解, 我们就得到等式

$$\sinh(2n+1)x = \sinh x \sum_{l=0}^n C_{2n+1}^{2l} (\sinh^2 x + 1)^l (\sinh^2 x)^{n-l}.$$

同理, 如果利用  $e^{\sqrt{-1}x} = \cos x + \sqrt{-1} \sin x$  将可得到

$$\sin(2n+1)x = \sin x \sum_{l=0}^n C_{2n+1}^{2l} (1 - \sin^2 x)^l (-\sin^2 x)^{n-l}.$$

由此可知, 多项式  $P(y) = \sum_{l=0}^n C_{2n+1}^{2l} (y+1)^l y^{n-l}$  具有下列根

$$-\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

这也是  $P(y)$  的所有不同的根, 因此

$$P(y) = C \prod_{k=1}^n \left(y + \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}\right),$$

其中

$$C = \sum_{l=0}^n C_{2n+1}^{2l} = \sum_{l=0}^n C_{2n+1}^{2n+1-2l} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k = 2^{2n},$$

进而通过比较常数项还可以得到等式

$$2n+1 = 2^{2n} \prod_{k=1}^n \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}.$$

总结一下, 我们有

$$\sinh(2n+1)x = 2^{2n} \sinh x \prod_{k=1}^n \left(\sinh^2 x + \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}\right),$$

或改写为

$$\sinh x = (2n+1) \sinh \frac{x}{2n+1} \prod_{k=1}^n \left(\frac{\sinh^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}} + 1\right),$$

在上式中令  $n \rightarrow \infty$ , 得

$$\sinh x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{n^2 \pi^2} + 1\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (8.3)$$

类似地可以得到

$$\cosh x = \prod_{k=1}^{\infty} \left[\frac{x^2}{\left(\frac{2k-1}{2}\pi\right)^2} + 1\right], \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (8.4)$$

#### §8.4.4 级数的重排

现在我们讨论将级数的各个项重新排列次序后得到的新的级数的收敛和发散性质. 首先, 如果  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  为正项级数, 则由基本判别法不难看出, 将它的各项重新

排列后不会影响其敛散性, 如果收敛的话重排也不改变级数的和. 对于一般的级数, 如果  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  绝对收敛, 则重排后的级数也绝对收敛, 且其和不变. 这可以从等式

$$a_n = \frac{a_n + |a_n|}{2} - \frac{|a_n| - a_n}{2} = a_n^+ - a_n^-$$

以及正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$  的收敛性推出.

如果  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  条件收敛, 则级数重排后即使收敛, 它的和也可能变化.

**例 8.4.7.**  $\ln 2$  的级数表示的重排.

将级数

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

重排为

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \cdots,$$

则它的和为

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \cdots = \frac{1}{2} \ln 2.$$

实际上, 对于条件收敛的级数, 可以将它重排使得其和为任意实数.

**定理 8.4.9 (Riemann).** 如果  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  为条件收敛的级数, 则可以将它重排为一个收敛级数, 使得重排后的级数和为任意指定的实数.

**证明.** 设  $\xi \in \mathbb{R}$ , 我们将找到  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的一个重排, 使得它的和为  $\xi$ . 首先我们注意到, 如果  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  条件收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  发散, 由  $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$ ,  $a_n = a_n^+ - a_n^-$  即知, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$  均发散到  $+\infty$ , 这两个级数的部分和为别记为  $S_n^+$  和  $S_n^-$ . 因为当  $n$  充分大时  $S_n^+ > \xi$ , 故可取最小的正整数  $m_1$ , 使得

$$S_{m_1}^+ > \xi,$$

此时成立

$$\xi \geq S_{m_1}^+ - a_{m_1}^+.$$

因为  $n$  充分大时,  $S_{m_1}^+ - S_n^- < \xi$ , 故可取最小的正整数  $n_1$ , 使得

$$S_{m_1}^+ - S_{n_1}^- < \xi,$$

同理有

$$\xi \leq S_{m_1}^+ - S_{n_1}^- + a_{n_1}^-.$$

下面再取最小的正整数  $m_2$ , 使得

$$S_{m_2}^+ - S_{n_1}^- > \xi \geq S_{m_2}^+ - S_{n_1}^- - a_{m_2}^+,$$

以及最小的正整数  $n_2$ , 使得

$$S_{m_2}^+ - S_{n_2}^- < \xi \leq S_{m_2}^+ - S_{n_2}^- + a_{n_2}^-.$$

如此继续下去, 我们得到递增数列  $m_1 < m_2 < \cdots$  和  $n_1 < n_2 < \cdots$ , 使得

$$S_{m_k}^+ - S_{n_{k-1}}^- > \xi \geq S_{m_k}^+ - S_{n_{k-1}}^- - a_{m_k}^+$$

和

$$S_{m_k}^+ - S_{n_k}^- < \xi \leq S_{m_k}^+ - S_{n_k}^- + a_{n_k}^+$$

对任意  $k$  均成立. 由  $a_n \rightarrow 0$  即知, 下面的级数

$$\begin{aligned} & a_1^+ + \cdots + a_{m_1}^+ - a_1^- - \cdots - a_{n_1}^- + a_{m_1+1}^+ + \cdots + a_{m_2}^+ \\ & - a_{n_1+1}^- - \cdots - a_{n_2}^- + a_{m_2+1}^+ + \cdots + a_{m_3}^+ - a_{n_2+1}^- - \cdots \end{aligned}$$

收敛到  $\xi$ . 注意  $a_n^+$  和  $a_n^-$  在这个级数中都依次出现了, 因此它可以看成是原级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的一个重排.  $\square$

注. 如果  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  条件收敛, 则可以将它重排为发散到  $+\infty$  或  $-\infty$  的级数, 这个结论请读者自行证明.

#### 习题 8.4

1. 设  $\lim_{i \rightarrow \infty} n(i) = +\infty$ , 且当  $i$  充分大时,  $|a_{ij}| \leq A_j$ ,  $j = 1, 2, \cdots, n(i)$ . 如果  $\sum_{j=1}^{\infty} A_j$  收敛, 则当  $\lim_{i \rightarrow \infty} a_{ij}$  存在时, 有

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n(i)} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{i \rightarrow \infty} a_{ij}.$$

2. 设  $\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| = A_i$ ,  $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$  收敛, 则下列等式有意义:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.$$

3. 证明 Riemann-Zeta 函数满足下列等式

$$\sum_{n=2}^{\infty} [\zeta(n) - 1] = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} [\zeta(2n) - 1] = \frac{3}{4}.$$

4. 设  $\sum_{n=2}^{\infty} 2^{-n}|a_n|$  收敛, 记  $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$ ,  $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ . 则

$$\sum_{n=2}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n [\zeta(n) - 1].$$

5. 证明等式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{n} - \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right] = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \zeta(n).$$

6. 证明等式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right] = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \frac{1}{n} + \ln \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \right] = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\zeta(n) - 1)}{n}.$$

7. 给出关于级数乘积的 Cauchy 定理的证明.

8. 利用级数的乘积证明, 当  $|x| < 1$  时, 有

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n.$$

9. 证明等式

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n+1}\right).$$

10. 证明下列等式

$$\begin{aligned} (1) \quad \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) &= \frac{2}{\pi}; \quad (3) \quad \prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}; \\ (2) \quad \prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^{2^{n-1}}) &= \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

11. 证明, 当  $\alpha > \beta > 0$  时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)} = 0.$$

12. 记  $2 = p_1 < p_2 < \cdots < p_n < \cdots$  为素数全体, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$  是发散的.

## 第九章 函数项级数

在对函数作 Taylor 展开时, 自然就出现了以函数为一般项的无穷级数, 在前一章最后一节中我们实际上也用到了简单的函数项级数, 下面我们就来研究一般的函数项级数的敛散性. 这种对于一系列函数的无穷求和也可以看成是关于函数的运算, 跟积分运算一样, 它提供了构造非初等函数的手段.

### §9.1 一致收敛

设  $I$  为区间,  $\{g_n(x)\}$  为  $I$  中定义的一系列函数. 如果存在  $I$  中的函数  $g(x)$  使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x_0) = g(x_0), \quad \forall x_0 \in I,$$

则称函数列  $\{g_n\}$  收敛于  $g$ , 记为  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = g$  或  $g_n \rightarrow g (n \rightarrow \infty)$ .

**例 9.1.1.** 考虑  $g_n(x) = x^n$ ,  $x \in (0, 1)$ . 因为对任意固定的  $x_0 \in (0, 1)$ , 均有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_0^n = 0,$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = 0$ . □

**定义 9.1.1** (一致收敛). 如果任给  $\varepsilon > 0$ , 均存在与  $x \in I$  无关的正整数  $N = N(\varepsilon)$ , 使得当  $n > N$  时

$$|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in I, \quad (*)$$

则称函数列  $\{g_n\}$  在  $I$  中一致收敛于  $g$ , 记为  $g_n \rightrightarrows g$ .

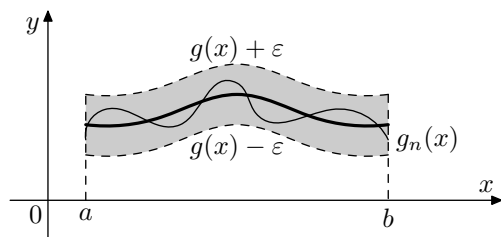


图 9.1 一致收敛

显然, 一致收敛的函数列是收敛的. 一致性体现在  $(*)$  式对于充分大的  $n$  和任意  $x$  均成立. 例 9.1.1 中  $\{g_n\}$  不是一致收敛的 (为什么?).

**例 9.1.2.** 设  $g_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ ,  $x \in [-1, 1]$ . 讨论  $\{g_n\}$  的收敛性.



解. 当  $0 < |x| \leq 1$  时

$$|g_n(x) - 0| = \frac{|x|}{|1 + n^2 x^2|} \leq \frac{|x|}{2n|x|} = \frac{1}{2n},$$

上式对  $x = 0$  也成立. 因此  $\{g_n\}$  在  $[-1, 1]$  中一致收敛于 0.  $\square$

**定理 9.1.1.** 设  $\{g_n\}$  在区间  $I$  中一致收敛于  $g$ . 如果  $g_n$  均为连续函数, 则  $g$  也是连续函数.

**证明.** 任取  $x_0 \in I$ , 我们要证明  $g$  在  $x_0$  处连续. 任给  $\varepsilon > 0$ , 由一致收敛定义, 存在正整数  $N = N(\varepsilon)$ , 使得  $n > N$  时

$$|g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x \in I.$$

取定  $n_0 = N + 1$ , 由于  $g_{n_0}$  在  $I$  中连续, 故存在  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  使得

$$|g_{n_0}(x) - g_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I.$$

因此

$$\begin{aligned} |g(x) - g(x_0)| &\leq |g(x) - g_{n_0}(x)| + |g_{n_0}(x) - g_{n_0}(x_0)| \\ &\quad + |g_{n_0}(x_0) - g(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I. \end{aligned}$$

这说明  $g$  在  $x_0$  处是连续的.  $\square$

注. 我们实际上证明了, 如果  $\{g_n\}$  一致收敛于  $g$ , 且每个函数  $g_n$  均在  $x_0$  处连续, 则  $g$  也在  $x_0$  处连续, 这也可以表示为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} g_n(x),$$

一致收敛在这里保证了求极限次序的可交换性. 一般地, 我们有

**定理 9.1.2. (\*)** 设  $\{g_n\}$  在  $x_0 \in I$  的一个空心邻域中一致收敛于  $g$ . 如果

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g_n(x) = a_n, \quad \forall n \geq 1,$$

则极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  以及  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  均存在, 且这两个极限相等, 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} g_n(x).$$

**证明.** 由  $\{g_n\}$  一致收敛到  $g$  知, 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N_0$ , 当  $n > N_0$  时

$$|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \neq x_0.$$

因此当  $m, n > N_0$  时

$$|g_m(x) - g_n(x)| \leq |g_m(x) - g(x)| + |g(x) - g_n(x)| < 2\varepsilon,$$

在上式中令  $x \rightarrow x_0$ , 得

$$|a_m - a_n| \leq 2\varepsilon, \quad \forall m, n > N_0.$$

由 Cauchy 准则知  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$  存在.

下证  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$ . 任给  $\varepsilon > 0$ , 由刚才的证明, 存在  $N$ , 使得

$$|a_N - A| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |g(x) - g_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x \neq x_0.$$

因为  $\lim_{x \rightarrow x_0} g_N(x) = a_N$ , 故存在  $\delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时

$$|g_N(x) - a_N| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

因此, 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时

$$|g(x) - A| \leq |g(x) - g_N(x)| + |g_N(x) - a_N| + |a_N - A| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

即  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$ . □

注. 这个定理和前一定理所用的论证方法称为  $\frac{\varepsilon}{3}$ -法, 这种方法在前面的章节中也曾用过.

由一致收敛定义可得如下判别法, 它不涉及极限  $g$  的具体形式:

**(Cauchy 准则)** 定义在  $I$  中的函数列  $\{g_n\}$  一致收敛当且仅当对任意的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N = N(\varepsilon)$ , 使得当  $m, n > N$  时

$$|g_m(x) - g_n(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in I.$$

注意, 当  $\{g_n\}$  满足上式时, 对于每一个固定的  $x_0 \in I$ ,  $\{g_n(x_0)\}$  都是 Cauchy 数列, 因此收敛, 其极限记为  $g(x_0)$ . 这样就得到了极限函数  $g$ , 并且  $\{g_n\}$  一致收敛于  $g$  (为什么?).

现在, 设  $\{f_n(x)\}$  为一列函数, 考虑形式和  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ , 这种形式和称为函数项级数. 如果部分和  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$  收敛, 则称该函数项级数收敛; 如果  $S_n(x)$  一致收敛, 则称该函数项级数一致收敛. 根据上面的讨论, 我们有:

- (1) 如果  $f_n$  均为连续函数,  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  一致收敛于  $S(x)$ , 则  $S(x)$  也是连续函数;
- (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  一致收敛当且仅当任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N = N(\varepsilon)$ , 使得  $n > N$  时


$$|f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in I, \quad \forall p \geq 1.$$

**例 9.1.3.** 讨论  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$  在  $[0, 2\pi]$  中的收敛性质.

**解.** 在前一章第三节已用 Dirichlet 判别法说明对任意  $x \in [0, 2\pi]$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$  均收敛. 下面说明它不是一致收敛的. 事实上, 取  $x_n = \frac{\pi}{4n}$ , 则

$$\begin{aligned} |S_{2n}(x_n) - S_n(x_n)| &= \left| \frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{4n}}{n+1} + \cdots + \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{2n} \right| \\ &\geq n \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

由 Cauchy 准则知收敛不是一致的.  $\square$

 下面的两个结果是前一章最后一节数项级数相应结果的推论, 我们省略证明.

**定理 9.1.3.** 设  $\{f_{mn}(x)\}$  是依赖于指标  $m, n$  的一族函数, 对于每个  $n \geq 1$ , 均有  $\lim_{m \rightarrow \infty} f_{mn}(x) = f_n(x)$ , 且对任意  $m \geq 1$ ,  $|f_{mn}(x)| \leq F_n(x)$ , 函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  也收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{m \rightarrow \infty} f_{mn}(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}(x).$$

**定理 9.1.4.** 设  $\sum_{m=1}^{\infty} |f_{mn}(x)| \leq F_n(x)$  ( $n \geq 1$ ),  $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)$  收敛, 则

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f_{mn}(x).$$

函数项级数的收敛判别法可从数项级数的收敛判别法得到. 例如:

(1) (Weierstrass) 如果  $|f_n(x)| \leq M_n$ , 而正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  一致收敛. 这是因为

$$|f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| \leq M_{n+1} + \cdots + M_{n+p},$$

然后利用 Cauchy 准则即可.

(2) (Dirichlet) 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$  的部分和  $B_n(x) = \sum_{k=1}^n b_k(x)$  一致有界, 即存在  $M > 0$ , 使得

$$|B_n(x)| \leq M, \quad \forall x \in I, \quad \forall n \geq 1.$$

并且对每个  $x \in I$ ,  $\{a_n(x)\}$  关于  $n$  单调,  $a_n(x) \rightarrow 0$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$  在  $I$  中一致收敛. 其证明只要照搬数项级数中的相应证明即可.

(3) (Abel) 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$  在  $I$  中一致收敛, 且对每个  $x \in I$ ,  $\{a_n(x)\}$  关于  $n$  单调, 且在  $I$  中一致有界, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$  在  $I$  中一致收敛. 其证明仍然是 Abel 变换的运用, 然后再利用 Cauchy 准则:

$$|a_{n+1}(x)b_{n+1}(x) + \cdots + a_{n+p}(x)b_{n+p}(x)| \leq 3 \sup |a_n| \cdot \sup_{1 \leq k \leq p} |b_{n+1}(x) + \cdots + b_{n+k}(x)|.$$

**例 9.1.4.** 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$  在  $x \in [0, 1]$  中一致收敛.

**证明.** 取  $a_n(x) = x^n$ ,  $b_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ .  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$  关于  $x$  一致收敛. 而  $|a_n(x)| \leq 1, \forall x \in [0, 1]$ . 对固定的  $x$ ,  $a_n(x) = x^n$  关于  $n$  单调. 故由 Abel 判别法知原级数一致收敛.  $\square$

**命题 9.1.5.** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$  一致收敛,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . 则函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda f_n(x) + \mu g_n(x))$  也一致收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda f_n(x) + \mu g_n(x)) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) + \mu \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x).$$

**证明.** 用一致收敛的定义即可.  $\square$

**定理 9.1.6 (Dini).** 设  $g_n(x)$  为  $[a, b]$  中非负连续函数, 且对每个  $x \in [a, b]$ ,  $g_n(x)$  关于  $n$  单调递减趋于 0, 则  $g_n \Rightarrow 0$ .

**证明.** 任给  $\varepsilon > 0$ , 我们要证明存在  $N$ , 使得当  $n > N$  时

$$0 \leq g_n(x) < \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b].$$

即要证  $n$  充分大以后  $A_n = \{x \in [a, b] \mid g_n(x) \geq \varepsilon\}$  为空集. 因为  $g_n$  关于  $n$  单调递减, 因此

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \cdots, \quad (9.1)$$

这说明我们只要证明某一个  $A_n$  是空集即可.

(反证法) 假设  $A_n$  均非空集, 取  $x_n \in A_n$ , 则  $\{x_n\}$  为  $[a, b]$  中的有界点列, 从而存在收敛子列  $\{x_{n_i}\}$ , 设此子列收敛到  $x_0 \in [a, b]$ . 由 (9.1) 知  $A_k \supset A_{n_k} \supset \{x_{n_k}, x_{n_{k+1}}, \cdots\}$ . 因为  $g_k$  在  $x_0$  处连续, 我们有

$$g_k(x_0) = \lim_{k \leq i \rightarrow \infty} g_k(x_{n_i}) \geq \varepsilon.$$

上式对任意  $k \geq 1$  均成立, 这和  $g_n(x_0) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$  相矛盾.  $\square$

**推论 9.1.7.** 设  $f_n(x)$  为非负连续函数, 如果函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  在闭区间中收敛于连续函数  $f$ , 则必一致收敛于  $f$ .

**证明.** 考虑部分和  $S_n(x)$  及连续函数列  $f(x) - S_n(x)$ , 应用 Dini 定理即可.  $\square$

**注.** 注意, 推论中  $f$  的连续性条件是不能去掉的. 例如, 考虑  $[0, 1]$  区间上的函数列  $f_1(x) = 1 - x$ ,  $f_n(x) = x^{n-1} - x^n$  ( $n \geq 2$ ) 即可得到反例.

**例 9.1.5.** Riemann-Zeta 函数的连续性.

当  $s > 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  收敛, 其和  $\zeta(s)$  可以看成  $(1, +\infty)$  中的函数. 虽然函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  在整个区间  $(1, +\infty)$  中不是一致收敛的, 但在任何闭区间  $I \subset (1, +\infty)$  上都是一致收敛的, 因此  $\zeta(s)$  在  $I$  中连续, 从而也是整个定义域  $(1, +\infty)$  中的连续函数.  $\square$

### 习题 9.1

1. 在区间  $[0, 1]$  中递归地定义函数列  $\{f_n\}$  如下:

$$f_1(x) \equiv 1, \quad f_{n+1}(x) = \sqrt{x f_n(x)}, \quad n \geq 1.$$

证明  $\{f_n\}$  一致收敛到  $[0, 1]$  中的一个连续函数.

2. 设  $f_1(x)$  为  $[0, a]$  上的可积函数, 递归地定义函数列  $\{f_n\}$  如下:

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt, \quad n \geq 1.$$

证明  $\{f_n\}$  一致收敛到 0.

3. 设  $|f_n(x)| \leq g_n(x)$ , 且  $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$  一致收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  也一致收敛.

4. 判断下列函数项级数的一致收敛性:

$$\begin{array}{ll} (1) \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}, & x \in (0, +\infty); \\ (2) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{1}{3^n x}\right), & x \in (0, +\infty); \\ (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}, & x \in (-\infty, +\infty); \\ (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}, & x \in [0, +\infty); \\ (5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+nx)^2}, & x \in (0, +\infty); \\ (6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^3 x^2}, & x \in (-\infty, +\infty). \end{array}$$

5. 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛. 证明, 函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}, \quad x \in [0, +\infty),$$

一致收敛.

6. 设  $f(x)$  是定义在  $[a, b]$  上的函数. 对  $n \geq 1$ , 令

$$f_n(x) = \frac{[nf(x)]}{n}, \quad x \in [a, b].$$

证明  $f_n(x)$  一致收敛到  $f(x)$ .

7. 设  $f_n(x)$  在  $I$  中一致收敛到  $f(x)$ . 如果  $f_n(x)$  均在  $I$  中一致连续, 则  $f(x)$  也在  $I$  中一致连续.

8. 设  $f_n(x)$  在  $I$  中一致收敛到  $f(x)$ . 如果  $g(x)$  是  $I$  中的有界函数, 则  $f_n(x)g(x)$  在  $I$  中一致收敛到  $f(x)g(x)$ .

9. 记  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^2x^2}$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$ . 求极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .

10. 设  $f_n(x)$  为  $[a, b]$  中的连续函数列. 如果  $f_n(x)$  一致收敛到正函数  $f(x)$ , 则存在  $N$ , 当  $n > N$  时  $f_n(x)$  也是正函数, 且  $\frac{1}{f_n(x)}$  一致收敛到  $\frac{1}{f(x)}$ . 如果把闭区间  $[a, b]$  换成开区间  $(a, b)$ , 结论还成立吗?

11. 设  $f_n(x)$ ,  $g_n(x)$  和  $h_n(x)$  是定义在  $I$  中的函数, 且

$$f_n(x) \leq g_n(x) \leq h_n(x), \quad x \in I.$$

如果  $f_n(x)$  和  $h_n(x)$  一致收敛到  $f(x)$ , 则  $g_n(x)$  也一致收敛到  $f(x)$ .

12. 设  $f_n(x)$ ,  $g_n(x)$  分别在  $I$  中一致收敛到  $f(x)$ ,  $g(x)$ . 如果每一个  $f_n(x)$ ,  $g_n(x)$  均为有界函数, 则  $f(x)$ ,  $g(x)$  也是有界函数, 且  $f_n(x)g_n(x)$  在  $I$  中一致收敛到  $f(x)g(x)$ .

13. 设  $\{P_n(x)\}$  为一列多项式, 证明, 如果  $P_n(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  中一致收敛到函数  $f(x)$ , 则  $f(x)$  也是多项式. (提示: 考虑多项式的差.)

14. (\*) 设函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  在  $[a, b]$  中收敛, 其部分和为  $S_n(x)$ . 如果存在常数  $M$ , 使得

$$|S'_n(x)| \leq M, \quad \forall x \in [a, b], \quad n \geq 1,$$

则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  在  $[a, b]$  中一致收敛.

## §9.2 求和与求导、积分的可交换性

给定收敛的函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$ , 下面我们关心的问题是能否逐项求积分以及逐项求导, 这也依赖于一致收敛性.

**定理 9.2.1.** (1) 设  $\{g_n\}$  在  $[a, b]$  中一致收敛于  $g$ . 如果  $g_n$  均为 Riemann 可积函数, 则  $g$  也是 Riemann 可积函数, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

(2) 设  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  在  $[a, b]$  中一致收敛于  $f$ . 如果  $f_n$  均为 Riemann 可积函数, 则  $f$  也是 Riemann 可积函数, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

**证明.** 只要证明 (1) 即可. 先来证明  $g$  的可积性. 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N = N(\varepsilon)$ , 使得  $n \geq N$  时

$$|g_n(x) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4(b-a)}, \quad \forall x \in [a, b].$$

因为  $g_N$  是可积函数, 故存在  $[a, b]$  的分割  $\pi$ , 使得

$$\sum_{\pi} \omega_i(g_N) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}.$$

对于分割  $\pi$  的每一个小区间  $[x_{i-1}, x_i]$ , 有

$$\omega_i(g) \leq \omega_i(g_N) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

因此

$$\sum_{\pi} \omega_i(g) \Delta x_i \leq \sum_{\pi} \omega_i(g_N) \Delta x_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

由可积函数的充要条件即知  $g$  是  $[a, b]$  上的可积函数.

现在, 当  $n \geq N$  时, 我们有估计

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b g_n(x) dx - \int_a^b g(x) dx \right| &= \left| \int_a^b (g_n(x) - g(x)) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |g_n(x) - g(x)| dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

这说明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

这就证明了定理的结论.  $\square$

注. (i) 这个定理说的是极限或求和与积分运算次序的可交换性. 一般地, 定理中的一致收敛的条件是不能去掉的. 但对于一致有界的函数列, 有如下控制收敛定理: 设  $g_n(x)$ ,  $g(x)$  均为  $[a, b]$  上的可积函数,  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x)$ . 如果存在常数  $M$ , 使得

$$|g_n(x)| \leq M, \quad \forall x \in [a, b], n \geq 1,$$

则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

(ii) 从定理的证明还可以看出, (2) 中函数项级数还满足下面的一致收敛性

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t) dt \Rightarrow \int_a^x f(t) dt.$$

**定理 9.2.2.** 设  $\{f_n(x)\}$  在  $[a, b]$  中连续可微, 且

- (1)  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)$  收敛;
- (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$  一致收敛于  $g(x)$ ;

则  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  在  $[a, b]$  中一致收敛, 其和函数可导, 且

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = g(x).$$

**证明.** 由微积分基本公式,

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt.$$

由条件 (2) 和上面的注记 (ii),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f'_n(t) dt \Rightarrow \int_a^x g(t) dt.$$

再由条件 (1) 即知

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a) + \int_a^x g(t) dt.$$

即  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  在  $[a, b]$  中一致收敛, 其和函数可导, 且导数为  $g(x)$ .  $\square$

注. 条件 (1) 中点  $a$  可换成区间中其它任何一点, 并且连续可微的条件可以适当减弱, 参见下面的结果.

**定理 9.2.3.** (\*) 设  $\{f_n(x)\}$  为  $[a, b]$  中一列可微函数,  $c \in [a, b]$ . 如果  $\{f_n(c)\}$  收敛,  $f'_n(x)$  一致收敛到  $g(x)$ , 则  $f_n(x)$  一致收敛于可微函数  $f(x)$ , 且  $f'(x) = g$ .



**证明.** 首先, 由微分中值定理, 我们有

$$\begin{aligned} |[f_n(x) - f_n(c)] - [f_m(x) - f_m(c)]| &= |[f_n(x) - f_m(x)] - [f_n(c) - f_m(c)]| \\ &= |[f'_n(\xi) - f'_m(\xi)]||x - c| \Rightarrow 0, \end{aligned}$$

这说明  $\{f_n(x) - f_n(c)\}$  一致收敛, 从而  $f_n(x)$  一致收敛到一个函数  $f(x)$ .

其次, 任取  $x_0 \in [a, b]$ , 令

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}, & x \neq x_0, \\ f'_n(x_0), & x = x_0. \end{cases}$$

则  $g_n(x)$  为  $[a, b]$  中的连续函数, 且类似于刚才的论证, 由微分中值定理, 有

$$|g_n(x) - g_m(x)| = |f'_n(\xi) - f'_m(\xi)| \Rightarrow 0,$$

这说明  $g_n(x)$  一致收敛到连续函数

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, & x \neq x_0, \\ g(x_0), & x = x_0. \end{cases}$$

特别地,  $f(x)$  在  $x_0$  处可导, 导数为  $g(x_0)$ . □

下面我们来讨论一些应用. 反复利用等式

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi+x}{2}} \right]$$

可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 x} &= \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi+x}{2}} \right] \\ &= \frac{1}{4^2} \left[ \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{4}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{2\pi+x}{4}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi+x}{4}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{3\pi+x}{4}} \right] \\ &= \dots \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi+x}{2^n}}. \end{aligned}$$

对  $2^{n-1} \leq k \leq 2^n - 1$  再利用

$$\sin^2 \frac{k\pi + x}{2^n} = \sin^2 \left( \frac{k\pi + x - 2^n\pi}{2^n} + \pi \right) = \sin^2 \frac{(k - 2^n)\pi + x}{2^n}$$

可以将前式改写为

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 x} &= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=-2^{n-1}}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{x+k\pi}{2^n}} \\ &= E_n + \sum_{k=-2^{n-1}}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{(x + k\pi)^2}, \end{aligned}$$

其中

$$E_n = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=-2^{n-1}}^{2^{n-1}-1} \left[ \frac{1}{\sin^2 \frac{x+k\pi}{2^n}} - \frac{1}{\left(\frac{x+k\pi}{2^n}\right)^2} \right].$$

利用不等式

$$0 < \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = 1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} < 1, \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

就得到如下估计

$$0 < E_n < \frac{1}{2^{2n}} 2^n = \frac{1}{2^n}, \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

令  $n \rightarrow \infty$  就得到下面的等式

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x + k\pi)^2}, \quad \forall x \neq k\pi. \quad (9.2)$$

上式在不包含  $\{k\pi\}$  的任何闭区间上都是一致收敛的, 它也可改写为

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(x + n\pi)^2} + \frac{1}{(x - n\pi)^2} \right], \quad x \neq k\pi. \quad (9.3)$$

特别地, 有

$$\frac{1}{3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^2},$$

因此有

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

当  $x \in (-\pi, \pi)$  时, 对 (9.3) 两边积分, 利用

$$\int_0^x \left( \frac{1}{\sin^2 t} - \frac{1}{t^2} \right) dt = \left( \frac{1}{t} - \frac{\cos t}{\sin t} \right) \Big|_0^x = \frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}$$

得

$$\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{x + n\pi} + \frac{1}{x - n\pi} \right), \quad \forall x \in (-\pi, \pi). \quad (9.4)$$

如果再对上式两边积分就可以得到

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left[ 1 - \left( \frac{x}{n\pi} \right)^2 \right], \quad \forall x \in [-\pi, \pi]. \quad (9.5)$$

这个等式就好像将函数  $\sin x$  作因式分解一样. 特别地, 取  $x = \frac{\pi}{2}$  就得到

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \left[ 1 - \frac{1}{4n^2} \right],$$

这也就是 Wallis 公式的乘积表示.

从等式 (9.4) 出发, 利用

$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \frac{1}{\sin x} = \cot \frac{x}{2} - \cot x$$

还可以得到展开式

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(2n-1)\frac{\pi}{2} - x} - \frac{1}{(2n-1)\frac{\pi}{2} + x} \right], \quad (9.6)$$

以及

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{x + n\pi} + \frac{1}{x - n\pi} \right). \quad (9.7)$$

作为最后这个展开式的应用, 我们再一次来计算广义积分  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  如下:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{n\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi + \frac{1}{2}\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-1)^n \frac{\sin t}{n\pi + t} dt + \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-1)^n \frac{\sin t}{(n+1)\pi - t} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-1)^n \left( \frac{1}{t + n\pi} + \frac{1}{t - n\pi} \right) \sin t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{t + n\pi} + \frac{1}{t - n\pi} \right) \sin t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right) \sin t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

在计算过程中, 我们用到了一致收敛级数的求和与积分运算次序的可交换性.  $\square$

## 习题 9.2

### 1. 证明函数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$$

在  $(-\infty, +\infty)$  中连续可微.

2. 设  $\sum_{n=1}^{\infty} na_n$  绝对收敛, 证明  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$  在  $(-\infty, +\infty)$  中连续可微, 且

$$f'(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} na_n \sin nx, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

3. 证明函数

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

在  $(1, +\infty)$  中任意次可微.

4. 如果连续函数列  $\{f_n(x)\}$  在  $[a, b]$  中一致收敛于  $f(x)$ , 则对区间  $[a, b]$  中的任意收敛点列  $\{x_n\}$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n).$$

5. 计算下列积分

$$(1) \int_{\ln 2}^{\ln 5} \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx} dx, \quad (2) \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 nx}{n(n+1)} dx.$$

6. 研究函数  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2 + x^2}$  的可微性质.

7. 设  $\{f_n(x)\}$  在  $[a, b]$  中可微, 且

$$(1) \text{ 存在 } c \in [a, b], \text{ 使得 } \sum_{n=1}^{\infty} f_n(c) \text{ 收敛};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) \text{ 一致收敛于 } g(x);$$

则  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  在  $[a, b]$  中一致收敛, 且

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = g(x).$$

8. 设  $f_n(x)$  在  $[a, b]$  中一致收敛到  $f(x)$ . 如果每个  $f_n(x)$  都有原函数, 则  $f(x)$  也有原函数.

9. (\*) 通过在展开式 (9.2) 中取  $x = \frac{\pi}{2}$ , 求  $\zeta(2)$  的值.

10. (\*) 说明 (9.5) 式对任意  $x$  均成立, 并证明下面的乘积公式

$$\cos x = \prod_{n=1}^{\infty} \left[ 1 - \frac{x^2}{(\frac{2n-1}{2}\pi)^2} \right].$$

11. (\*) 证明, 如果  $na_n$  为单调收敛于 0 的数列, 则函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$  在  $(-\infty, \infty)$  中一致收敛.

## §9.3 幂级数

形如  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$  ( $a_n \in \mathbb{R}$ ) 的函数项级数称为**幂级数**, 在第五章 Taylor 展开那一节中我们已遇到过这样的级数. 为了简单起见, 我们讨论  $x_0 = 0$  的情形, 一般情形作变量代换  $t = x - x_0$  即可.

## §9.3.1 收敛半径及基本性质

**引理 9.3.1** (Abel). 如果幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $x = x_1$  ( $x_1 \neq 0$ ) 处收敛, 则它在区间  $|x| < |x_1|$  中绝对收敛; 因此, 幂级数在  $x = x_2$  处发散意味着在  $|x| > |x_2|$  中均发散.

**证明.** 设  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$  收敛, 则存在  $M > 0$  使得

$$|a_n x_1^n| \leq M, \quad \forall n \geq 1,$$

这说明

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_1^n| \cdot \left| \frac{x}{x_1} \right|^n \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x}{x_1} \right|^n,$$

因此当  $|x| < |x_1|$  时,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  绝对收敛. □

**注.** 从证明可以看出, 如果  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $x = x_1$  ( $x_1 \neq 0$ ) 处收敛, 则对任何闭区间  $I \subset (-|x_1|, |x_1|)$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $I$  中都是一致收敛的.

**定理 9.3.2** (Cauchy-Hadamard). 对幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , 记

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

则

- (1)  $\rho = 0$  时, 级数在  $(-\infty, \infty)$  中绝对收敛;
- (2)  $\rho = +\infty$  时, 级数仅在  $x = 0$  处收敛;
- (3)  $0 < \rho < +\infty$  时, 级数在  $(-\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho})$  中绝对收敛, 在  $[-\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho}]$  之外发散. 此

时, 称  $\frac{1}{\rho}$  为收敛半径.

**证明.** 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \rho |x|,$$

由数项级数的 Cauchy 判别法即可得定理结论的证明. 以 (3) 的后半部分为例 (反证法): 设  $x_1 \notin [-\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho}]$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_1^n$  收敛, 则存在  $M > 0$  使得

$$|a_n x_1^n| \leq M, \quad \forall n \geq 1.$$

从而有

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M|x_1|^{-n}} = |x_1|^{-1} < \rho.$$

这就导出了矛盾! □

注. (1) 在  $x = \pm \rho^{-1}$  处级数的收敛性必须视情况具体讨论.

(2)  $0 < \rho < +\infty$  时, 对任意闭区间  $I \subset (-\rho^{-1}, \rho^{-1})$ , 幂级数均在  $I$  中一致收敛.

**例 9.3.1.** 几何级数  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ .

此级数的系数  $a_n = 1$ , 故  $\rho = 1$ . 在  $x = \pm 1$  处级数显然发散. □

**例 9.3.2.** 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ .

此级数的系数  $a_n = \frac{1}{n}$ ,  $\rho = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$ . 级数在  $x = 1$  处发散; 在  $x = -1$  处收敛 (交错级数). □

**例 9.3.3.** 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$  和  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  具有相同的收敛半径.

事实上, 如果

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho,$$

则

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{(n+1)|a_{n+1}|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{n+1}|} = \rho,$$

因此两个级数的收敛半径相同. □

**定理 9.3.3.** 设幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  收敛半径为  $R$ , 则  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $(-R, R)$  中任意次可微, 且

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}.$$

**证明.** 以  $k=1$  为例. 首先, 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$  的收敛半径仍为  $R$ , 故它在闭区间  $I \subset (-R, R)$  中一致收敛. 由定理 9.2.2,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $I$  中可微, 且

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

$S(x)$  的高阶可微性的证明是完全类似的. □

特别地,  $S^{(n)}(0) = n! a_n$ , 这说明和函数  $S(x)$  的 Taylor 展开就是该幂级数本身.

**例 9.3.4.** 求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$  之和.

解. 在  $(-1, 1)$  中, 有

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x},$$

由 Newton-Leibniz 公式, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-x), \quad \forall x \in (-1, 1).$$

注意到上式在  $x = -1$  处也成立, 这不是偶然的现象, 在第八章第四节中讨论数项级数的乘积时已经讨论过一个特殊情形, 现在我們再看下一般的情形, 其证明其实本质上是一样的.

**定理 9.3.4** (Abel 连续性定理). 设幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径为  $R$  ( $0 < R < +\infty$ ). 如果  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$  收敛, 则

$$\lim_{x \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n;$$

如果  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$  收敛, 则

$$\lim_{x \rightarrow -R^+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n.$$

**证明.** 如果  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$  收敛, 则考虑

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \cdot \left(\frac{x}{R}\right)^n,$$

在  $[0, R]$  上,  $\left|\left(\frac{x}{R}\right)^n\right| \leq 1$ , 且  $\left(\frac{x}{R}\right)^n$  关于  $n$  单调. 由 Abel 判别法知  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $[0, R]$  中一致收敛, 其和函数  $S(x)$  在  $[0, R]$  中连续, 因此

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = S(R) = \lim_{x \rightarrow R^-} S(x) = \lim_{x \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

关于  $-R$  的证明完全类似 (或考虑  $\tilde{a}_n = (-1)^n \cdot a_n$ ). □

**例 9.3.5.** 求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$  之和.

**解.** 考虑幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$ , 其收敛半径为 1, 且在  $(-1, 1)$  内

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x \left( \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' = x \left( \frac{1}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2},$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{x}{(1-x)^2} \Big|_{x=\frac{1}{2}} = 2.$$

**例 9.3.6.** 求级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$  之和.

**解.** 考虑幂级数  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$ , 其收敛半径为 1, 且  $x=1$  时级数收敛, 故

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x).$$

在  $(-1, 1)$  中, 有

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{x^{3n+1}}{3n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} = \frac{1}{1+x^3}.$$

故由微积分基本公式,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \int_0^x \frac{dt}{1+t^3} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^3} = \frac{1}{3} \left( \ln 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right).$$

**定理 9.3.5** (逐项积分). 设幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  收敛半径  $R \neq 0$ , 则有

$$\int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \quad \forall x \in (-R, R).$$

**证明.** 不妨设  $x > 0$ , 则根据前面的讨论,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$  在  $t \in [0, x]$  中一致收敛, 因此可以逐项积分.  $\square$

**注.** 如果  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$  收敛, 则上面的等式对  $x=R$  也成立. 对  $-R$  有类似结果.



下面关于幂级数的求和与求极限运算次序的可交换性的结果是数项级数和函数项级数相应结果的直接应用, 我们省略证明.

**定理 9.3.6.** 设  $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{mn} = a_n$ ,  $|a_{mn}| \leq A_n$ . 如果  $\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$  在  $(-R, R)$  中收敛, 则

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in (-R, R).$$

**定理 9.3.7.** 设  $\sum_{i=0}^{\infty} |a_{ij}| = s_j$ ,  $\sum_{j=0}^{\infty} s_j x^j$  在  $(-R, R)$  中收敛, 则

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} x^j = \sum_{j=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} \right) x^j, \quad x \in (-R, R).$$



作为应用, 我们来推导  $\tan x$  的幂级数展开. 由前节 (9.6) 式, 当  $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  时, 我们有

$$\begin{aligned}\tan x &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{[(2n-1)\frac{\pi}{2}]^2 - x^2} \\ &= 2x \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{[(2n-1)\frac{\pi}{2}]^2} \left( \frac{x}{(2n-1)\frac{\pi}{2}} \right)^{2m} \\ &= 2x \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[(2n-1)\frac{\pi}{2}]^2} \left( \frac{x}{(2n-1)\frac{\pi}{2}} \right)^{2m}.\end{aligned}$$

利用等式

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^{2k}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^{2k}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^{2k}} + 2^{-2k} \zeta(2k)$$

可以将前式写为

$$\tan x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}} 2(2^{2k} - 1)x^{2k-1}, \quad \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}). \quad (9.8)$$

### §9.3.2 Taylor 展开与幂级数

下面我们回顾一下 Taylor 展开. 如果  $f$  在  $x_0$  处任意次可导, 则  $f$  有 Taylor 展开

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n,$$

然而, 这个幂级数在  $x_0$  以外的点上很可能不收敛, 即使收敛, 其极限也未必就是  $f(x)$ . 不过我们有下面的两个结果.

**定理 9.3.8** (Bernstein). (\*) 设  $f$  在  $[a, b]$  中任意阶可导, 且各阶导数非负. 则当  $x, x_0 \in (a, b)$ , 且  $|x - x_0| < b - x_0$  时

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

**证明.** 记  $M = f(b) - f(a)$ , 由  $f', f'' \geq 0$  知  $f, f'$  为单调递增函数. 任给  $x \in (a, b)$ , 由微分中值定理, 有

$$M = f(b) - f(a) \geq f(b) - f(x) = (b - x)f'(\xi) \geq (b - x)f'(x).$$

同理,

$$M \geq f(b) - f(x) = f'(x)(b - x) + \frac{1}{2}f''(\xi)(b - x)^2 \geq \frac{1}{2}f''(x)(b - x)^2.$$

依此类推, 我们得到如下估计

$$0 \leq f^{(n)}(x) \leq \frac{n!M}{(b-x)^n}, \quad \forall x \in (a, b).$$

下面分两种情况来估计  $f$  在  $x_0$  处 Taylor 展开的余项  $R_n(x)$ .

(1)  $x > x_0$ . 此时有

$$\begin{aligned} 0 \leq R_n(x) &= \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt \\ &\leq \int_{x_0}^x (n+1)M \frac{(x-t)^n}{(b-t)^{n+1}} dt \\ &\leq \frac{(n+1)M}{b-x} \int_{x_0}^x \left(\frac{x-t}{b-t}\right)^n dt \\ &\leq \frac{(n+1)M}{b-x} \left(\frac{x-x_0}{b-x_0}\right)^n (x-x_0) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

(2)  $x < x_0$ . 此时, 如果  $x_0 - x < b - x_0$ , 则

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt \right| \\ &\leq \int_x^{x_0} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (t-x)^n dt \\ &\leq \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(x_0) \int_x^{x_0} (t-x)^n dt \\ &\leq \frac{1}{n!} \frac{(n+1)!M}{(b-x_0)^{n+1}} \frac{(x_0-x)^{n+1}}{n+1} \\ &\leq M \left(\frac{x_0-x}{b-x_0}\right)^{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \frac{1}{(n+1)!} (x_0-x)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi) \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!} (x_0-x)^{n+1} f^{(n+1)}(x_0) \\ &\leq M \left(\frac{x_0-x}{b-x_0}\right)^{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

总之, 余项的确是趋于零的.  $\square$

作为例子, 函数  $f(x) = e^x$  在  $(-\infty, \infty)$  中的各阶导数均大于零, 按照 Bernstein 定理, 我们立即就得到等式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad \forall x \in (-\infty, +\infty).$$

我们也可以在这儿再看看前节 (9.3) 式. 当  $x \in (-\pi, \pi)$  时, 根据逐项求导易见, 函数  $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$  的各阶导数非负, 因此有 (注意偶函数的展开无奇次幂项)

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{2m}}{(2m)!} x^{2m}, \quad \forall x \in (-\pi, \pi),$$

其中

$$a_{2m} = \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)^{(2m)}(0) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2m+1)!}{(n\pi)^{2m+2}} = 2(2m+1)! \frac{\zeta(2m+2)}{\pi^{2m+2}},$$

因此有

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\zeta(2m+2)}{\pi^{2m+2}} (4m+2)x^{2m}, \quad \forall x \in (-\pi, \pi). \quad (9.9)$$

**定理 9.3.9.** 设  $R > 0$ ,  $f$  在  $(x_0 - R, x_0 + R)$  中无限次可导. 如果存在  $M > 0$  使得

$$|f^{(n)}(x)| \leq M^n, \quad \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R), \quad \forall n \geq 1.$$

则

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R).$$

**证明.** 当  $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$  时, 由 Taylor 公式的 Lagrange 余项表示, 我们有

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right| &= |R_n(x)| \\ &= \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right| \\ &\leq \frac{M^{n+1} R^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

因此

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

这说明  $f$  在  $x_0$  处的 Taylor 展开的确收敛到  $f$  自身. □

**例 9.3.7.** 考虑幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ , 其中  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ,

$$a_n = \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}. \quad (\text{广义组合数})$$

由于

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\alpha - n}{n+1} \right| \rightarrow 1, \quad \sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty),$$

故此幂级数的收敛半径为 1.

记  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ ,  $x \in (-1, 1)$ . 在  $(-1, 1)$  中逐项求导, 有

$$\begin{aligned}(1+x)f'(x) &= (1+x) \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} n x^{n-1} \\&= \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^n \\&= \binom{\alpha}{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (n+1) \binom{\alpha}{n+1} + n \binom{\alpha}{n} \right] x^n \\&= \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \binom{\alpha}{n} x^n = \alpha f(x),\end{aligned}$$

这说明

$$[(1+x)^{-\alpha} f(x)]' = -\alpha(1+x)^{-\alpha-1} f(x) + (1+x)^{-\alpha} f'(x) = 0,$$

从而

$$(1+x)^{-\alpha} f(x) \equiv c.$$

由  $f(0) = 1$  知  $f(x) = (1+x)^\alpha$ ,  $x \in (-1, 1)$ . 即

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad \forall x \in (-1, 1).$$

特别地, 取  $\alpha = -\frac{1}{2}$ , 并以  $-x^2$  代替  $x$  得

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}, \quad \forall x \in (-1, 1).$$

对此幂级数逐项积分, 得 (约定  $(-1)!! = 1, 0!! = 1$ )

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad \forall x \in (-1, 1).$$

由于在  $x = \pm 1$  处右式收敛 ( §8.2 节的例子), 故上式在  $[-1, 1]$  上均成立, 并且在  $[-1, 1]$  中一致收敛. 代入  $x = \sin t$ , 得

$$t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\sin^{2n+1} t}{2n+1}, \quad \forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

并且上式是一致收敛的 (为什么?). 再次逐项积分, 得

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{8} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t dt \\&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \\&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\end{aligned}$$

由此容易得到下面的求和等式

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2).$$

**例 9.3.8.** 求积分  $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$ .

**解.** 根据  $\ln(1+x)$  的 Taylor 展开可得

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{n}, \quad x \in (-1, 1].$$

上式在  $[0, 1]$  上一致收敛, 因此可逐项积分:

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_0^1 x^{n-1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

### §9.3.3 幂级数的乘法和除法运算



本小节内容可以作为选读材料.

**定理 9.3.10.** 设幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  和  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  在区间  $(-R, R)$  中均收敛, 则

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{i+j=n} a_i b_j \right) x^n, \quad \forall x \in (-R, R).$$

**证明.** 只要证明对任意闭区间  $I \subset (-R, R)$  等式成立即可. 在闭区间  $I$  上, 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  和  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  都是绝对一致收敛的, 因此, 根据数项级数乘积的 Cauchy 定理, 有

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} (a_i x^i)(b_j x^j) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{i+j=n} a_i b_j \right) x^n.$$

这就证明了幂级数的乘法公式. □

**例 9.3.9.** 函数  $\frac{1}{(1-x)^2}$  的幂级数展开.

我们知道, 当  $x \in (-1, 1)$  时, 有

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \quad (9.10)$$

由幂级数的乘积公式, 得

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{i+j=n} 1 \cdot 1 \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n.$$

这个等式也可以通过对 (9.10) 逐项求导得到. □

**例 9.3.10.** 设  $r \in (-1, 1)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , 求下面级数的和:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx.$$

**解.** 我们计算级数的乘积:

$$\begin{aligned} & (1 - 2r \cos x + r^2) \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx \right) \\ &= 1 - 2r \cos x + r^2 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx - 2r \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos x \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} r^{n+2} \cos nx \\ &= 1 - 2r \cos x + r^2 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx - r \sum_{n=1}^{\infty} r^n (\cos(n-1)x + \cos(n+1)x) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} r^{n+2} \cos nx \\ &= 1 - r \cos x. \end{aligned}$$

由此可得等式

$$\frac{1 - r \cos x}{1 - 2r \cos x + r^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx, \quad r \in (-1, 1). \quad (9.11)$$

将上式中右端的 1 移到左端, 两边除以  $r$ , 再关于  $r$  逐项积分, 得

$$\ln(1 - 2r \cos x + r^2) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} \cos nx, \quad r \in (-1, 1). \quad (9.12)$$

如果上式关于  $x$  积分, 则得如下 Poisson 积分

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2r \cos x + r^2) dx = 0, \quad |r| < 1. \quad (9.13)$$

下面我们考虑幂级数的除法运算, 它可以看成是乘法运算的逆运算.

**定理 9.3.11.** 设幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $(-R, R)$  ( $R > 0$ ) 中收敛,  $a_0 \neq 0$ . 则存在  $r > 0$ , 使得幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  在  $(-r, r)$  中收敛, 且

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) \equiv 1, \quad \forall x \in (-r, r),$$

或写为

$$\frac{1}{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots} = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + \cdots.$$

**证明.** 不妨设  $a_0 = 1$ . 下面, 我们递归地定义  $b_n$  如下: 令  $b_0 = 1$ , 当  $b_0, \dots, b_{n-1}$  已定义好后, 令

$$b_n = - \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} b_i, \quad n \geq 1.$$

我们来说明幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  具有正的收敛半径. 事实上, 因为  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $(-R, R)$  中收敛, 故存在  $M > 0$ , 使得

$$\left| a_n \left( \frac{R}{2} \right)^n \right| \leq M, \quad \forall n \geq 0.$$

因此有

$$\left| b_n \left( \frac{R}{2} \right)^n \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left| a_{n-i} \left( \frac{R}{2} \right)^{n-i} \right| \left| b_i \left( \frac{R}{2} \right)^i \right| \leq M \sum_{i=0}^{n-1} \left| b_i \left( \frac{R}{2} \right)^i \right|,$$

由此利用归纳法不难得到下面的估计

$$\left| b_n \left( \frac{R}{2} \right)^n \right| \leq (1 + M)^n, \quad \forall n \geq 0.$$

这说明, 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  的收敛半径至少为  $r = \frac{R}{2(1+M)}$ . 根据  $\{b_n\}$  的构造, 显然有 (我们假设了  $a_0 = 1$ )

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{i+j=n} a_i b_j \right) x^n = 1.$$

这就证明了定理. □

**例 9.3.11.** Bernoulli 数.

考虑函数  $\frac{x}{e^x - 1}$  的幂级数展开:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n, \quad (9.14)$$

其系数  $B_n$  称为第  $n$  个 Bernoulli 数. 我们有

$$\begin{aligned} \frac{x}{e^x - 1} &= \left( \frac{e^x - 1}{x} \right)^{-1} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} \right)^{-1} \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + \frac{x^6}{30240} - \frac{x^8}{1209600} + \dots \end{aligned}$$

注意到上式中当  $n \geq 1$  时  $B_{2n+1} = 0$ , 这是因为

$$\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = \frac{x}{2} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{x}{2} \coth \frac{x}{2},$$

即  $\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2}$  为偶函数的缘故.

根据幂级数的除法公式, 我们容易得到  $B_n$  的如下递推公式:

$$B_0 = 1, \quad B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1}^k B_k.$$

例如, 开头的几个 Bernoulli 数为

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = B_5 = B_7 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}.$$

Bernoulli 数在许多学科 (比如数论) 中都有重要的应用. 我们下面把它们和 Riemann-Zeta 函数的值联系起来. 首先, 我们将 (9.14) 改写为

$$x \coth x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} x^{2n}. \quad (9.15)$$

其次, 从第八章第四节 (8.3) 式出发, 我们有

$$\ln\left(\frac{\sinh x}{x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{x^2}{n^2 \pi^2} + 1\right),$$

上式两边求导, 得

$$\begin{aligned} x \coth x &= 1 + 2x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2 \pi^2} \\ &= 1 + 2x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(n\pi)^2} \left(\frac{x}{n\pi}\right)^{2m} \\ &= 1 + 2x^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(n\pi)^{2m+2}} \\ &= 1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2(-1)^m \zeta(2m+2)}{\pi^{2m+2}} x^{2m+2}. \end{aligned}$$

将上式和 (9.15) 对比, 我们就得到了重要的等式

$$\zeta(2n) = (-1)^{n-1} \frac{2^{2n} B_{2n} \pi^{2n}}{2(2n)!}, \quad \forall n \geq 1. \quad (9.16)$$

例如, 从上式可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \zeta(4) = -\frac{2^4 B_4 \pi^4}{2 \cdot 4!} = \frac{\pi^4}{90},$$

以及

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \zeta(6) = \frac{2^6 B_6 \pi^6}{2 \cdot 6!} = \frac{\pi^6}{945},$$

等等; 并且从 (9.16) 我们还可以知道 (9.14) 中幂级数的收敛半径为  $2\pi$ .



**例 9.3.12.** *Euler* 数.

考虑函数  $\frac{2e^x}{e^{2x}+1}$  的展开式

$$\frac{2e^x}{e^{2x}+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{n!} x^n,$$

其系数  $E_n$  称为 *Euler* 数. 因为  $\frac{2e^x}{e^{2x}+1} = \frac{1}{\cosh x}$  是偶函数, 故上式也可写为

$$\frac{1}{\cosh x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_{2n}}{(2n)!} x^{2n}. \quad (9.17)$$

因为  $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ , 由幂级数的除法公式可得如下递推公式

$$E_0 = 1, E_{2n-1} = 0, E_{2n} = - \sum_{l=0}^{n-1} C_{2n}^{2l} E_{2l}, \quad n \geq 1.$$

#### §9.3.4 母函数方法



本小节内容可以作为选读材料. 设  $\{a_n\}$  为一列实数, 我们将形式幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (\text{有时是 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n)$$

称为  $\{a_n\}$  的生成函数或母函数. 例如, 广义组合数  $\{\binom{\alpha}{n}\}$  的母函数为  $(1+x)^\alpha$ , Bernoulli 数的母函数为  $\frac{x}{e^x-1}$ .

通过对母函数做幂级数的四则运算和求导以及积分等, 我们可以了解母函数的性质, 进而了解数列  $\{a_n\}$  的性质, 这种办法称为母函数方法. 我们以下举例说明.

**例 9.3.13.** 设  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , 证明组合恒等式

$$\sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{n-k} = \binom{\alpha+\beta}{n}, \quad \forall n \geq 1.$$

**证明.** 考虑等式

$$(1+x)^\alpha \cdot (1+x)^\beta = (1+x)^{\alpha+\beta}, \quad |x| < 1.$$

用幂级数表示, 上式成为

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\beta}{n} x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha+\beta}{n} x^n,$$

利用幂级数的乘法公式, 比较等式两边  $x^n$  项的系数就得到了恒等式的证明.  $\square$

**例 9.3.14.** 设  $\alpha \in \mathbb{R}$ , 证明组合恒等式

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{\alpha}{k} \binom{\alpha}{2n-k} = (-1)^n \binom{\alpha}{n}, \quad \forall n \geq 1.$$

**证明.** 考虑等式

$$(1+x)^\alpha \cdot (1-x)^\alpha = (1-x^2)^\alpha, \quad |x| < 1.$$

用幂级数表示, 上式成为

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\alpha}{n} x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\alpha}{n} x^{2n},$$

利用幂级数的乘法公式, 比较等式两边  $x^{2n}$  项的系数就得到了恒等式的证明.  $\square$

**例 9.3.15.** *Fibonacci* 数列.

设数列  $\{a_n\}$  由以下递推关系决定:

$$a_0 = a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

$a_n$  称为第  $n$  个 *Fibonacci* 数. 我们利用母函数来求  $a_n$  的通项公式. 记

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

则

$$(1-x-x^2)f(x) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n - a_{n-1} - a_{n-2})x^n = 1,$$

因此

$$f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}.$$

记  $x_1, x_2$  为方程  $1-x-x^2=0$  的根:

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2},$$

则

$$f(x) = \frac{1}{x_2 - x_1} \left( \frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x_2 - x_1} \left( \frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} \right) x^n,$$

因此

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{x_2 - x_1} \left( \frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} \right) = \frac{1}{(x_1 x_2)^{n+1}} \frac{x_1^{n+1} - x_2^{n+1}}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right], \quad \forall n \geq 0. \end{aligned}$$

例 9.3.16. Bernoulli 多项式.

设  $t$  为实数, 考虑函数  $\frac{xe^{tx}}{e^x - 1}$  关于  $x$  的幂级数展开

$$\frac{xe^{tx}}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(t)}{n!} x^n,$$

其系数  $B_n(t)$  称为第  $n$  个 Bernoulli 多项式. 为了看出  $B_n(t)$  的确是关于  $t$  的多项式, 我们要利用幂级数的乘积公式. 从等式

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(t)}{n!} x^n = \frac{x}{e^x - 1} e^{tx} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} x^n \right)$$

中比较两端  $x^n$  的系数, 得

$$B_n(t) = \sum_{k=0}^n C_n^k B_{n-k} t^k, \quad n \geq 0. \quad (9.18)$$

因此  $B_n(t)$  是关于  $t$  的  $n$  次多项式, 且  $B_n(0) = B_n$ . 另一方面, 由定义

$$\frac{xe^{tx}}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(t)}{n!} x^n, \quad \frac{xe^{(t+1)x}}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(t+1)}{n!} x^n$$

两式相减, 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(t+1) - B_n(t)}{n!} x^n = xe^{tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} x^{n+1},$$

比较等式两边  $x^{k+1}$  的系数, 得

$$B_{k+1}(t+1) - B_{k+1}(t) = (k+1)t^k, \quad \forall k \geq 1. \quad (9.19)$$

在上式中分别取  $t = 1, 2, \dots, n$ , 再把这些等式相加, 得

$$1^k + 2^k + \dots + n^k = \frac{B_{k+1}(n+1) - B_{k+1}(1)}{k+1}.$$

在 (9.19) 中取  $t = 0$  知  $B_{k+1}(1) = B_{k+1}(0) = B_{k+1}$ , 再利用 (9.18), 上式可改写为

$$1^k + 2^k + \dots + n^k = \frac{1}{k+1} \sum_{l=1}^{k+1} C_{k+1}^l B_{k+1-l}(n+1)^l. \quad (9.20)$$

特别地, 当  $k = 2$  时可得

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2}(n+1) - \frac{3}{2}(n+1)^2 + (n+1)^3 \right] = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1);$$

当  $k = 3$  时可得

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4} [(n+1)^2 - 2(n+1)^3 + (n+1)^4] = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2.$$

读者可以将这里的方法与前一章第三节的方法做对比.

### 习题 9.3

1. 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  在  $x = R > 0$  处收敛, 证明  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  在  $[0, R]$  中一致收敛.
2. 设  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n 2^n$  收敛, 证明  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  绝对收敛.
3. 求下列幂级数的收敛半径, 并判断它们在收敛区间端点的收敛性:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}; & (2) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n; \\
 (3) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n; & (4) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n; \\
 (5) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}; & (6) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln \frac{n^2 + \alpha^2}{n^2}\right) x^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

4. 求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n} x^n$$

的收敛半径, 其中  $\alpha$  为常数.

5. 利用幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $x \in (-1, 1)$  证明

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1, 1].$$

6. 利用幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} x^{4n+1}$  求级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}$  的和.

7. 求下列级数之和:

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n} x^n, \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n, \quad (3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3!} (n+1)(n+2)(n+3) x^n.$$

8. (\*) 推导下列等式 ( $x \in (-\pi, \pi)$ ):

$$\frac{1}{x} - \cot x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\zeta(2k)}{\pi^{2k}} x^{2k-1}, \quad \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}} (2 - 2^{2-2k}) x^{2k-1}.$$

9. 证明等式

$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1, 1].$$

10. 证明

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi}{2} \ln 2.$$

11. 设  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径为  $R > 0$ , 则

(1) 当  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n R^{n+1}}{n+1}$  收敛时, 有

$$\int_0^R S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n R^{n+1}}{n+1};$$

(2) 当  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n R^{n-1}$  收敛时, 有

$$S'(R) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n R^{n-1}.$$

12. 设幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在开区间  $(-R, R)$  中一致收敛, 则它在闭区间  $[-R, R]$  中也是一致收敛的.

13. 设  $a_n > 0$ , 且幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径为  $R$ . 证明

$$\lim_{x \rightarrow R^-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n.$$

注意上式中的后者可能是发散的, 此时要证明的是左式极限为  $+\infty$ .

14. (\*) 证明下面的等式

$$x \cot x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in (-\pi, \pi).$$

15. (\*) 证明下面的等式

$$\frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{E_{2n}}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

## §9.4 函数项级数的进一步讨论



本节内容可以作为选读材料.

## §9.4.1 近似计算回顾

## (1) 几个常数的近似计算

例 9.4.1.  $\pi$  的近似计算.

我们可以用  $\arctan x$  的如下幂级数展开

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

以及交错级数的误差估计来计算  $\pi$ . 利用等式

$$\tan(u+v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v},$$

当  $u = \arctan(1/5)$  时, 有

$$\tan(2u) = \frac{2/5}{1 - (1/5)^2} = 5/12, \quad \tan(4u) = \frac{10/12}{1 - (5/12)^2} = 120/119.$$

因此

$$\tan\left(4u - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{120/119 - 1}{1 + 120/119} = 1/239,$$

这就得到下面等式

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}, \quad (9.21)$$

或改写为如下的 Machin 公式

$$\pi = 16 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)5^{2n+1}} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)239^{2n+1}}, \quad (9.22)$$

这个公式已经可用于实际的计算了 (1706 年, Machin 用这个公式将  $\pi$  计算到了小数点后 100 位). 类似地, 我们可以得到等式

$$2 \arctan \frac{1}{10} = \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{515},$$

从而有

$$\begin{aligned} \pi &= 32 \arctan \frac{1}{10} - 4 \arctan \frac{1}{239} - 16 \arctan \frac{1}{515} \\ &= 32 \left( \frac{1}{10} - \frac{1}{3} \frac{1}{10^3} + \frac{1}{5} \frac{1}{10^5} - \frac{1}{7} \frac{1}{10^7} + \frac{1}{9} \frac{1}{10^9} - \frac{1}{11} \frac{1}{10^{11}} \right) + \delta_1 \\ &\quad - 4 \left( \frac{1}{239} - \frac{1}{3} \frac{1}{239^3} \right) - \delta_2 - 16 \left( \frac{1}{515} - \frac{1}{3} \frac{1}{515^3} \right) - \delta_3, \end{aligned}$$

其中

$$\frac{32}{13} \times 10^{-13} - \frac{32}{15} \times 10^{-15} < \delta_1 < \frac{32}{13} \times 10^{-13},$$

因此

$$0.24 \times 10^{-12} < \delta_1 < 0.25 \times 10^{-12},$$

同理,

$$1.02 \times 10^{-12} < \delta_2 < 1.03 \times 10^{-12}, \quad 0.08 \times 10^{-12} < \delta_3 < 0.09 \times 10^{-12},$$

因此

$$-0.88 \times 10^{-12} < \delta_1 - \delta_2 - \delta_3 < -0.85 \times 10^{-12}.$$

另一方面,

$$\begin{aligned} \pi &\approx 32 \left( \frac{1}{10} - \frac{1}{3} \frac{1}{10^3} + \frac{1}{5} \frac{1}{10^5} - \frac{1}{7} \frac{1}{10^7} + \frac{1}{9} \frac{1}{10^9} - \frac{1}{11} \frac{1}{10^{11}} \right) \\ &\quad - 4 \left( \frac{1}{239} - \frac{1}{3} \frac{1}{239^3} \right) - 16 \left( \frac{1}{515} - \frac{1}{3} \frac{1}{515^3} \right) \\ &= 3.14159265359066... \end{aligned}$$

因此得到

$$3.14159265358978 < \pi < 3.14159265358982,$$

上述  $\pi$  的值精确到了小数点后第 12 位.

如何更快地精确计算  $\pi$  是一个很有意思的数学问题. 1914 年, 印度天才数学家 Ramanujan 发表了一系列公式, 其中一个为

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!}{(k!)^4 4^{4k}} \frac{(1103 + 26390k)}{99^{4k}}, \quad (9.23)$$

这个公式的每一项可提供  $\pi$  的大约 8 位有效数字. 1988 年, Chudnovsky 兄弟得到了公式

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(6k)!}{(3k!)(k!)^3} \frac{(13591409 + 545140134k)}{640320^{3k+3/2}}, \quad (9.24)$$

这个公式的每一项可提供  $\pi$  的大约 15 位有效数字. 很快, 收敛得更快的类似的公式也被发现了. 另一方面, 1996 年, Baily, Borwein 和 Plouffe 发现了下面的公式

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right) \frac{1}{16^k}, \quad (9.25)$$

他们利用这个公式证明了, 在 2 进制下可以直接计算  $\pi$  的第  $n$  位小数而无需知道其前  $n-1$  位小数的值. 现在, 人们利用已经发现的这些算法在计算机上进行  $\pi$  的快速高精度计算, 这也成为了检验计算机运行速度的初步手段.

**例 9.4.2.**  $\ln 2$  的计算.

与  $\pi$  的计算类似, 我们利用幂级数

$$\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad |x| < 1$$

来计算  $\ln 2$ . 如果在上式中取  $x = 1/3$ , 则得到公式

$$\ln 2 = \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)9^k}, \quad (9.26)$$

这个公式已经可以用于实际的计算. 与 Machin 公式类似, 利用等式

$$\left(\frac{27}{25}\right)^9 \left(\frac{4800}{4802}\right) \left(\frac{8750}{8748}\right)^4 = 2$$

可得

$$\begin{aligned} \ln 2 &= 18 \operatorname{arctanh} \frac{1}{26} - 2 \operatorname{arctanh} \frac{1}{4801} + 8 \operatorname{arctanh} \frac{1}{8749} \\ &= 18 \left( \frac{1}{26} + \frac{1}{3 \cdot 26^3} + \frac{1}{5 \cdot 26^5} + \frac{1}{7 \cdot 26^7} + \frac{1}{9 \cdot 26^9} \right) \\ &\quad - 2 \left( \frac{1}{4801} + \frac{1}{3 \cdot 4801^3} \right) + 8 \left( \frac{1}{8749} + \frac{1}{3 \cdot 8749^3} \right) + \delta, \end{aligned}$$

其中

$$\delta = 18 \left( \frac{1}{11 \cdot 26^{11}} + \frac{1}{13 \cdot 26^{13}} + \cdots \right) - 2 \left( \frac{1}{3 \cdot 4801^5} + \cdots \right) + 8 \left( \frac{1}{5 \cdot 8749^5} + \cdots \right),$$

易见

$$\frac{18}{11 \cdot 26^{11}} < \delta < \frac{18}{11 \cdot 26^{11}} \left( 1 + \frac{1}{26^2} + \frac{1}{26^4} + \cdots \right) = \frac{18}{11 \cdot 25 \cdot 27 \cdot 26^9},$$

从而有

$$0.44 \times 10^{-15} < \delta < 0.45 \times 10^{-15}.$$

另一方面,

$$\begin{aligned} \ln 2 &\approx 18 \left( \frac{1}{26} + \frac{1}{3 \cdot 26^3} + \frac{1}{5 \cdot 26^5} + \frac{1}{7 \cdot 26^7} + \frac{1}{9 \cdot 26^9} \right) \\ &\quad - 2 \left( \frac{1}{4801} + \frac{1}{3 \cdot 4801^3} \right) + 8 \left( \frac{1}{8749} + \frac{1}{3 \cdot 8749^3} \right) \\ &= 0.6931471805599485... \end{aligned}$$

最后得到

$$0.6931471805599529 < \ln 2 < 0.6931471805599531,$$

上述  $\ln 2$  的值精确到了小数点后第 14 位.

**例 9.4.3.**  $\sqrt{2}$  的计算.



我们利用幂级数展开

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n, \quad |x| < 1$$

来计算  $\sqrt{2}$ . 从  $p_0 = q_0 = 1$  出发, 递归地定义正整数  $p_k, q_k$  如下:

$$p_0 = q_0 = 1, \quad p_k = 3p_{k-1} + 4q_{k-1}, \quad q_k = 2p_{k-1} + 3q_{k-1}, \quad k \geq 1.$$

容易验证,  $p_k, q_k$  满足关系

$$2q_k^2 - p_k^2 = 1, \quad \forall k \geq 0.$$

因此有

$$\sqrt{2} = \frac{p_k}{q_k} \left( \frac{2q_k^2}{p_k^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{p_k}{q_k} \left( 1 - \frac{1}{p_k^2 + 1} \right)^{-\frac{1}{2}},$$

例如, 取  $k = 1$ , 此时  $p_1 = 7, q_1 = 5$ , 因此有

$$\sqrt{2} = \frac{7}{5} \left( 1 - \frac{1}{50} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{7}{5} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{50} + \frac{3}{8} \frac{1}{50^3} + \frac{35}{128} \frac{1}{50^4} + \cdots \right),$$

这个公式已经可以用于实际的计算. 如果取  $k = 3$ , 则  $p_3 = 239, q_3 = 169$ , 从而

$$\sqrt{2} = \frac{239}{169} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{57122} + \frac{3}{8} \frac{1}{57122^2} + \frac{5}{16} \frac{1}{57122^3} \right) + \delta,$$

其中

$$\delta = \frac{239}{169} \left( \frac{35}{128} \frac{1}{57122^4} + \frac{63}{256} \frac{1}{57122^5} + \cdots \right),$$

易见

$$\begin{aligned} \frac{239}{169} \frac{35}{128} \frac{1}{57122^4} < \delta < \frac{239}{169} \frac{35}{128} \frac{1}{57122^4} \left( 1 + \frac{1}{57122} + \frac{1}{57122^2} + \frac{1}{57122^3} + \cdots \right) \\ &= \frac{239}{169} \frac{35}{128} \frac{1}{57121 \cdot 57122^3}, \end{aligned}$$

因此有

$$0.36 \times 10^{-19} < \delta < 0.37 \times 10^{-19}.$$

另一方面,

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &\approx \frac{239}{169} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{57122} + \frac{3}{8} \frac{1}{57122^2} + \frac{5}{16} \frac{1}{57122^3} \right) \\ &= 1.414213562373095048765... \end{aligned}$$

最后得到

$$1.414213562373095048801 < \sqrt{2} < 1.414213562373095048803,$$

这个  $\sqrt{2}$  的近似值精确到了小数点后第 20 位.

**(2) Euler-Maclaurin 公式**

在本章前一节最后, 我们定义了 Bernoulli 多项式  $B_n(t)$ :

$$\frac{xe^{tx}}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(t) \frac{x^n}{n!}, \quad (9.27)$$

并且已经得到了 Bernoulli 多项式的如下几条性质:

$$B_0 = 1, \quad B_1(t) = t - \frac{1}{2}, \quad B_n(0) = B_n(1) = B_n, \quad \forall n \geq 2.$$

现在我们再证明几条新的性质.

$$(i) \quad B'_n(t) = nB_{n-1}(t), \quad \forall n \geq 1.$$

事实上, 在等式 (9.27) 两边关于  $t$  求导, 得

$$\frac{x^2 e^{tx}}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B'_n(t) \frac{x^n}{n!},$$

即

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(t) \frac{x^{n+1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} B'_n(t) \frac{x^n}{n!},$$

对比上式两边  $x^n$  的系数即得  $B'_n(t) = nB_{n-1}(t)$ . 从这个等式还可以知道

$$\int_0^1 B_n(t) dt = \int_0^1 \frac{B'_{n+1}(t)}{n+1} dt = \frac{B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0)}{n+1} = 0, \quad \forall n \geq 1.$$

这实际上就确定了  $B_n(t)$  的递推关系, 按照这个递推关系可以逐步求出这些多项式的具体表达式. 例如有

$$B_2(t) = t^2 - t + \frac{1}{6}, \quad B_3(t) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t.$$

$$(ii) \quad B_n(1-t) = (-1)^n B_n(t), \quad \forall n \geq 0.$$

事实上, 利用

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(1-t) \frac{x^n}{n!} = \frac{xe^{(1-t)x}}{e^x - 1} = \frac{-xe^{-tx}}{e^{-x} - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(t) \frac{(-x)^n}{n!},$$

对比等式两边  $x^n$  的系数即可.

$$(iii) \quad B_{2n}(t) - B_{2n} \text{ 在 } t \in [0, 1] \text{ 上不变号, } \forall n \geq 0.$$

这一条可通过归纳法证明. 我们也可以这样来看: 由 (ii) 知  $B_{2n-1}(\frac{1}{2}) = 0$ , 因此函数  $B_{2n-1}(t)$  在  $[0, 1]$  上有  $0, \frac{1}{2}$  和  $1$  这三个零点. 我们断言这也是  $B_{2n-1}$  的仅有的三个零点. (反证法) 如果  $B_{2n-1}(t)$  在  $[0, 1]$  上还有一个零点, 则根据微分中值定理,  $B'_{2n-1}(t) = \frac{B'_{2n-1}(t)}{2n-1}$  在  $(0, 1)$  中至少有三个零点. 再由微分中值定理

即知,  $B_{2n-3}(t) = \frac{B'_{2n-2}(t)}{2n-2}$  在  $(0, 1)$  中至少有两个零点, 从而在  $[0, 1]$  上至少有四个零点. 如此这样一直讨论下去, 最后会得出结论:  $B_1(t)$  在  $(0, 1)$  中至少有两个零点, 这就导出了矛盾. 这样我们就说明了, 当  $n$  为奇数时,  $B_n(t)$  在区间  $[0, \frac{1}{2}]$  和  $[\frac{1}{2}, 1]$  上不变号, 因此当  $n$  为偶数时,  $B_n(t)$  分别在区间  $[0, \frac{1}{2}]$  和  $[\frac{1}{2}, 1]$  上单调. 由  $B_n(0) = B_n(1)$  易见此时  $B_n(t) - B_n(0)$  在  $[0, 1]$  上不变号.

现在我们利用 Bernoulli 多项式来进一步研究积分的近似计算. 设  $f(t)$  是  $[0, 1]$  上具有直到  $2m+2$  阶连续导数的函数. 利用分部积分, 有

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t) dt &= \int_0^1 f(t) dB_1(t) \\ &= f(t)B_1(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 B_1(t)f'(t)dt \\ &= \frac{1}{2}[f(0) + f(1)] - \frac{1}{2} \int_0^1 f'(t)dB_2(t) \\ &= \frac{1}{2}[f(0) + f(1)] - \frac{1}{2}f'(t)B_2(t) \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 B_2(t)f''(t)dt,\end{aligned}$$

利用  $B'_3(t) = 3B_2(t)$ ,  $B_3(0) = B_3(1) = 0$  以及  $B'_4(t) = 4B_3(t)$ , 再做两次分部积分:

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t) dt &= \frac{1}{2}[f(0) + f(1)] - \frac{1}{2!}B_2[f'(1) - f'(0)] + \frac{1}{3!} \int_0^1 f''(t)dB_3(t) \\ &= \frac{1}{2}[f(0) + f(1)] - \frac{1}{2!}B_2[f'(1) - f'(0)] + \frac{1}{3!}f''(t)B_3(t) \Big|_0^1 \\ &\quad - \frac{1}{3!} \int_0^1 B_3(t)f'''(t)dt \\ &= \frac{1}{2}[f(0) + f(1)] - \frac{1}{2!}B_2[f'(1) - f'(0)] - \frac{1}{4!} \int_0^1 f'''(t)dB_4(t) \\ &= \frac{1}{2}[f(0) + f(1)] - \frac{1}{2!}B_2[f'(1) - f'(0)] - \frac{1}{4!}B_4[f'''(1) - f'''(0)] \\ &\quad + \frac{1}{4!} \int_0^1 B_4(t)f^{(4)}(t)dt,\end{aligned}$$

我们可以一直象这样做下去, 最后得到

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t) dt &= \frac{1}{2}[f(0) + f(1)] - \sum_{k=1}^{m+1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} [f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)] \\ &\quad + \frac{1}{(2m+2)!} \int_0^1 B_{2m+2}(t)f^{(2m+2)}(t)dt,\end{aligned}\tag{9.28}$$

这个公式称为 Euler-Maclaurin 公式. 由于  $B_{2m+2}(t) - B_{2m+2}$  在  $[0, 1]$  上不变号, 由积分中值定理知

$$\begin{aligned}\int_0^1 (B_{2m+2}(t) - B_{2m+2})f^{(2m+2)}(t)dt &= f^{(2m+2)}(\xi) \int_0^1 (B_{2m+2}(t) - B_{2m+2})dt \\ &= -f^{(2m+2)}(\xi)B_{2m+2}, \quad \xi \in [0, 1].\end{aligned}$$

因此 (9.28) 可以改写为

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t) dt &= \frac{1}{2}[f(0) + f(1)] - \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!} [f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)] \\ &\quad - \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!} f^{(2m+2)}(\xi), \quad \xi \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (9.29)$$

以上是对定义在区间  $[0, 1]$  上的函数  $f$  进行讨论的. 对于一般的区间  $[a, b]$ , 利用变量替换  $x = (b-a)t + a$  就可以得到

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \frac{1}{2}(b-a)[f(a) + f(b)] - \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!} (b-a)^{2k} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] \\ &\quad - \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!} (b-a)^{2m+2} f^{(2m+2)}(\xi)(b-a), \quad \xi \in [a, b]. \end{aligned} \quad (9.30)$$

我们还可以将区间  $[a, b]$  作  $n$  等分, 在每一个小区间上均有上式成立, 这些等式加起来可得

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \frac{b-a}{2n} \sum_{i=1}^n [f(x_{i-1}) + f(x_i)] - \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left(\frac{b-a}{n}\right)^{2k} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] \\ &\quad - \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!} \left(\frac{b-a}{n}\right)^{2m+2} \sum_{i=1}^n f^{(2m+2)}(\xi_i) \frac{b-a}{n}, \quad \xi_i \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (9.31)$$

其中  $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$ ,  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ . 根据连续函数的介值定理, 存在  $\xi \in [a, b]$ , 使得

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f^{(2m+2)}(\xi_i) = f^{(2m+2)}(\xi),$$

因此 (9.31) 也可以改写为

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \frac{b-a}{2n} \sum_{i=1}^n [f(x_{i-1}) + f(x_i)] - \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left(\frac{b-a}{n}\right)^{2k} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] \\ &\quad - \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!} \left(\frac{b-a}{n}\right)^{2m+2} f^{(2m+2)}(\xi)(b-a), \quad \xi \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (9.32)$$

这些公式也都称为 Euler-Maclaurin 公式.

### (3) Stirling 公式回顾

现在我们利用 Euler-Maclaurin 公式来研究函数  $\ln x$  在区间  $[1, n]$  上的近似积分. 我们首先再给出 Bernoulli 多项式的两条性质.

(iv)  $B_n(\frac{1}{2}) = -[1 - 2^{1-n}]B_n, \forall n \geq 0$ .

事实上, 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{(x/2)^n}{n!} &= \frac{x/2}{e^{(x/2)} - 1} = \frac{1}{2} \frac{xe^{(x/2)} + x}{e^x - 1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left(\frac{1}{2}\right) \frac{x^n}{n!} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

比较等式两边  $x^n$  的系数即得欲证结论.

(v) 在区间  $[0, 1]$  上,  $B_{2n}(t) - B_{2n}$  与  $-B_{2n}$  同号, 因而  $B_{2n}(t) - B_{2n}$  与  $B_{2n+2}(t) - B_{2n+2}$  符号相反.

我们已经在 (iii) 中证明了  $B_{2n}(t) - B_{2n}$  不变号, 因而其符号与  $B_{2n}(\frac{1}{2}) - B_{2n}$  相同. 利用 (iv) 以及 Bernoulli 数  $B_{2n}$  和  $B_{2n+2}$  符号相反即得欲证结论.

下面我们考虑定义在  $[1, +\infty)$  上的函数  $f(t)$ . 假设

(\*)  $f^{(2k)}$  都具有相同的符号, 且  $f^{(2k+1)} \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow \infty$ ).

考虑  $f(t)$  在区间  $[1, n]$  上的积分. 将  $[1, n]$  作  $n-1$  等分, 在每一个长度为 1 的小区间上用 (9.28) 式, 我们有

$$\int_1^n f(t)dt = \sum_{i=1}^n f(i) - \frac{1}{2}f(n) - \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(n) + R_n,$$

其中

$$\begin{aligned} R_n &= -\frac{1}{2}f(1) - \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(1) \\ &\quad + \frac{1}{(2m+2)!} \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^1 (B_{2m+2}(t) - B_{2m+2}) f^{(2m+2)}(i+t)dt, \end{aligned}$$

由条件 (\*) 不难看出极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n$  存在, 记为  $R$ . 于是

$$R_n - R = -\frac{1}{(2m+2)!} \sum_{i=n}^{\infty} \int_0^1 (B_{2m+2}(t) - B_{2m+2}) f^{(2m+2)}(i+t)dt.$$

如果做两次分部积分, 我们将得到

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{(2m+4)!} \sum_{i=n}^{\infty} \int_0^1 (B_{2m+4}(t) - B_{2m+4}) f^{(2m+4)}(i+t)dt \\ &= (R_n - R) + \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!} f^{(2m+1)}(n), \end{aligned}$$

根据 (v), 上式左端与右端第一项不同号, 因而右端两项不同号, 且存在  $\theta_n \in (0, 1)$ , 使得

$$R_n - R = -\theta_n \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!} f^{(2m+1)}(n),$$

最后我们得到如下公式

$$\begin{aligned} \int_1^n f(t)dt &= \sum_{i=1}^n f(i) - \frac{1}{2}f(n) - \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(n) \\ &\quad + R - \theta_n \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!} f^{(2m+1)}(n), \quad \theta_n \in (0, 1). \end{aligned} \quad (9.33)$$

对函数  $f(t) = \ln t$  用这个公式, 得

$$\begin{aligned} n \ln n - n = C + \ln(n!) - \frac{1}{2} \ln n - \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)} \frac{1}{n^{2k-1}} \\ - \theta_n \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)(2m+1)} \frac{1}{n^{2m+1}}, \quad \theta_n \in (0, 1). \end{aligned}$$

用 §5.8 或 §7.1.5 中得到的 Stirling 公式

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\delta_n} \quad (9.34)$$

代入前式并令  $n \rightarrow \infty$  可知  $C = -\frac{1}{2} \ln(2\pi)$ , 且得到  $\delta_n$  的如下展开式

$$\delta_n = \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)} \frac{1}{n^{2k-1}} + \theta_n \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)(2m+1)} \frac{1}{n^{2m+1}}, \quad \theta_n \in (0, 1).$$

例如, 取  $m=1$  得

$$\delta_n = \frac{B_2}{2} \frac{1}{n} + \theta_n \frac{B_4}{12} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{12n} - \frac{\theta_n}{360n^3}, \quad \theta_n \in (0, 1);$$

再取  $m=2$  得

$$\delta_n = \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{\theta_n}{1260n^5}, \quad \theta_n \in (0, 1);$$

等等. (9.34) 也可写为

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51480n^3} - \frac{571}{2488320n^4} + \cdots\right).$$

这个公式比 §7.1.5 节中得到的估计要精确得多.

### §9.4.2 用级数构造函数

#### (1) 处处连续但无处可导的函数

在数学分析和微积分发展的早期, 人们猜测: 连续函数的不可导点至多只有可数个. 1872 年, Weierstrass 利用无穷级数的理论给出了一个反例:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot \sin(b^n x), \quad (0 < a < 1, ab \geq 1)$$

这个函数处处连续但无处可导! 1930 年, Van Der Waerden 给出了更简单的例子, 下面我们讨论的例子基本上就是他举出来的.

用  $\varphi(x)$  表示  $x$  与离它最近的整数之间的距离, 这是一个周期为 1 的连续函数,

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1-x, & \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

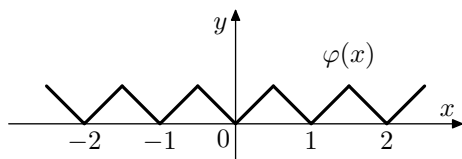


图 9.2 锯齿函数

令

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(4^n x)}{4^n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

因为  $0 \leq \varphi \leq \frac{1}{2}$ , 故这个函数项级数在整个  $(-\infty, \infty)$  中一致收敛, 这说明  $f$  在  $(-\infty, \infty)$  中处处连续.

下面我们说明  $f$  无处可导. 首先注意到  $f$  也是周期函数,  $f(x) = f(x+1)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . 我们只要说明  $f$  在  $[0, 1)$  中无处可导即可. 先以  $x_0 = 0$  为例看一下. 取  $h_m = 4^{-m}$ , 则当  $n \leq m-1$  时,  $\varphi(4^n h_m) = 4^n h_m$ ;  $n \geq m$  时,  $\varphi(4^n h_m) = 0$ . 因此

$$\frac{f(h_m) - f(0)}{h_m} = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\varphi(4^n h_m)}{4^n \cdot h_m} = \sum_{n=0}^{m-1} 1 = m, \quad \forall m \geq 1.$$

因为  $h_m \rightarrow 0$  ( $m \rightarrow \infty$ ), 故上式表明  $f$  在 0 处不可导.

对于一般的  $x_0 \in (0, 1)$ , 做法类似. 把  $x_0$  写成 4 进位无穷小数 (对于有限小数, 可在末尾添无穷个 0):  $x_0 = 0 \cdot x_1 x_2 x_3 \cdots x_m \cdots$ , 其中  $x_m$  可取 0, 1, 2, 3. 我们这样选取  $h_m$ :

$$h_m = \begin{cases} 4^{-m}, & \text{当 } x_m = 0 \text{ 或 } 2; \\ -4^{-m}, & \text{当 } x_m = 1 \text{ 或 } 3. \end{cases}$$

在 4 进制下,  $4^n x_0 = x_1 \cdots x_n \cdot x_{n+1} \cdots x_m \cdots$ , 且

$$4^n(x_0 + h_m) = x_1 \cdots x_n \cdot x_{n+1} \cdots (x_m \pm 1) \cdots$$

当  $n \leq m-1$  时, 根据  $h_m$  的选取,  $4^n x_0$  和  $4^n(x_0 + h_m)$  之间不含其它整数或半整数. 此时  $\varphi(4^n(x_0 + h_m)) - \varphi(4^n x_0) = \pm 4^n \cdot h_m$ , 且

$$\frac{f(x_0 + h_m) - f(x_0)}{h_m} = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\varphi(4^n(x_0 + h_m)) - \varphi(4^n x_0)}{4^n \cdot h_m} + 0 = \sum_{n=0}^{m-1} \pm 1.$$

特别地,  $m$  分别取奇数和偶数时, 上式右边也是奇数或偶数, 因此,  $h_m \rightarrow 0$  ( $m \rightarrow \infty$ ), 但极限  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + h_m) - f(x_0)}{h_m}$  不存在. 故  $f$  在  $x_0$  处不可导.

注. Weierstrass 要求  $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ , 现在的条件是 Hardy 在 1916 年改进的. 在后续的分析课程中将学习到这样的事实: “大部分” 连续函数都是处处不可导的!

**(2) 填满空间的曲线 (Peano 曲线)**

1890 年, Peano 构造了连续曲线  $\sigma: I \rightarrow I^2, I = [0, 1]$ , 使得  $\sigma(I) = I^2$ . 这和人们的直观想象大相径庭. 下面我们来给出一个例子, 它是 1938 年由 Schoenberg 提出的.

考虑连续函数

$$\psi(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{1}{3}], \\ 3t - 1, & t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ 1, & t \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

将  $\psi$  延拓为  $\mathbb{R}$  上周期为 2 的偶函数:

$$\psi(t) = \psi(t+2), \quad \psi(t) = \psi(-t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

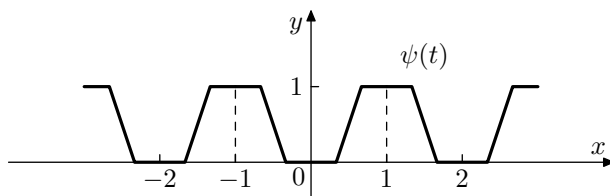


图 9.3 另一锯齿函数

令

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi(3^{2n}t)}{2^{n+1}}, \\ y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi(3^{2n+1}t)}{2^{n+1}}, \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

因为  $0 \leq \psi \leq 1$ , 故上面的两个级数一致收敛, 从而  $x(t), y(t)$  连续,

$$\sigma(t) = (x(t), y(t)) : I \rightarrow I \times I$$

为连续曲线. 可以证明:

(1)  $\sigma(I) = I \times I$ ; (2)  $x(t), y(t)$  无处可导.

注. (i) 类似地可构造填满  $I^3$  的连续曲线.

(ii) (思考题) 如果  $\sigma$  是  $C^1$  曲线, 则它还能填满  $I^2$  吗?

**(3) 光滑函数的 Taylor 展开的系数可以为任意实数列**

设  $a_n \in \mathbb{R}$  ( $n \geq 0$ ), 记  $\xi_n = n + \sum_{i=0}^n |a_i|$ , 令

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \phi(\xi_n x) x^n,$$



其中  $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  为光滑函数,  $0 \leq \phi \leq 1$ , 且

$$\phi(x) = 1, \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]; \quad \phi(x) = 0, \quad \forall |x| \geq 1.$$

当  $n \geq 1, |x| \leq \xi_n^{-1}$ , 时,

$$\left| \frac{a_n}{n!} \phi(\xi_n x) x^n \right| \leq \frac{|a_n|}{n!} |x|^n \leq \frac{|a_n|}{n!} \frac{1}{(\xi_n)^n} \leq \frac{1}{n!},$$

而  $|x| > \xi_n^{-1}$  时上式也成立, 故定义  $f$  的级数一致收敛,  $f$  连续, 且  $f(0) = a_0$ .

可以证明,  $f$  是无穷次可导的, 且

$$f^{(n)}(0) = a_n, \quad \forall n \geq 1.$$

(\*)  $\phi$  是所谓的鼓包函数, 它可以这样构造: 先取

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

则  $g$  是光滑函数.

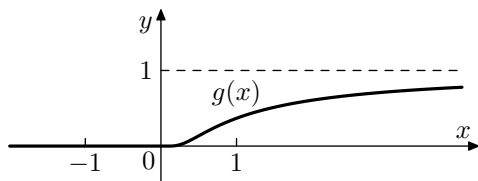


图 9.4 一个特殊的光滑函数

再取

$$h(x) = \frac{g(x)}{g(x) + g(1-x)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$h$  也是光滑函数. 最后, 令

$$\phi(x) = \begin{cases} h(2x+2), & x \leq 0, \\ h(-2x+2), & x > 0. \end{cases}$$

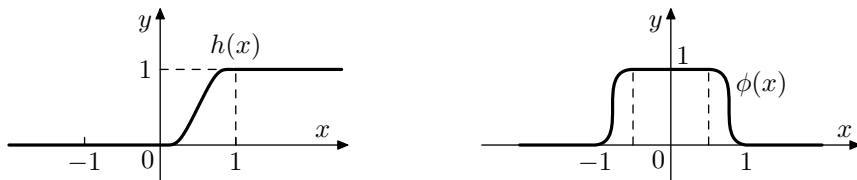


图 9.5 鼓包函数的构造

## 第十章 Fourier 分析

我们知道, 光滑函数在局部上可以用多项式逼近, 由此可得出幂级数的概念. 为此在前一章中我们还讨论了更一般的函数项级数. 在工程技术问题中, 人们经常遇到周期现象, 一个自然的想法就是, 能否将较为复杂的周期现象分解为简单周期现象的叠加? 历史上, Fourier 在研究热传导问题时用这种想法得出了丰富的结果, 由此引发的很多问题对现代分析学产生了深远的影响.

### §10.1 Fourier 级数

函数列

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

称为三角函数系, 如果这一列函数记为  $\{\varphi_i(x)\}$ , 则

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = 0, \quad \forall i \neq j,$$

这个积分性质称为三角函数系的正交性. 有限和

$$a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

称为三角多项式, 而形式和

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

称为三角级数, 其中  $a_0, a_k, b_k$  等称为该三角级数的系数.

三角函数都是周期为  $2\pi$  的函数. 一个自然的问题是, 如果  $f$  是一个周期为  $2\pi$  的函数, 能否用三角多项式去逼近它? 为了讨论这一问题, 以下我们假定  $f$  总是 Riemann 可积或广义绝对可积的函数 (即有瑕点但瑕积分绝对收敛的函数).

**定义 10.1.1** (Fourier 系数). 设  $f$  如上. 令

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, & a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, & k &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

$a_0, a_k, b_k$  称为  $f$  的 Fourier 系数, 形式和

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

称为  $f$  的 Fourier 级数或 Fourier 展开, 记为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

注. (1) 如果  $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$  一致收敛, 则由逐项积分可得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = a_0 \pi + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx \right) = a_0 \pi.$$

同理,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos kx dx + \sum_{m=1}^{\infty} \left( a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx dx \right. \\ &\quad \left. + b_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin mx dx \right) \\ &= 0 + a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx + 0 = a_k \pi, \end{aligned}$$

对于  $b_k$  有类似结果, 这就是为什么我们要象前面那样定义 Fourier 系数.

(2) 对于  $2\pi$  周期函数, 定义其 Fourier 系数时可以在长度为  $2\pi$  的任意区间上积分. 简单的观察表明, 如果  $f$  为奇函数, 则  $a_k = 0$ , 此时的 Fourier 展开称为正弦级数; 如果  $f$  为偶函数, 则  $b_k = 0$ , 此时的 Fourier 展开称为余弦级数.

例 10.1.1. 设  $f$  为  $2\pi$  周期函数, 且

$$f(x) = \begin{cases} 1/2, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x = 0, \pm\pi, \\ -1/2, & -\pi < x < 0. \end{cases}$$

求  $f$  的 Fourier 展开.

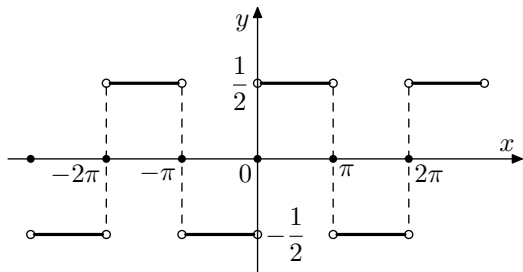


图 10.1 波形函数

解.  $f$  为奇函数, 因此  $a_k = 0$ . 而

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \frac{1}{2} \left[ \int_0^{\pi} \sin kx dx - \int_{-\pi}^0 \sin kx dx \right] \\ &= \frac{1}{k\pi} [1 - (-1)^k]. \end{aligned}$$

因此就得到了  $f$  的 Fourier 展开:

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

**例 10.1.2.** 设  $f$  为  $2\pi$  周期函数, 且  $f(x) = x^2$ ,  $-\pi \leq x \leq \pi$ . 求  $f$  的 Fourier 展开.

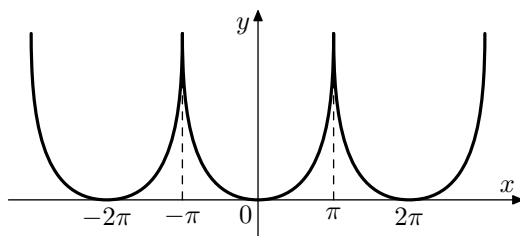


图 10.2 二次函数的周期展开

解.  $f$  为偶函数, 故  $b_k = 0$ , 利用分部积分得

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos kx dx = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{2}{k} x \sin kx dx \\ &= (-1)^k \frac{4}{k^2}, \quad (k > 0) \\ a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3} \pi^2, \end{aligned}$$

这就得到了  $f$  的 Fourier 展开:

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kx.$$

为了研究 Fourier 展开的收敛性, 我们需要对系数  $a_k, b_k$  做一些估计. 下面的结果我们在第六章第二节中已经证明过了, 现在再复习一下.

**定理 10.1.1** (Riemann-Lebesgue). 设  $f$  在  $[a, b]$  上 Riemann 可积或广义绝对可积, 则

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x dx = 0.$$

**证明.** 任给  $\varepsilon > 0$ , Riemann 可积或广义绝对可积的函数  $f$  可用阶梯函数逼近, 即存在阶梯函数  $g$ , 使得

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon.$$

此时,

$$\left| \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx - \int_a^b g(x) \cos \lambda x dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon.$$

因此, 只要对阶梯函数证明结论即可, 进而只要对  $[c, d] \subset [a, b]$  上的常值函数证明即可: 如果  $f = \mu$ , 则

$$\begin{aligned} \left| \int_c^d \mu \cos \lambda x dx \right| &= \left| \mu \cdot \frac{1}{\lambda} (\sin \lambda d - \sin \lambda c) \right| \\ &\leq \frac{2|\mu|}{\lambda} \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

对  $\sin \lambda x$  的证明是完全类似的.  $\square$

**推论 10.1.2.** 设  $f$  在  $[-\pi, \pi]$  上 Riemann 可积或广义绝对可积, 则其 Fourier 系数  $a_k \rightarrow 0, b_k \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow +\infty$ ).

如果  $f$  有更好的光滑性, 则其系数有更好的估计. 例如, 设  $f \in C^1[-\pi, \pi]$ , 且  $f(-\pi) = f(\pi)$ , 则

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ f(x) \frac{-1}{n} \cos nx \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{n} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx dx = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (\text{Riemann-Lebesgue}) \end{aligned}$$

同理可证  $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ . 一般地, 设  $f \in C^k([-\pi, \pi])$ ,  $f^{(i)}(-\pi) = f^{(i)}(\pi)$  ( $0 \leq i \leq k-1$ ), 则

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right), \quad b_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

### 习题 10.1

1. 证明, 三角多项式的 Fourier 展开就是它自己.
2. 在区间  $(-\pi, \pi)$  中求下列函数的 Fourier 展开:

$$(1) |x|; \quad (2) \cos^4 x; \quad (3) \sin^4 x; \quad (4) x \sin x.$$

3. 设  $f$  是周期为  $2\pi$  的函数, 且

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi-x}{2}, & x \in [0, 2\pi); \\ \frac{\pi}{2}, & x = 2\pi. \end{cases}$$

求  $f$  的 Fourier 展开.

4. 设  $f$  的 Fourier 系数为  $a_n, b_n$ . 试求  $f(x) \sin x, f(x+h)$  ( $h \in \mathbb{R}$ ) 的 Fourier 系数.

5. 设  $f$  是周期为  $2\pi$  的可积函数,  $a_n, b_n$  为其 Fourier 系数.

(1) 当  $n \geq 1$  时, 证明

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x + \frac{\pi}{n})] \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x + \frac{\pi}{n})] \sin nx dx.$$

(2) 假设  $f$  是  $\alpha$  阶 Hölder 连续函数, 利用 (1) 证明

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

6. 设  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上二阶连续可微, 且  $f(-\pi) = f(\pi), f'(-\pi) = f'(\pi)$ , 证明其 Fourier 系数有如下估计

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad b_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

7. 求下列极限:

$$(1) \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 \lambda x}{1+x^2} dx; \quad (2) \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \lambda x dx.$$

8. 设  $f$  是周期为  $2\pi$  的可积函数. 如果  $f$  在  $(0, 2\pi)$  上单调递减, 证明其 Fourier 系数  $b_n \geq 0, n = 1, 2, \dots$ . (提示: 第二积分中值定理.)

9. 设  $f$  为  $(-\pi, \pi)$  上单调递增有界函数, 则

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

10. 设  $f$  在  $[0, +\infty)$  上的无穷积分  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  绝对收敛, 证明

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(x) \sin \lambda x dx = 0.$$

## §10.2 Fourier 级数的收敛性

在前一节我们已看到, 如果  $f \in C^2[-\pi, \pi]$ ,  $f(-\pi) = f(\pi)$ ,  $f'(-\pi) = f'(\pi)$ , 则其 Fourier 系数满足估计  $a_n = o(n^{-2})$ ,  $b_n = o(n^{-2})$ , 因而 Fourier 展开一致收敛. 本节研究一般情形下 Fourier 级数的收敛性.

记

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx,$$

称为 Dirichlet 核. 利用等式

$$\sin \frac{1}{2}x \cos kx = \frac{1}{2} \left[ \sin(k + \frac{1}{2})x - \sin(k - \frac{1}{2})x \right]$$

可以求出 Dirichlet 核的表达式如下

$$\sigma_n(x) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{1}{2}x}, \quad \forall x \neq 2k\pi. \quad (10.1)$$

当  $x = 2k\pi$  时, 规定  $\sigma_n(x) = n + \frac{1}{2}$ , 此时  $\sigma_n$  为连续函数, 且

$$\int_0^\pi \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{1}{2}x} dx = \int_0^\pi \left( \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx \right) dx = \frac{\pi}{2}.$$

**应用:**  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ . 这个积分已经在第七章第四节和第九章第二节中出现过, 现在我们用新方法再算一次:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin x}{x} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{t} dt \quad (x \rightarrow (n + \frac{1}{2})t) \\ &= \frac{\pi}{2} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \right) \sin(n + \frac{1}{2})t dt \\ &= \frac{\pi}{2}. \quad (\text{Riemann-Lebesgue}) \end{aligned}$$

其中, 因为

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{t}{2} - t}{2t \sin \frac{t}{2}} = 0,$$

故  $\frac{1}{t} - \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}}$  可看成  $[0, \pi]$  中连续函数, 从而可以应用 Riemann-Lebesgue 引理.  $\square$

记  $f$  的 Fourier 展开的部分和为  $S_n(x)$ , 则

$$\begin{aligned}
 S_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \cos kx dt + \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \sin kx dt \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx) \right] dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right] dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \sigma_n(u) du,
 \end{aligned}$$

其中最后一个等式用到了变量代换  $u = t - x$ , 并且利用了被积函数的周期性, 即在  $[-\pi - x, \pi - x]$  上的积分等于在  $[-\pi, \pi]$  上的积分. 利用 (10.1), 并注意  $\sigma_n$  是偶函数, 我们可以进一步将上式改写为

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{\sin \frac{u}{2}} du.$$

任给  $\delta > 0$ , 由 Riemann-Lebesgue 引理,

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) &= \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{\sin \frac{u}{2}} du \\
 &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} \frac{f(x+u) + f(x-u)}{2 \sin \frac{u}{2}} \sin(n + \frac{1}{2})u du \\
 &= \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{\sin \frac{u}{2}} du,
 \end{aligned}$$

因此,  $S_n(x)$  的收敛性只和  $f$  在  $x$  附近的性态有关, 这是 Riemann 的发现, 有时称为 Riemann 局部化原理.

**定理 10.2.1** (Dini 判别法). 设  $f$  如前. 如果存在  $\delta > 0$ , 使得

- (1)  $f$  在  $x$  处的右极限  $f(x+0)$  和左极限  $f(x-0)$  存在;
- (2) 积分

$$\int_0^{\delta} \frac{f(x+u) - f(x+0)}{u} du, \quad \int_0^{\delta} \frac{f(x-u) - f(x-0)}{u} du,$$

绝对收敛, 则  $f$  的 Fourier 展开在点  $x$  处收敛于值  $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ .

证明基本上应用 Riemann-Lebesgue 引理, 以及注意到函数  $\frac{1}{u} - \frac{1}{2 \sin \frac{u}{2}}$  在  $[0, \delta]$  上的连续性. 下面我们对一个特殊情形加以证明, 这个情形对大多数应用而言是足够的.



**定义 10.2.1.** 设  $f$  是定义在  $[a, b]$  上的函数, 如果存在  $[a, b]$  的分割

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b,$$

使得在每个小区间  $[t_{i-1}, t_i]$  ( $i = 1, 2, \cdots, m$ ) 上定义的函数

$$f_i(x) = \begin{cases} f(t_{i-1} + 0), & x = t_{i-1}, \\ f(x), & x \in (t_{i-1}, t_i), \\ f(t_i - 0), & x = t_i, \end{cases}$$

都是  $[t_{i-1}, t_i]$  上的可导函数, 则称  $f$  是分段可导函数.

**定理 10.2.2** (Dirichlet). 设  $f$  是一个周期为  $2\pi$  的分段可导函数, 则对任意的  $x \in [-\pi, \pi]$ ,  $f$  的 Fourier 展开在  $x$  处收敛到  $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ .

**证明.** 由前面的计算以及 Riemann-Lebesgue 引理, 我们有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{\sin \frac{u}{2}} du \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+u) - f(x+0)}{2 \sin \frac{u}{2}} \sin(n + \frac{1}{2})u du + \frac{1}{2} f(x+0) \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x-u) - f(x-0)}{2 \sin \frac{u}{2}} \sin(n + \frac{1}{2})u du + \frac{1}{2} f(x-0) \\ &= \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]. \end{aligned}$$

最后的等式是因为, 如果  $f$  分段可导, 则

$$\frac{f(x+u) - f(x+0)}{2 \sin \frac{u}{2}} \quad \text{和} \quad \frac{f(x-u) - f(x-0)}{2 \sin \frac{u}{2}}$$

关于  $u$  是分段连续 (可积) 的, 从而可以应用 Riemann-Lebesgue 引理.  $\square$

**注.** 分段可导的条件只是用来保证 Riemann-Lebesgue 引理可用. 从证明过程即可看出, 如果  $f$  在  $x$  附近满足  $\alpha$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ) 阶 Hölder 条件, 则定理结论仍然成立.

前节例 10.1.1 和例 10.1.2 都满足上述定理的条件, 因此, 在例 10.1.1 中取  $x = 1$  就得到

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)}{2k+1},$$

在例 10.1.2 中取  $x = \pi$  就得到

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

下面是一些进一步的例子.

**例 10.2.1.** 求函数  $f(x) = \cos \mu x$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$  的 Fourier 展开 ( $\mu$  不是整数).

**解.** 将  $f$  延拓为  $\mathbb{R}$  上以  $2\pi$  为周期的周期函数, 这是偶函数, 因此  $b_k = 0$ . 而

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos \mu x \cos kx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\cos(\mu - k)x + \cos(\mu + k)x] dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin(\mu - k)\pi}{\mu - k} + \frac{\sin(\mu + k)\pi}{\mu + k} \right] = \frac{2\mu(-1)^k \sin \mu\pi}{\pi(\mu^2 - k^2)}. \end{aligned}$$

由 Dirichlet 定理可得

$$\cos \mu x = \frac{2\mu \sin \mu\pi}{\pi} \left( \frac{1}{2\mu^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\mu^2 - n^2} \cos nx \right), \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

在上式中取  $x = \pi$  得

$$\cos \mu\pi = \frac{2\mu \sin \mu\pi}{\pi} \left( \frac{1}{2\mu^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^2 - n^2} \right),$$

上式可改写为

$$\cot \pi\mu - \frac{1}{\pi\mu} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\mu}{\mu^2 - n^2}.$$

当  $0 \leq \mu \leq x < 1$  时, 上式右边的无穷求和关于  $\mu$  一致收敛, 从而可逐项积分:

$$\int_0^x \left( \cot \pi\mu - \frac{1}{\pi\mu} \right) d\mu = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 - \frac{x^2}{n^2} \right),$$

由此得到  $\sin \pi x$  的如下展开式:

$$\sin \pi x = \pi x \left( 1 - \frac{x^2}{1^2} \right) \left( 1 - \frac{x^2}{2^2} \right) \left( 1 - \frac{x^2}{3^2} \right) \cdots \quad (10.2)$$

在第九章第二节已经得到过这个等式了, 见 (9.5) 式.

**例 10.2.2.** 跟上例类似, 我们有

$$\sin \mu x = \frac{2 \sin \mu\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\mu^2 - n^2} \sin nx, \quad \forall x \in (-\pi, \pi).$$

如果一个函数仅在  $(0, \pi)$  上定义, 则我们可以首先将它延拓为周期为  $2\pi$  的函数, 然后再作 Fourier 展开. 常用的延拓有奇延拓和偶延拓, 即分别延拓为奇函数和偶函数.

**例 10.2.3.** 将函数

$$f(x) = x, \quad x \in (0, \pi)$$

分别作奇延拓和偶延拓, 然后分别求 Fourier 展开.

解. 奇延拓: 令  $f(x) = x, x \in (-\pi, 0)$ , 在 0 和  $\pm\pi$  处规定  $f$  为 0.

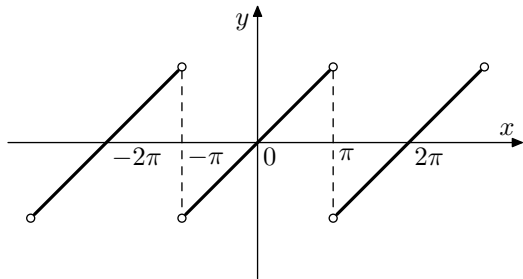


图 10.3 奇延拓

则 Fourier 系数为

$$\begin{aligned} a_k &= 0, \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin kx dx \\ &= \frac{2}{\pi} x \frac{-1}{k} \cos kx \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{k} \cos kx dx \\ &= (-1)^{k-1} \frac{2}{k}. \end{aligned}$$

因此

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n}, \quad 0 \leq x < \pi.$$

偶延拓: 令  $f(x) = -x, x \in (-\pi, 0)$ , 在 0 处  $f(0) = 0$ , 在  $\pm\pi$  处  $f$  为  $\pi$ .

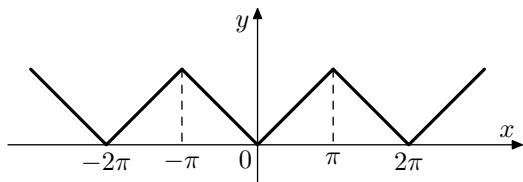


图 10.4 偶延拓

此时 Fourier 系数为

$$\begin{aligned} b_k &= 0, \quad a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi \\ a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos kx dx = \frac{2}{k^2 \pi} [(-1)^k - 1]. \end{aligned}$$

因此

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

一般地, 如果一个函数周期为  $2l$ , 和周期  $2\pi$  的情形类似, 令

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx, \quad n = 1, 2, \dots. \end{aligned}$$

则  $f$  有 Fourier 展开

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right).$$

通过变量替换  $t = \frac{\pi x}{l}$  可以将周期  $2l$  的函数变为周期  $2\pi$  函数, 因此容易看出, Dirichlet 定理对于周期为  $2l$  的函数仍成立.

**例 10.2.4.** 设  $f(x)$  是以 2 为周期的周期函数, 且

$$f(x) = x^2, \quad x \in [-1, 1]$$

求其 Fourier 展开.

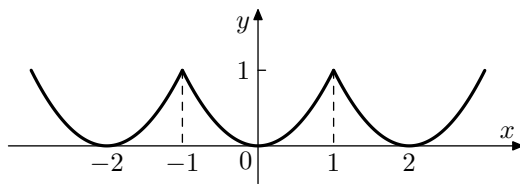


图 10.5 一般周期函数的展开

**解.**  $f$  为偶函数, 因此  $b_k = 0$ . 而

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}, \\ a_n &= 2 \int_0^1 x^2 \cos n\pi x dx = \frac{4}{n^2 \pi^2} (-1)^n, \quad (\text{分部积分}) \end{aligned}$$

这说明

$$x^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi x, \quad x \in [-1, 1].$$

如果作变量替代  $t = \pi x$ , 则上式就是前节例 10.1.2 中的等式. 如果将  $x$  变为  $\pi^{-1}(x - \pi)$ , 就得到如下等式:

$$(\star) \quad x - \frac{x^2}{2\pi} = \frac{\pi}{3} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

它当然也可以通过  $f(x) = x - \frac{x^2}{2\pi}$  ( $0 \leq x \leq 2\pi$ ) 作 Fourier 展开得到, 下一节我们将要用到这个等式.

### 习题 10.2

#### 1. 利用等式

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} = \int_0^x \sum_{k=1}^n \cos kt dt = -\frac{x}{2} + \int_0^x \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt$$

求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$  之和.

#### 2. 证明

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin(k + \frac{1}{2})x = \frac{\sin^2 \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}, \quad \forall n \geq 1,$$

并由此说明

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2 \frac{nx}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} dx = n\pi, \quad \forall n \geq 1.$$

#### 3. 求 $|\sin x|$ 和 $|\cos x|$ 的 Fourier 展开级数, 并说明其 Fourier 级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛到自身.

#### 4. 利用本节第一例证明下面的等式 ( $\mu \notin \mathbb{Z}$ ):

$$\frac{1}{\sin \mu\pi} = \frac{1}{\mu\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \mu\pi}{(\mu\pi)^2 - (n\pi)^2}.$$

#### 5. 求下列函数的 Fourier 展开:

- (1)  $f(x) = e^{ax}$ ,  $x \in (-\pi, \pi)$ ; (2)  $f(x) = x^2 \sin^2 x$ ,  $x \in (-\pi, \pi)$ ;  
 (3)  $f(x) = \sin ax$ ,  $x \in (-\pi, \pi)$ ,  $a$  不是整数.

#### 6. 将下列分段定义的函数展开为 Fourier 余弦级数:

- (1)  $f(x) = x$ ,  $x \in [0, 1]$ ;  $f(x) = 2 - x$ ,  $x \in [1, 2]$ .  
 (2)  $f(x) = 1$ ,  $x \in [0, a]$ ;  $f(x) = 0$ ,  $x \in [a, \pi]$ .

#### 7. 将下列函数展开为 Fourier 正弦级数:

- (1)  $f(x) = \cos 2x$ ,  $x \in [0, \pi]$ ; (2)  $f(x) = x - \frac{x^2}{2}$ ,  $x \in [0, 1]$ .

8. 在区间  $(-l, l)$  上将下列函数展开为 Fourier 级数:

$$(1) x, \quad (2) x + |x|.$$

9. 将函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & 1 < x < 2, \\ 3 - x, & 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

展开成周期为 3 的 Fourier 级数.

10. 设  $f$  为  $[a, b]$  上 Riemann 可积函数,  $g$  为  $\mathbb{R}$  上周期函数, 周期为  $T$  且在  $[0, T]$  上可积. 证明

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)g(\lambda x)dx = \frac{1}{T} \int_a^b f(x)dx \int_0^T g(x)dx.$$

11. (\*) 设  $f(x)$  在  $[0, a]$  ( $0 < a < \pi$ ) 上连续, 证明

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \int_0^a f(x) \frac{\sin^2 \lambda x}{\sin^2 x} dx = \frac{\pi}{2} f(0).$$

### §10.3 Parseval 恒等式

在前一节我们考虑了 Fourier 级数的逐点收敛性. 本节我们考虑积分意义下的收敛性, 这时对函数的要求较低.

设  $[a, b]$  为闭区间, 我们定义函数集合  $R^2[a, b]$  如下:  $R^2[a, b]$  中的函数  $f$  Riemann 可积, 或  $f$  有瑕点但  $f^2$  积分收敛. 显然,  $R^2[a, b]$  为线性空间, 且若  $f, g \in R^2[a, b]$ , 则仍有 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left[ \int_a^b f^2(x)dx \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[ \int_a^b g^2(x)dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

**定理 10.3.1** (Parseval 等式). 设  $f \in R^2[-\pi, \pi]$ , 且  $f$  的 Fourier 展开为

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

则

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2). \quad (10.3)$$

为了简单起见, 下面我们以  $f$  Riemann 可积为例给出证明, 一般情形的证明只需略作改动即可.

(1) 记

$$S_n(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

由三角函数系的正交性质, 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_n^2(f) dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{a_0}{2} \right)^2 dx + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \left( \int_{-\pi}^{\pi} a_k^2 \cos^2 kx dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_k^2 \sin^2 kx dx \right) \\ &= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2). \end{aligned} \quad (10.4)$$

其次就有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f - S_n(f)]^2 dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx - \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot S_n(f) dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_n^2(f) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx - \frac{2}{\pi} \left[ \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f dx + \sum_{k=1}^n \left( a_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + b_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \right) \right] + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_n^2(f) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx - 2 \left[ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right] + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_n^2(f) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_n^2(f) dx, \end{aligned} \quad (10.5)$$

由此得到

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_n^2(f) dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx. \quad (10.6)$$

根据以上几式可知, (10.3) 式成立

$$\iff \int_{-\pi}^{\pi} S_n^2(f) dx \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx \iff \int_{-\pi}^{\pi} [f - S_n(f)]^2 dx \rightarrow 0. \quad (10.7)$$

(2) 如果 (10.3) 对  $f, g \in R^2[a, b]$  均成立, 则当  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  时,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} [\lambda f + \mu g - S_n(\lambda f + \mu g)]^2 dx &= \int_{-\pi}^{\pi} [\lambda(f - S_n(f)) + \mu(g - S_n(g))]^2 dx \\ &\leq 2\lambda^2 \int_{-\pi}^{\pi} [f - S_n(f)]^2 dx + 2\mu^2 \int_{-\pi}^{\pi} [g - S_n(g)]^2 dx. \end{aligned}$$

由 (10.7) 知, (10.3) 式对函数  $\lambda f + \mu g$  也成立.

(3) 显然, (10.3) 对常值函数成立. 下面考虑函数

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < a, \\ 1, & a \leq x \leq b, \\ 0, & b < x < \pi. \end{cases}$$

将  $\varphi$  延拓为  $\mathbb{R}$  上周期  $2\pi$  函数, 其 Fourier 系数为

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) dx = \frac{1}{\pi} (b-a), \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \int_a^b \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \frac{1}{k} (\sin kb - \sin ka), \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \int_a^b \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \frac{1}{k} (\cos ka - \cos kb). \end{aligned}$$

此时

$$\begin{aligned} & \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \\ &= \frac{1}{2\pi^2} (b-a)^2 + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} [(\sin kb - \sin ka)^2 + (\cos kb - \cos ka)^2] \\ &= \frac{1}{2\pi^2} (b-a)^2 + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} [1 - \cos k(b-a)] \\ &= \frac{1}{2\pi^2} (b-a)^2 + \frac{1}{3} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k(b-a)}{k^2} \\ &= \frac{b-a}{\pi} \quad (\text{用到前一节最后的等式}(\star)) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^2(x) dx. \end{aligned}$$

(4) 由 (2), (3) 知 (10.3) 对阶梯函数成立.

(5) 现在设  $f$  可积, 则任给  $\varepsilon > 0$ , 存在阶梯函数  $g$  使得

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f-g)^2 dx \leq \varepsilon.$$

因为 (10.3) 对  $g$  成立, 故  $n$  充分大时

$$\int_{-\pi}^{\pi} [g - S_n(g)]^2 dx \leq \varepsilon,$$

从而

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} [f - S_n(f)]^2 dx &\leq 3 \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} (f-g)^2 dx + \int_{-\pi}^{\pi} [g - S_n(g)]^2 dx + \int_{-\pi}^{\pi} [S_n(g-f)]^2 dx \right\} \\ &\leq 3 \left\{ \varepsilon + \varepsilon + \int_{-\pi}^{\pi} (g-f)^2 dx \right\} \quad (\text{用到 (10.3)}) \\ &\leq 9\varepsilon. \end{aligned}$$

这说明

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f - S_n(f)]^2 dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

即 (10.3) 对  $f$  成立. □



**推论 10.3.2** (广义 Parseval 等式). 设  $f, g \in R^2[-\pi, \pi]$ , 则

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\alpha_n + b_n\beta_n),$$

其中  $a_n, b_n$  是  $f$  的 Fourier 系数,  $\alpha_n, \beta_n$  是  $g$  的 Fourier 系数.

**证明.** 分别对  $f+g$  和  $f-g$  应用 Parseval 等式, 然后二者相减即可.  $\square$

**推论 10.3.3** (惟一性). 设  $f, g$  为  $[-\pi, \pi]$  上的连续函数, 如果  $f$  和  $g$  的 Fourier 系数相同, 则  $f \equiv g$ .

**证明.** 考虑  $f-g$ , 其 Fourier 系数恒为 0, 由 Parseval 等式,

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f-g)^2 dx = 0.$$

由  $f-g$  连续知  $f \equiv g$ .  $\square$

**推论 10.3.4.** 设  $f$  在  $[-\pi, \pi]$  上连续, 如果其 Fourier 展开一致收敛, 则级数和必为  $f$ .

**证明.** 记其 Fourier 展开的和为

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

则由一致收敛性知, 上式可逐项积分, 根据本章开头的计算可知  $S(x)$  的 Fourier 系数和  $f$  的 Fourier 系数相同. 由前一推论知  $S(x) \equiv f(x)$ .  $\square$

**例 10.3.1.** 由前节例 10.1.2 及 Parseval 等式得

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{3} \pi^2 \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4}{n^2} \right)^2$$

整理以后就得到下面的等式

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

### 习题 10.3

1. 设  $T_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^n (A_k \cos kx + B_k \sin kx)$  为三角多项式, 利用三角函数系的正交性质证明, 对任何 Riemann 可积函数  $f$ , 均有

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T_n(x)|^2 dx \geq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^2 dx,$$

其中  $S_n(x)$  为  $f(x)$  的 Fourier 展开的部分和, 等号成立当且仅当  $A_0 = a_0$ ,  $A_k = a_k$ ,  $B_k = b_k$  ( $k \geq 1$ ).

2. 判断下列级数是否为某个 Riemann 可积函数的 Fourier 展开:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p} \quad (p > 1).$$

3. 证明下列等式:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n^3} = \frac{\pi^2}{12}x - \frac{x^3}{12}, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

4. 利用  $f(x) = x^3$  的 Fourier 展开及 Parseval 等式求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$ .

5. 利用函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi-1}{2}x, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{\pi-x}{2}, & 1 < x \leq \pi. \end{cases}$$

的 Fourier 展开求下列级数的和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^4}.$$

6. 设  $f$  在  $[-\pi, \pi]$  上可微, 且

$$f(-\pi) = f(\pi), \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0.$$

如果  $f'$  可积并平方可积, 则

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2 dx \geq \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx,$$

并求等号成立的条件.

7. 证明

$$(1) \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx = -\frac{\pi^2}{6}, \quad (2) \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} dx = -\frac{\pi^2}{12}.$$

8. (\*) 证明下列等式:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos nx}{n} = \ln \left( 2 \cos \frac{x}{2} \right), \quad x \in (-\pi, \pi),$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = -\ln \left( 2 \sin \frac{x}{2} \right), \quad x \in (0, 2\pi).$$

## §10.4 Fourier 级数的积分和微分

我们首先说明, 不管收敛与否, 可积函数的 Fourier 级数总是可以逐项积分的.

**定理 10.4.1** (Reymond). 设  $f$  在  $[-\pi, \pi]$  上 Riemann 可积, 其 Fourier 展开为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

则对任意区间  $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$ , 有

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b (a_n \cos nx + b_n \sin nx) dx.$$

**证明.** 考虑 §10.3 中用到的特征函数

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b], \\ 0, & x \in [-\pi, a) \cup (b, \pi], \end{cases}$$

其 Fourier 系数记为  $\alpha_n, \beta_n$ , 则由广义 Parseval 等式, 有

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \varphi(x) dx = \frac{a_0}{2} \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \alpha_n + b_n \beta_n),$$

在上式中代入

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) dx = \frac{1}{\pi} (b - a), \\ \alpha_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos nxdx = \frac{1}{\pi} \int_a^b \cos nxdx, \\ \beta_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin nxdx = \frac{1}{\pi} \int_a^b \sin nxdx, \end{aligned}$$

即得欲证之等式. □

为了考虑 Fourier 级数的微分, 我们先考虑一致收敛性.

**定理 10.4.2.** 设  $f$  是  $[-\pi, \pi]$  上的连续函数,  $f(-\pi) = f(\pi)$ . 如果  $f$  在  $[-\pi, \pi]$  上分段可导, 且  $f'$  Riemann 可积, 则  $f(x)$  的 Fourier 级数在  $[-\pi, \pi]$  上一致收敛于  $f(x)$ :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

**证明.** 根据前一节推论 10.3.4, 只要证明上式右边是一致收敛就可以了. 事实上, 记  $f'$  的 Fourier 系数分别为  $a'_n, b'_n$ , 则由分部积分得 (其中用到条件  $f(-\pi) = f(\pi)$ )

$$\begin{aligned} a'_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nxdx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) n \sin nxdx = nb_n, \\ b'_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nxdx = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) n \cos nxdx = -na_n. \end{aligned}$$

对可积函数  $f'$  用 Parseval 等式得

$$\frac{1}{2}(a'_0)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} [(a'_n)^2 + (b'_n)^2] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f')^2 dx.$$

另一方面, 我们有估计

$$\begin{aligned} |a_n \cos nx + b_n \sin nx| &\leq |a_n| + |b_n| \\ &= \frac{1}{n} |a'_n| + \frac{1}{n} |b'_n| \\ &\leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n^2} + |a'_n|^2 \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n^2} + |b'_n|^2 \right), \end{aligned}$$

根据函数项级数的 Weierstrass 判别法知  $f$  的 Fourier 展开的确是收敛的.  $\square$

根据以上证明可知, 在定理的条件下,  $f'$  的 Fourier 展开为

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos nx - na_n \sin nx),$$

一般来说, 要上式成为等式的话需要加进一步的条件.

**定理 10.4.3.** 设  $f$  是以  $2\pi$  为周期的连续可导函数. 如果  $f'$  在  $[-\pi, \pi]$  上分段可导, 则  $f$  的 Fourier 展开

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

可在  $[-\pi, \pi]$  上逐次求导:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos nx - na_n \sin nx),$$

当  $f''$  Riemann 可积时, 上式右边的级数还是一致收敛的.

**证明.** 应用本章第二节 Dirichlet 定理和定理 10.4.2 即可.  $\square$

应用定理 10.4.2 我们可以用多项式去一致地逼近闭区间上的连续函数.

**定理 10.4.4 (Weierstrass).** 设  $f$  是  $[-\pi, \pi]$  上的连续函数,  $f(-\pi) = f(\pi)$ . 则任给  $\varepsilon > 0$ , 存在三角多项式  $T(x)$ , 使得

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

**证明.** 首先, 连续函数  $f$  可以用分段线性函数一致逼近. 即存在周期为  $2\pi$  的分段线性函数  $g$ , 使得

$$|f(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

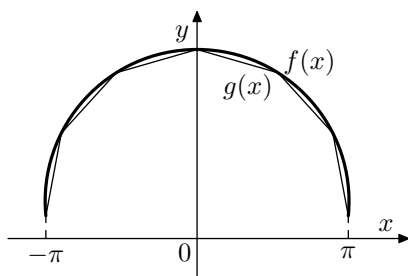


图 10.6 周期的分段线性逼近

其次,  $g$  满足定理 10.4.2 的条件, 故其 Fourier 展开一致收敛于  $g$ . 即  $n$  充分大时

$$|g(x) - S_n(g)(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

这说明

$$|f(x) - S_n(g)(x)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - S_n(g)(x)| < \varepsilon.$$

这就证明了定理. □

**推论 10.4.5.** 设  $f$  为  $[-\pi, \pi]$  上的连续函数,  $f(-\pi) = f(\pi)$ . 则任给  $\varepsilon > 0$ , 存在多项式  $P(x)$ , 使得

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

**证明.** 由 Weierstrass 定理, 存在三角多项式  $T(x)$  使得

$$|f(x) - T(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

由于三角函数的 Taylor 展开都是一致收敛的, 从而存在多项式  $P(x)$  使得

$$|T(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

这说明

$$|f(x) - P(x)| \leq |f(x) - T(x)| + |T(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

**推论 10.4.6.**  $f$  为  $[a, b]$  上的连续函数, 则任给  $\varepsilon > 0$ , 存在多项式  $P(x)$ , 使得

$$|f(x) - P(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b].$$

**证明.** 利用线性变换  $t = \frac{\pi}{b-a}(x-a)$  把  $[a, b]$  上的函数变为  $[0, \pi]$  上的函数. 将此函数以  $2\pi$  为周期作偶延拓, 然后利用前一推论即可, 注意线性变换将多项式仍变成多项式.  $\square$

#### 习题 10.4

##### 1. 证明等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^4} = \frac{\pi}{96}(\pi-2x)(\pi+2\pi x-2x^2), \quad x \in [0, \pi].$$

(提示: 可从已知级数出发逐项积分.)

2. 证明, 三角级数  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  为某个 Riemann 可积函数的 Fourier 展开的必要条件是级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$  收敛.

3. 设  $f(x)$  为  $[0, \pi]$  上的连续函数. 证明, 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在由余弦函数组成的三角多项式  $P(x)$ , 使得

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [0, \pi].$$

4. 设  $f(x)$  为  $[0, \pi]$  上的连续函数, 且  $f(0) = f(\pi) = 0$ . 证明, 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在由正弦函数组成的三角多项式  $P(x)$ , 使得

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [0, \pi].$$

5. 设  $f(x)$  为  $[a, b]$  上的连续函数, 如果

$$\int_a^b x^n f(x) dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

则  $f(x) = 0$ . (提示: 用多项式逼近  $f$ .)

6. 设  $f(x)$  为  $[a, b]$  上的连续函数, 如果对任意正整数  $n \geq 1$ , 均有

$$\int_a^b x^n f(x) dx = 0,$$

则  $f(x) = 0$ .

7. 设  $f(x)$  为  $[0, \pi]$  上的连续函数, 如果

$$\int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

则  $f(x) = 0$ .

8. 设  $f(x)$  为  $[0, \pi]$  上的连续函数, 如果

$$\int_0^\pi f(x) \cos nx dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

则  $f(x)$  为常值函数. (提示: 考虑  $f(x) - c$ .)

9. 设  $f(x)$  为  $[-\pi, \pi]$  上的 Riemann 可积函数, 且  $\int_{-\pi}^\pi f(x) dx = 0$ . 证明, 函数

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \text{ 的 Fourier 展开在 } [-\pi, \pi] \text{ 上一致收敛到它自己.}$$

10. (\*) Bernoulli 多项式  $\varphi_n(x)$  可以如下递归地定义:

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi'_n(x) = n\varphi_{n-1}(x), \quad \int_0^1 \varphi_n(x) dx = 1,$$

证明, 在  $[0, 1]$  区间上, 当  $k \neq 0$  为偶数时,

$$\varphi_k(x) = (-1)^{1+k/2} \frac{2(k!)}{(2\pi)^k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \cos 2\pi nx,$$

当  $k \neq 1$  为奇数时,

$$\varphi_k(x) = (-1)^{(k+1)/2} \frac{2(k!)}{(2\pi)^k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \sin 2\pi nx.$$

## §10.5 Fourier 级数的进一步讨论



本节内容可作为选读材料.

### §10.5.1 平均收敛性

我们考虑连续周期函数的 Fourier 展开. 设  $f(x)$  是以  $2\pi$  为周期的连续函数, 其 Fourier 展开的部分和记为  $S_n(x)$ , 则  $S_n(x)$  可以写为

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}} du.$$

记

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(x),$$

利用等式

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin(k + \frac{1}{2})u = \frac{\sin^2 \frac{nu}{2}}{\sin \frac{u}{2}}$$

可得

$$\begin{aligned}\sigma_n(f)(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+u)}{2 \sin \frac{u}{2}} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin(k + \frac{1}{2}) u du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \frac{1}{n} \frac{\sin^2 \frac{nu}{2}}{\sin^2 \frac{u}{2}} du.\end{aligned}$$

如果在上式中取  $f(x) = 1$  还可得到

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n} \frac{\sin^2 \frac{nu}{2}}{\sin^2 \frac{u}{2}} du = 1,$$

因此又有

$$\sigma_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+u) - f(x)] \frac{1}{n} \frac{\sin^2 \frac{nu}{2}}{\sin^2 \frac{u}{2}} du.$$

**定理 10.5.1** (Fejér). 设  $f(x)$  是以  $2\pi$  为周期的连续函数, 则  $\sigma_n(f)$  一致收敛于  $f$ .

**证明.** 任给  $\varepsilon > 0$ , 由  $f$  的一致连续性知, 存在  $\delta > 0$ , 当  $|u| < \delta$  时

$$|f(x+u) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

记  $M = \max |f(x)|$ , 则当  $n > M\varepsilon^{-1} \sin^{-2} \frac{\delta}{2}$  时,

$$\begin{aligned}|\sigma_n(f)(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |f(x+u) - f(x)| \frac{1}{n} \frac{\sin^2 \frac{nu}{2}}{\sin^2 \frac{u}{2}} du \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |u| \leq \pi} |f(x+u) - f(x)| \frac{1}{n} \frac{\sin^2 \frac{nu}{2}}{\sin^2 \frac{u}{2}} du \\ &\leq \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{n} \frac{\sin^2 \frac{nu}{2}}{\sin^2 \frac{u}{2}} du + 2M \frac{1}{n \sin^2 \frac{\delta}{2}} < 3\varepsilon,\end{aligned}$$

这说明  $\sigma_n(f)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上一致收敛于  $f(x)$ . □

注. (1) 记

$$\mathcal{F}_n(u) = \frac{1}{2\pi n} \frac{\sin^2 \frac{nu}{2}}{\sin^2 \frac{u}{2}},$$

称为 Fejér 核, 上述定理的证明主要用到了如下性质:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{F}_n(u) du = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta \leq |u| \leq \pi} \mathcal{F}_n(u) du = 0, \quad \delta > 0.$$

(2) 由此定理可以立即知道连续周期函数可以用三角多项式一致逼近.

(3) 由此定理还可推出, 连续周期函数的 Fourier 展开如果收敛, 则必收敛到自身. 这是因为, 如果级数收敛到  $g$ , 则其部分和的平均值也收敛到  $g$ , 因而  $g$  就是  $f$  自身. 考虑级数部分和平均值收敛性的方法一般称为 Cesàro 求和法.

值得指出的是, 1873 年, du Bois-Reymond 构造了一个连续函数, 它的 Fourier 级数并非处处收敛. 研究 Fourier 级数的收敛性是分析学中重要而困难的问题.



## §10.5.2 一致收敛性

先考虑单调函数的 Fourier 级数.

**引理 10.5.2** (Dirichlet). 设  $g$  为  $[0, h]$  上的单调函数, 则

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^h g(u) \frac{\sin \lambda u}{u} du = \frac{\pi}{2} g(0+0).$$

**证明.** 不妨设  $g$  单调递增, 则

$$\int_0^h g(u) \frac{\sin \lambda u}{u} du = \int_0^h [g(u) - g(0+0)] \frac{\sin \lambda u}{u} du + g(0+0) \int_0^h \frac{\sin \lambda u}{u} du,$$

当  $\lambda \rightarrow +\infty$  时, 上式右边第二个积分趋于  $\frac{\pi}{2} g(0+0)$ , 因此只要证明第一个积分趋于零即可.

任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 当  $0 < u \leq \delta$  时  $0 \leq g(u) - g(0+0) < \varepsilon$ . 此时

$$\begin{aligned} \int_0^h [g(u) - g(0+0)] \frac{\sin \lambda u}{u} du &= \int_0^\delta [g(u) - g(0+0)] \frac{\sin \lambda u}{u} du \\ &\quad + \int_\delta^h [g(u) - g(0+0)] \frac{\sin \lambda u}{u} du \\ &= I_1 + I_2, \end{aligned}$$

根据积分第二中值定理,

$$I_1 = [g(\delta) - g(0+0)] \int_\xi^\delta \frac{\sin \lambda u}{u} du = [g(\delta) - g(0+0)] \int_{\lambda\xi}^{\lambda\delta} \frac{\sin u}{u} du,$$

因此

$$|I_1| \leq 2L\varepsilon,$$

其中

$$\left| \int_0^x \frac{\sin u}{u} du \right| \leq L, \quad \forall x \geq 0.$$

根据 Riemann-Lebesgue 引理, 当  $\lambda \rightarrow +\infty$  时  $I_2 \rightarrow 0$ , 这表明引理成立.  $\square$

根据这个引理可以立即得到下面的推论:

**推论 10.5.3** (Dirichlet-Jordan). 设  $f(x)$  为可积函数, 如果  $f(x)$  在  $x_0$  附近的区间  $[x_0-h, x_0+h]$  上单调, 则其 Fourier 级数在  $x_0$  处收敛于  $\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]$ .

从上面这一段讨论我们可以看出, 函数的单调性与 Fourier 级数的收敛性有很密切的关系. 下面的引理显示了单调性的重要作用.

**引理 10.5.4.** 设  $f(x)$  为  $(-\pi, \pi)$  上的单调有界函数, 则其 Fourier 系数  $a_n, b_n$  有如下估计

$$|na_n| \leq \frac{1}{\pi} |f(\pi-0) - f(-\pi+0)|, \quad |nb_n| \leq \frac{2}{\pi} |f(\pi-0) - f(-\pi+0)|, \quad \forall n \geq 1.$$

**证明.** 不妨设  $f$  单调递增. 以  $a_n$  为例, 由积分第二中值公式, 有

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(-\pi + 0)] \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} [f(\pi - 0) - f(-\pi + 0)] \int_{\xi}^{\pi} \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} [f(\pi - 0) - f(-\pi + 0)] \frac{-1}{n} \sin n\xi, \end{aligned}$$

由此可以立即得到所需估计.  $\square$

**推论 10.5.5.** 设  $f(x)$  为  $[-\pi, \pi]$  上的 Lipschitz 函数, 则存在常数  $M$  使得其 Fourier 系数  $a_n, b_n$  满足条件  $|na_n| \leq M, |nb_n| \leq M, \forall n \geq 1$ .

**证明.** 设  $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ , 则

$$f(x) = Lx - (Lx - f(x)),$$

我们说明  $g(x) = Lx - f(x)$  为单调递增函数. 事实上, 设  $y \geq x$ , 则

$$g(y) - g(x) = L(y - x) - [f(y) - f(x)] \geq L(y - x) - |f(y) - f(x)| \geq 0.$$

因此  $f(x)$  是两个单调递增函数之差, 根据前一引理即得欲证结论.  $\square$

下面的结果是一个 Tauber 型定理.

**定理 10.5.6 (Hardy).** 设函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  的部分和为  $S_n(x)$ , 记

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k(x),$$

如果  $\sigma_n(x)$  一致收敛于  $f(x)$ , 且  $\{nf_n(x)\}$  一致有界, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  一致收敛于  $f$ .

**证明.** 由已知条件, 存在常数  $M$ , 使得  $|nf_n(x)| < M$  对任意  $x$  和  $n$  成立. 任给  $0 < \varepsilon < 1$ , 存在  $N_0$ , 当  $n \geq N_0$  时

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \varepsilon^2, \quad \forall x.$$

当  $m > n \geq N_0$  时, 由

$$m\sigma_m(x) - n\sigma_n(x) = (m - n)S_m(x) - \sum_{k=n+2}^m (k - 1 - n)f_k(x)$$

得

$$m(\sigma_m(x) - f(x)) - n(\sigma_n(x) - f(x)) = (m - n)(S_m(x) - f(x)) - \sum_{k=n+2}^m (k - 1 - n)f_k(x),$$

我们有如下估计

$$\begin{aligned}
 |S_m(x) - f(x)| &\leq \frac{m}{m-n} |\sigma_m(x) - f(x)| + \frac{n}{m-n} |\sigma_n(x) - f(x)| \\
 &\quad + \frac{1}{m-n} \sum_{k=n+2}^m (k-1-n) |f_k(x)| \\
 &\leq \frac{m+n}{m-n} \varepsilon^2 + \frac{1}{m-n} \sum_{k=n+2}^m (k-1-n) \frac{M}{k} \\
 &\leq \frac{m+n}{m-n} \varepsilon^2 + \frac{1}{m-n} \frac{M}{n} \sum_{k=1}^{m-n-1} k \\
 &\leq \frac{m+n}{m-n} \varepsilon^2 + M \left( \frac{m}{n} - 1 \right).
 \end{aligned}$$

取  $N > \max\{6/\varepsilon, (1+2\varepsilon)N_0\}$ , 则当  $m \geq N$  时,

$$\frac{m}{1+\varepsilon} - \frac{m}{1+2\varepsilon} = \frac{m\varepsilon}{(1+\varepsilon)(1+2\varepsilon)} > 1,$$

于是可取正整数  $n$ , 使得

$$\frac{m}{1+\varepsilon} > n > \frac{m}{1+2\varepsilon} > N_0,$$

此时

$$|S_m(x) - f(x)| \leq \frac{1+\varepsilon+1}{1+\varepsilon-1} \varepsilon^2 + M(1+2\varepsilon-1) \leq (3+2M)\varepsilon,$$

这说明  $S_m(x)$  一致收敛于  $f(x)$ . □

利用前一小节连续函数的 Fourier 级数的平均一致收敛性, 以及上面关于单调函数 Fourier 系数的估计, 我们可立即得到如下推论:

**定理 10.5.7.** 设  $f(x)$  是以  $2\pi$  为周期的连续函数, 如果  $f(x)$  可写为两个单调函数之差, 则其 Fourier 级数一致收敛于  $f(x)$  自身. 特别地, 周期的 Lipschitz 函数的 Fourier 级数一致收敛于自身.

注. 能写成两个单调递增函数之差的函数是所谓的有界变差函数, 参见第十四章及其附录.

### §10.5.3 等周不等式

我们考虑 Parseval 恒等式的一个几何应用, 即考虑有名的等周问题: 设  $\gamma$  是一条长度为  $L$  的简单闭曲线, 它所围成的区域什么时候面积最大? 为了简单起见, 我们假设  $\gamma$  是连续可微曲线.

**定理 10.5.8 (等周不等式).** 设平面区域  $\Omega$  的边界  $\gamma$  是一条长度为  $L$  的连续可微简单闭曲线, 则  $\Omega$  的面积  $A$  满足不等式

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi},$$

等号成立当且仅当  $\Omega$  是半径为  $\frac{L}{2\pi}$  的圆盘.

证明. 取  $\gamma$  的参数为弧长参数, 其参数方程为

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in [0, L].$$

此时  $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = 1$ . 我们可进一步假设  $\gamma$  的重心位于原点, 即

$$\int_0^L x(t) dt = \int_0^L y(t) dt = 0,$$

这是因为可以通过平移将重心移至原点, 而平移保持区域的面积和曲线的长度不变.

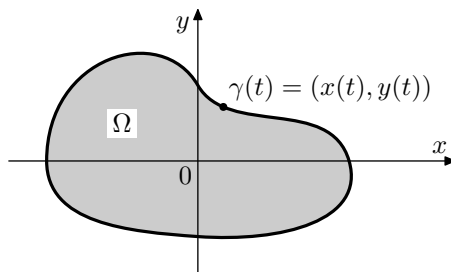


图 10.7 等周不等式

因为  $\gamma$  为闭曲线,  $x(0) = x(L)$ ,  $y(0) = y(L)$ . 由下面的 Wirtinger 不等式得

$$\int_0^L x^2(t) dt \leq \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \int_0^L [x'(t)]^2 dt, \quad \int_0^L y^2(t) dt \leq \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \int_0^L [y'(t)]^2 dt.$$

利用面积公式

$$A = \frac{1}{2} \left| \int_0^L [x(t)y'(t) - x'(t)y(t)] dt \right|$$

以及 Cauchy-Schwarz 不等式, 得

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{1}{4} \left[ \int_0^L (x(t)y'(t) - x'(t)y(t)) dt \right]^2 \\ &\leq \frac{1}{4} \int_0^L [x^2(t) + y^2(t)] dt \int_0^L [(x'(t))^2 + (y'(t))^2] dt \\ &\leq \frac{1}{4} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \left( \int_0^L [(x'(t))^2 + (y'(t))^2] dt \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 L^2, \end{aligned}$$

即  $A \leq L^2/4\pi$ , 等号成立的条件可由 Cauchy-Schwarz 不等式和 Wirtinger 不等式等号成立的条件得到.  $\square$

**定理 10.5.9** (Wirtinger 不等式). 设  $f(x)$  为  $[-\pi, \pi]$  上的连续可微函数, 且  $f(-\pi) = f(\pi)$ . 如果

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0,$$

则

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} [f'(x)]^2 dx,$$

等号成立当且仅当  $f(x) = a \cos x + b \sin x$ .

**证明.** 将  $f$  延拓为  $(-\infty, +\infty)$  上的周期函数, 周期为  $2\pi$ . 则  $f$  有 Fourier 展开

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

其中

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0.$$

$f'(x)$  的 Fourier 展开为

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos nx - na_n \sin nx).$$

根据 Parseval 等式,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \\ &\leq \pi \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 a_n^2 + n^2 b_n^2) = \int_{-\pi}^{\pi} [f'(x)]^2 dx, \end{aligned}$$

等号成立当且仅当  $a_n = b_n = 0, \forall n \geq 2$ . □

**推论 10.5.10.** 设  $f(x)$  为  $[a, b]$  上的连可微函数, 且  $f(a) = f(b)$ ,

$$\int_a^b f(x) dx = 0,$$

则

$$\int_a^b f^2(x) dx \leq \left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2 \int_a^b [f'(x)]^2 dx,$$

等号成立当且仅当  $f(x) = c \cos \frac{2\pi}{b-a} x + d \sin \frac{2\pi}{b-a} x$ .

**证明.** 利用线性变换  $x = \frac{b-a}{2\pi}(t + \pi) + a$  将区间  $[a, b]$  上的函数变为  $[-\pi, \pi]$  上的函数, 应用 Wirtinger 不等式即可. □

**推论 10.5.11** (Poincaré 不等式). 设  $f(x)$  为  $[0, \pi]$  上的连续可微函数, 且  $f(0) = f(\pi) = 0$ , 则

$$\int_0^\pi f^2(x) dx \leq \int_0^\pi [f'(x)]^2 dx,$$

等号成立当且仅当  $f(x) = c \sin x$ .

**证明.** 将  $f(x)$  奇延拓为  $(-\infty, +\infty)$  上周期为  $2\pi$  的函数, 再应用 Wirtinger 不等式即可.  $\square$

#### §10.5.4 Fourier 级数的复数表示

记  $i = \sqrt{-1}$ , 则

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

特别地,  $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta$ . 因此

$$\cos nx = \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}), \quad \sin nx = \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx}).$$

利用这一点, 我们可以作如下计算:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} &= \sum_{k=0}^n (e^{i\theta})^k = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \\ &= \frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta} e^{-i\frac{n+1}{2}\theta} - e^{i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}} e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}} \\ &= e^{i\frac{n}{2}\theta} \frac{(-2i) \sin \frac{n+1}{2}\theta}{(-2i) \sin \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{\sin \frac{(n+1)}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} e^{i\frac{n}{2}\theta}, \end{aligned}$$

这样就又一次得到了等式

$$\sum_{k=0}^n \cos k\theta = \frac{\sin \frac{n+1}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} \cos \frac{n}{2}\theta = \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}} [\sin(n + \frac{1}{2})\theta + \sin \frac{\theta}{2}]$$

以及

$$\sum_{k=1}^n \sin k\theta = \frac{\sin \frac{n+1}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} \sin \frac{n}{2}\theta = \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}} [\cos \frac{\theta}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})\theta].$$

如果  $f(x)$  有 Fourier 展开

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

则其展开可以写为复数形式

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \end{aligned}$$

其中系数  $c_n$  具有统一的形式:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

现在考虑一个应用. 设  $\alpha$  为无理数, 对于  $k = 1, 2, \dots$ , 无理数  $k\alpha$  的小数部分记为  $\{k\alpha\}$ , 这样就得到了  $(0, 1)$  中一系列数

$$x_1 = \{\alpha\}, x_2 = \{2\alpha\}, \dots, x_k = \{k\alpha\}, \dots$$

我们要说明这一列数在区间  $(0, 1)$  中是一致均匀分布的. 为了明确这个问题, 任取  $a < b \in [0, 1]$ , 上述数列的前  $n$  项中属于区间  $[a, b)$  的项个数记为  $\xi_n(a, b)$ , 即如果  $\chi_{[a, b)}$  是区间  $[a, b)$  的特征函数, 则

$$\xi_n(a, b) = \sum_{k=1}^n \chi_{[a, b)}(x_k).$$

我们要证明下列等式成立:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_n(a, b)}{n} = b - a.$$

(1) 首先, 我们注意到等式  $e^{2\pi i n \{k\alpha\}} = e^{2\pi i n k \alpha}$ . 因此, 当  $m$  为非零整数时,

$$\left| \sum_{k=0}^n e^{2\pi i m x_k} \right| = \left| \sum_{k=0}^n e^{2\pi i m k \alpha} \right| \leq \frac{1}{|\sin \pi m \alpha|},$$

这说明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2\pi i m x_k} = 0,$$

进而说明对任意三角多项式  $P = a_0/2 + \sum_{k=1}^m (a_k \cos 2\pi k x + b_k \sin 2\pi k x)$ , 下式成立:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P(x_k) = \int_0^1 P(x) dx.$$

(2) 下面的引理表明, 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $[0, 1]$  上的三角多项式  $P_1, P_2$ , 使得

$$P_1 \leq \chi_{[a, b)} \leq P_2, \quad \int_0^1 (P_2 - P_1) dx < \varepsilon.$$

根据 (1), 存在  $N$ , 当  $n > N$  时

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P_i(x_k) - \int_0^1 P_i(x) dx \right| < \varepsilon, \quad i = 1, 2.$$

此时有

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P_2(x_k) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P_1(x_k) < 3\varepsilon.$$

由于

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \chi_{[a,b)}(x_k) \in \left[ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P_1(x_k), \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P_2(x_k) \right]$$

以及

$$\int_0^1 \chi_{[a,b)}(x) dx \in \left[ \int_0^1 P_1(x) dx, \int_0^1 P_2(x) dx \right],$$

于是, 当  $n > N$  时 (用到第一章第二节习题),

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \chi_{[a,b)}(x_k) - \int_0^1 \chi_{[a,b)}(x) dx \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P_2(x_k) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P_1(x_k) \right] + \frac{1}{2} \left[ \int_0^1 P_2(x) dx - \int_0^1 P_1(x) dx \right] \\ & \quad + \frac{1}{2} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P_1(x_k) - \int_0^1 P_1(x) dx \right| + \frac{1}{2} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P_2(x_k) - \int_0^1 P_2(x) dx \right| \\ & \leq \frac{3}{2} \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon = 3\varepsilon, \end{aligned}$$

这说明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \chi_{[a,b)}(x_k) = \int_0^1 \chi_{[a,b)}(x) dx = b - a.$$

特别地,  $\{x_k\}$  在  $(0, 1)$  中是稠密的. □

**引理 10.5.12.** 设  $f$  为  $[0, 1]$  上的 Riemann 可积函数, 则任给  $\varepsilon > 0$ , 存在三角多项式  $P_1, P_2$ , 使得  $P_1 \leq f \leq P_2$ , 且

$$\int_0^1 [P_2(x) - P_1(x)] dx < \varepsilon.$$

**证明.** 首先, 不难找到连续周期函数  $f_1, f_2$ , 使得

$$f_1 \leq f \leq f_2, \quad \int_0^1 [f_2(x) - f_1(x)] dx < \varepsilon/2,$$

然后再利用 Weierstrass 逼近定理找到三角多项式  $P_1, P_2$ , 使得

$$0 \leq f_1 - P_1 < \varepsilon/4, \quad 0 \leq P_2 - f_2 < \varepsilon/4,$$

则  $P_1, P_2$  就是满足要求的三角多项式. □



## §10.5.5 Fourier 积分初步

现在我们考虑这样的问题: 定义在  $(-\infty, +\infty)$  上的函数如何象周期函数那样作展开?

假定  $f$  满足适当的条件, 则在有限的区间  $[-l, l]$  上,  $f$  可展开为 Fourier 级数:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right),$$

其中

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

这说明

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{n\pi}{l} (x-t) dt.$$

如果  $f$  在  $(-\infty, +\infty)$  上可积且绝对可积, 令  $l \rightarrow +\infty$ , 则求和应变成积分

$$f(x) \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda(x-t) dt \right] d\lambda,$$

因此, 在一定的条件下, 我们有

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda(x-t) dt \right] d\lambda, \quad (10.8)$$

或

$$f(x) = \int_0^{+\infty} [a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda, \quad (10.9)$$

其中

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda t dt, \quad b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \lambda t dt.$$

(10.8) 和 (10.9) 称为  $f$  的 Fourier 积分公式, 其右端称为 Fourier 积分,  $a(\lambda), b(\lambda)$  相当于 Fourier 系数.

当然, (10.8) 和 (10.9) 的推导只是形式推导. 和 Fourier 级数一样, 要建立 (10.8) 那样的等式, 必须仔细考虑收敛性. 下面我们只叙述一些相应的结果, 而把有些证明放到以后的课程中 (也可参考第十六章第四节).

**引理 10.5.13.** 如果  $f$  在  $(-\infty, +\infty)$  上可积且绝对可积, 则  $a(\lambda), b(\lambda)$  关于  $\lambda \in \mathbb{R}$  一致连续, 且  $\lambda \rightarrow \infty$  时,  $a(\lambda) \rightarrow 0, b(\lambda) \rightarrow 0$ .

**证明.** 由  $f$  的条件知, 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $A > 0$ , 使得

$$\int_{-\infty}^{-A} |f(t)| dt + \int_A^{+\infty} |f(t)| dt < \varepsilon.$$

记  $M = \int_{-A}^A |f(t)| dt + 1$ , 由于  $\cos x$  在  $x \in (-\infty, +\infty)$  上一致连续, 故存在  $\eta > 0$ , 使得  $|x' - x''| < \eta$  时

$$|\cos x' - \cos x''| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

于是当  $|\lambda' - \lambda''| < \frac{\eta}{A}$  时,

$$\begin{aligned} |a(\lambda') - a(\lambda'')| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| |\cos \lambda' t - \cos \lambda'' t| dt \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-A} 2|f(t)| dt + \frac{1}{\pi} \int_A^{+\infty} 2|f(t)| dt \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A |f(t)| |\cos \lambda' t - \cos \lambda'' t| dt \\ &\leq \frac{2}{\pi} \varepsilon + \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{M} \int_{-A}^A |f(t)| dt < \frac{3}{\pi} \varepsilon < \varepsilon. \end{aligned}$$

对  $g(\lambda)$  有类似的证明. 同时, 我们有

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} |a(\lambda)| \leq \varepsilon + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \left| \int_{-A}^A f(t) \cos \lambda t dt \right| = \varepsilon,$$

这说明  $a(\lambda) \rightarrow 0$  ( $\lambda \rightarrow \infty$ ). 同理,  $b(\lambda) \rightarrow 0$  ( $\lambda \rightarrow \infty$ ). □

**引理 10.5.14.** 记

$$S(A, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^A d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda(x-t) dt,$$

$f$  条件同上, 则

$$S(A, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin At}{t} dt.$$

**证明.** 在第十六章中将考虑积分次序的可交换性问题, 现在我们先承认这一点, 此时

$$\begin{aligned} S(A, x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^A d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda(x-t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^A f(t) \cos \lambda(x-t) d\lambda \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin A(x-t)}{x-t} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin At}{t} dt. \end{aligned}$$

引理 10.5.15. 任给  $\delta > 0$ , 有

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{\delta}^{+\infty} [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin At}{t} dt = 0.$$

证明. 和引理 10.5.13 中  $a(\lambda) \rightarrow 0$  的证明完全类似, 故略去. □

这个引理说明,  $\lim_{A \rightarrow +\infty} S(A, x)$  只与  $f$  在  $x$  附近的性质有关. 因此, 与 Fourier 级数类似, 我们有 Dini 判别法, 这里只叙述一个特殊情形:

定理 10.5.16. 设  $f$  在  $(-\infty, +\infty)$  中可积且绝对可积, 如果  $f$  分段可导, 则

$$\begin{aligned} \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda(x-t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} [a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda, \end{aligned}$$

其中

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda t dt, \quad b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \lambda t dt.$$

关于 Fourier 积分的更多结果和应用请参见第十六章第四节.

## 第十一章 度量空间和连续映射

从这一章开始我们要研究多个变量的函数. 我们知道, 实数系的基本性质对于一元实函数的各种性质都有决定性的影响. 因此, 为了研究多个变量的函数, 我们要首先研究它们的定义域的基本性质. 本章就是讨论这些基本性质的, 为了今后进一步学习的需要, 我们讨论的内容比通常的欧氏空间还要稍稍一般一些.

### §11.1 内积与度量

**定义 11.1.1 (内积).** 设  $X$  是实数域  $\mathbb{R}$  上的向量空间, 如果映射

$$g = \langle, \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto g(x, y) = \langle x, y \rangle$$

满足以下条件

- (1)  $\langle x, x \rangle \geq 0$ , 且  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$  (正定性);
- (2)  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ ,  $\forall x, y \in X$  (对称性);
- (3)  $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$ ,  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, x, y, z \in X$  (线性性).

则称  $g = \langle, \rangle$  为  $X$  上的一个内积,  $(X, \langle, \rangle)$  称为内积空间,  $\langle x, y \rangle$  称为  $x$  与  $y$  的内积,  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  称为  $x$  的范数.

**例 11.1.1.**  $\mathbb{R}$  上的内积.

对任意  $x, y \in \mathbb{R}$ , 定义  $\langle x, y \rangle = xy$ , 则显然  $\langle, \rangle$  为  $\mathbb{R}$  上的内积. 此时,  $x$  的范数就是其绝对值  $|x|$ .

**例 11.1.2.**  $\mathbb{R}^n$  上的内积.

记  $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$  为全体  $n$  元有序实数组, 以显然的方式,  $\mathbb{R}^n$  成为  $\mathbb{R}$  上的向量空间, 称为  $n$  维欧氏空间.  $\mathbb{R}^n$  上有标准的内积  $\langle, \rangle$ :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

如果  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , 则其范数为

$$\|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}.$$

**例 11.1.3.** 闭区间上连续函数空间的内积.

记  $C^0[a, b]$  为闭区间  $[a, b]$  上连续函数的全体形成的向量空间. 定义内积  $\langle, \rangle$  如下:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

其中, 内积的正定性需要用到连续性的条件: 非负连续函数的积分一定是非负实数, 且积分为零当且仅当被积函数为零.  $\square$

**定理 11.1.1** (Schwarz 不等式). 设  $(X, \langle, \rangle)$  为内积空间, 则

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|,$$

且等号成立当且仅当  $x$  与  $y$  线性相关.

**证明.** 当  $x = 0$  (或  $y = 0$ ) 时, 由内积的线性知

$$\langle 0, y \rangle = \langle 0 \cdot 0, y \rangle = 0 \langle 0, y \rangle = 0,$$

此时 Schwarz 不等式自然成立. 下设  $x \neq 0, y \neq 0$ , 则对任意  $t \in \mathbb{R}$ , 有

$$\langle x, x \rangle - 2t\langle x, y \rangle + t^2\langle y, y \rangle = \langle x - ty, x - ty \rangle \geq 0,$$

上式是关于  $t$  的一元二次函数, 因此其判别式非正:

$$\Delta = 4\langle x, y \rangle^2 - 4\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leq 0,$$

等号成立的条件留作练习.  $\square$

**注.** 如果不考虑等式成立的条件, 只要  $\langle, \rangle$  具有非负性, 则 Schwarz 不等式仍然成立.

根据 Schwarz 不等式, 当  $x, y$  为非零向量时, 可以取  $\theta(x, y) \in [0, \pi]$ , 使得

$$\cos \theta(x, y) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|},$$

$\theta(x, y)$  称为  $x, y$  的夹角, 也记为  $\angle(x, y)$ .

**推论 11.1.2.** 设  $(X, \langle, \rangle)$  为内积空间,  $x, y \in X$ , 则

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

**证明.** 根据 Schwarz 不等式, 有

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

因此欲证不等式成立.  $\square$

**定义 11.1.2 (度量).** 设  $X$  为非空集合, 如果映射  $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  满足以下条件

- (1)  $\rho(x, y) \geq 0$  且  $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$ ;
- (2)  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ ;
- (3)  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ . (三角不等式)

则称  $\rho$  为  $X$  上的一个度量 (或距离),  $(X, \rho)$  称为度量空间 (或距离空间),  $\rho(x, y)$  称为  $x, y$  之间的距离.

**例 11.1.4.**  $\mathbb{R}$  上的度量.

任给  $x, y \in \mathbb{R}$ , 令  $\rho(x, y) = |x - y|$ , 则  $\rho$  为  $\mathbb{R}$  上的度量.

**例 11.1.5 (内积诱导距离).** 设  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  为内积空间, 则令

$$\rho(x, y) = \|x - y\|, \quad \forall x, y \in X.$$

显然  $\rho$  满足度量定义中的条件 (1), (2), 而三角不等式也成立:

$$\begin{aligned} \rho(x, z) &= \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \\ &\leq \|x - y\| + \|y - z\| \\ &= \rho(x, y) + \rho(y, z). \end{aligned}$$

因此  $\rho$  为  $X$  上的度量, 称为由内积诱导的度量. □

**例 11.1.6.** 离散度量空间.

度量空间比内积空间要广泛得多, 它们不一定为向量空间. 例如, 设  $X$  为任意非空集合, 定义映射  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  如下:

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

不难验证  $d$  为  $X$  上的一个度量, 称为离散度量. □

### 习题 11.1

1. 记

$$l^2 = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \mid x_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\}.$$

在  $l^2$  中定义自然的加法和数乘使之成为向量空间, 并且说明下面定义的映射  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  为  $l^2$  上的内积:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

2. 记  $R[a, b]$  为  $[a, b]$  上 Riemann 可积函数的全体. 设  $f, g \in R[a, b]$ , 定义

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx,$$

问:  $\langle, \rangle$  是内积吗? (提示: 考察正定性.)

3. 设  $\langle, \rangle$  为向量空间  $X$  上的内积,  $x, y \in X, y \neq 0$ . 在下面的不等式

$$\langle x - ty, x - ty \rangle \geq 0$$

中代入  $t = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$  从而证明 Schwarz 不等式.

4. 求推论 11.1.2 中等号成立的条件.

5. 证明内积空间  $X$  满足如下的平行四边形公式:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad \forall x, y \in X.$$

6. 对于连续函数的空间  $C^0[a, b]$ , 如下定义映射

$$d(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|, \quad \forall f, g \in C^0[a, b].$$

证明  $d$  是  $C^0[a, b]$  上的一个度量, 称为最大模度量.

7. 设  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ , 定义

$$d_1(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|, \quad d_2(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|,$$

证明  $d_1$  和  $d_2$  均为  $\mathbb{R}^n$  上的度量.

8. 设  $A$  为度量空间  $(X, \rho)$  的子集, 在  $A \times A$  上定义如下映射  $\rho_A$ :

$$\rho_A(a_1, a_2) = \rho(a_1, a_2),$$

证明  $\rho_A$  为  $A$  上的度量, 称为诱导度量,  $(A, \rho_A)$  称为  $X$  的子度量空间.

9. 证明, 如果  $\rho$  为  $X$  上的度量, 则  $\frac{\rho}{1 + \rho}$  也是  $X$  上的度量.

10. (\*) 设  $f(0) = 0, f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  为保持欧氏距离的映射, 即

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

证明  $f$  为正交线性变换.

## §11.2 度量空间的拓扑

本节假设  $(X, \rho)$  为度量空间. 设  $x \in X, r > 0$ , 记

$$B_r(x) = \{y \in X \mid \rho(y, x) < r\},$$

称为以  $x$  为中心,  $r$  为半径的开球.

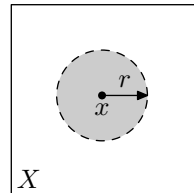


图 11.1 开球

**例 11.2.1.** 欧氏空间中的开球.

在  $\mathbb{R}$  中, 以  $x_0$  为中心,  $r$  为半径的开球就是开区间  $(x_0 - r, x_0 + r)$ . 在  $\mathbb{R}^2$  中, 以  $(x_0, y_0)$  为中心, 以  $r$  为半径的开球实际上是圆盘

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}.$$

在一般的欧氏空间  $\mathbb{R}^n$  中, 以  $(x_0^1, \dots, x_0^n)$  为中心,  $r$  为半径的开球是

$$\{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid (x^1 - x_0^1)^2 + \dots + (x^n - x_0^n)^2 < r^2\}.$$

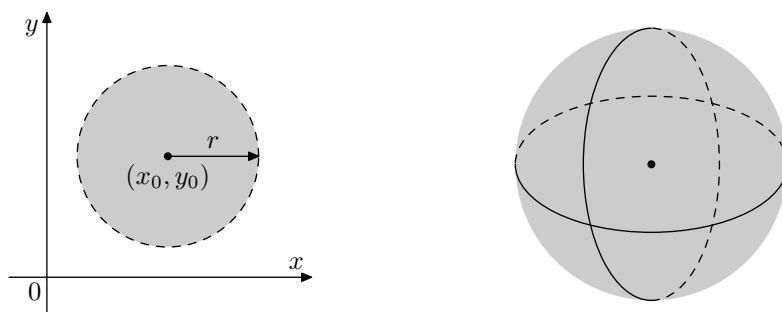


图 11.2 圆盘和欧氏球

**例 11.2.2.** 离散度量空间中的开球.

设  $X$  是离散度量空间. 由于  $X$  中的距离只取 0 或 1, 因此

$$B_r(x) = \{x\}, \quad \forall r \leq 1; \quad B_r(x) = X, \quad \forall r > 1.$$

我们注意到离散度量空间中的开球看上去和欧氏空间中的很不一样.



**定义 11.2.1** (开集和闭集). 设  $U$  为  $X$  的子集, 如果任给  $x \in U$ , 均存在  $\varepsilon > 0$ , 使得  $B_\varepsilon(x) \subset U$ , 则称  $U$  为开集; 约定空集也是开集. 如果一个集合的补集 (余集) 是开集, 则称该集合为闭集.

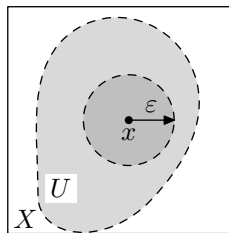


图 11.3 开集

显然,  $X$  为开集, 从而空集也是闭集. 含有  $x$  的开集称为  $x$  的开邻域.

**例 11.2.3.** 欧氏空间中的一些开集和闭集.

开区间  $(a, b)$ ,  $(a, +\infty)$  和  $(-\infty, b)$  都是  $\mathbb{R}$  中的开集; 闭区间  $[a, b]$  以及区间  $[a, +\infty)$  和  $(-\infty, b]$  都是  $\mathbb{R}$  中的闭集.

上半平面  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$  是  $\mathbb{R}^2$  中的开集, 闭的圆盘  $\{x^2 + y^2 \leq r^2\}$  是  $\mathbb{R}^2$  中的闭集.

一般地, 一个子集可能既不是开集, 也不是闭集, 比如  $\mathbb{R}$  中的半开半闭区间  $[a, b)$ . 不过, 离散度量空间的情形却很特殊.

**例 11.2.4.** 离散度量空间中的开集和闭集.

因为以  $x$  为中心, 以  $1/2$  为半径的开球就是  $\{x\}$ , 因此离散度量空间的任何子集都是开集, 从而任何子集也都是闭集.

**例 11.2.5.** 度量空间中的开球为开集.

设  $x \in B_r(x_0)$ , 则  $\rho(x, x_0) < r$ . 令  $\varepsilon = r - \rho(x, x_0)$ , 则当  $y \in B_\varepsilon(x)$  时, 由三角不等式, 有

$$\rho(y, x_0) \leq \rho(y, x) + \rho(x, x_0) < \varepsilon + \rho(x, x_0) = r,$$

这说明  $y \in B_r(x_0)$ , 即  $B_\varepsilon(x) \subset B_r(x_0)$ , 因此  $B_r(x_0)$  是开集.

类似地可证  $\{y \in X \mid \rho(y, x_0) > r\}$  为开集, 其补集称为闭球, 是闭集.  $\square$

下面的命题反映了开集和闭集的基本性质.

**命题 11.2.1.** (1) 有限多个开集之交仍为开集; 任意多个开集之并仍为开集;  
(2) 有限多个闭集之并仍为闭集; 任意多个闭集之交仍为闭集.

**证明.** (1) 设  $U_1, \dots, U_k$  为开集, 任给  $x \in \bigcap_{i=1}^k U_i$ , 由定义, 存在  $\varepsilon_i > 0$ , 使得  $B_{\varepsilon_i}(x) \subset U_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ . 令  $\varepsilon = \min\{\varepsilon_i \mid i = 1, \dots, k\}$ , 则  $B_\varepsilon(x) \subset \bigcap_{i=1}^k U_i$ , 故  $\bigcap_{i=1}^k U_i$  为开集, 从开集的定义立即可以推出任意多个开集之并仍为开集.

(2) 利用集合的运算

$$\begin{aligned}(A_1 \cup \cdots \cup A_k)^c &= A_1^c \cap \cdots \cap A_k^c \\ (\bigcap_{\alpha} A_{\alpha})^c &= \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}^c\end{aligned}$$

及 (1) 即可.  $\square$

为了刻画闭集, 我们引入极限的概念, 它是实数中数列极限概念的推广.

**定义 11.2.2 (极限).** 设  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  为  $X$  中的点列, 如果存在  $x_0 \in X$ , 使得任给  $\varepsilon > 0$ , 均存在  $N = N(\varepsilon)$ , 当  $n > N$  时,  $x_n \in B_{\varepsilon}(x_0)$ , 则称  $\{x_n\}$  收敛到极限  $x_0$ , 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \quad \text{或} \quad x_n \rightarrow x_0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

注. (1)  $x_n \in B_{\varepsilon}(x_0)$  可改写为  $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$ , 因此有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_0) = 0.$$

(2) 由三角不等式和 (1) 易见, 极限如果存在, 则必惟一.

极限也可以用开集来描述, 它的好处是可以不涉及度量, 从而便于推广到更一般的空间中.

**命题 11.2.2.** 设  $\{x_n\}$  为度量空间  $(X, \rho)$  中的点列, 则  $\{x_n\}$  收敛于  $x_0$  当且仅当任给  $x_0$  的开邻域  $U$ , 存在  $N$ , 当  $n > N$  时  $x_n \in U$ .

**证明.** (必要性) 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ,  $U$  是  $x_0$  的一个开邻域. 于是存在  $\varepsilon > 0$ , 使得  $B_{\varepsilon}(x_0) \subset U$ . 根据极限的定义, 存在  $N = N(\varepsilon)$ , 当  $n > N$  时

$$x_n \in B_{\varepsilon}(x_0) \subset U.$$

(充分性) 取  $U$  为开球即可.  $\square$

**命题 11.2.3.** 集合  $A$  为闭集当且仅当  $A$  中任何收敛点列的极限仍在  $A$  中.

**证明.** 设  $A$  为闭集,  $\{x_n\} \subset A$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ . 如果  $x_0 \notin A$ , 则存在  $\varepsilon_0 > 0$ , 使得  $B_{\varepsilon_0}(x_0) \subset A^c$ , 但  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  意味着, 存在  $N = N(\varepsilon_0)$  使得  $n > N$  时  $x_n \in B_{\varepsilon_0}(x_0)$ , 这与  $x_n \in A$  相矛盾! 因此  $x_0 \in A$ .

反之, 如果  $A$  中任何收敛点列的极限仍在  $A$  中, 则任取  $x_0 \notin A$ , 我们说明存在  $n_0 > 0$  使得  $B_{1/n_0}(x_0) \subset A^c$ , 即  $A^c$  为开集. (反证法) 如果不然, 则对任意  $n \geq 1$ , 均有  $B_{1/n}(x_0) \cap A \neq \emptyset$ . 取  $x_n \in B_{1/n}(x_0) \cap A$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , 这导出了矛盾.  $\square$

注. 这个命题可以用来解释闭集的属性: 闭集关于求极限运算是封闭的.

**定义 11.2.3** (内点, 外点, 边界点). 设  $A$  为度量空间  $X$  的子集,  $x_0 \in X$ . 如果存在  $x_0$  的开邻域  $U$ , 使得  $U \subset A$ , 则称  $x_0$  为  $A$  的内点, 内点的全体记为  $\text{int}A$  或  $\overset{\circ}{A}$ , 称为  $A$  的内部; 如果存在  $x_0$  的开邻域  $U$ , 使得  $U \subset A^c$ , 则称  $x_0$  为  $A$  的外点; 如果  $x_0$  的任意开邻域中都既有  $A$  中的点, 也有不属于  $A$  中的点, 则称  $x_0$  为  $A$  的边界点, 边界点的全体记为  $\partial A$ , 称为  $A$  的边界.

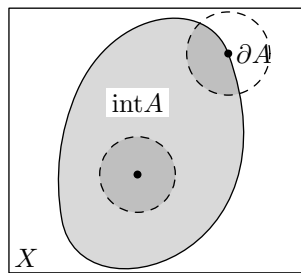


图 11.4 内部和边界

从定义不难看出, 内点集  $\overset{\circ}{A}$  是包含于  $A$  的“最大”开集,  $A$  的外点就是  $A^c$  的内点, 空间  $X$  可分解为

$$X = \text{int}A \cup \partial A \cup \text{int}(A^c),$$

这个分解中的三个子集互不相交. 由此可得如下性质:

- $\partial A$  为闭集, 这是因为  $\partial A = (\text{int}A \cup \text{int}(A^c))^c$ .
- $\text{int}A \cup \partial A$  也是闭集, 记为  $\bar{A}$ , 称为  $A$  的闭包. 闭包是闭集是因为  $\bar{A} = (\text{int}(A^c))^c$ . 此外,  $\bar{A} = A \cup \partial A$  也成立. 这是因为, 按定义显然有  $\bar{A} \subset A \cup \partial A$ . 其次, 如果  $a \in A \cup \partial A$ , 则  $a \in A$  或  $a \in \partial A$ , 总之  $a$  不是  $A$  的外点, 因此  $a \in \bar{A}$ , 即  $A \cup \partial A \subset \bar{A}$  也成立.
- $A$  为闭集当且仅当  $\partial A \subset A$ , 即  $A = \bar{A}$ . 根据前一条性质, 只要证明必要性就可以了. 事实上, 如果  $A$  是闭集, 则  $A^c$  为开集, 从而  $A^c$  就是  $A$  的全体外点, 于是

$$\bar{A} = (\text{int}(A^c))^c = (A^c)^c = A.$$

- 当  $A \subset B$  时,  $\bar{A} \subset \bar{B}$ . 这是因为, 此时  $A^c \supset B^c$ ,  $\text{int}(A^c) \supset \text{int}(B^c)$ , 从而  $\bar{A} \subset \bar{B}$  成立.

在第十三章中考虑多元积分时, 我们将要用到闭包和边界的上述性质.

**例 11.2.6.** 作为  $\mathbb{R}$  的子集, 有理数全体  $\mathbb{Q}$  既无内点, 也无外点. 因此  $\mathbb{Q}$  的边界点为整个空间  $\mathbb{R}$ .

**例 11.2.7.** 欧氏空间  $\mathbb{R}^n$  中开球的边界.

设  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $r > 0$ . 由于  $\{\|x - x_0\| < r\}$  和  $\{\|x - x_0\| > r\}$  均为开集, 故

$$\partial B_r(x_0) = \{\|x - x_0\| = r\},$$

这个边界称为  $n-1$  维球面 (以  $x_0$  为中心,  $r$  为半径).  $\square$

### 习题 11.2

1. 设  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $r > 0$ . 令

$$I_r^n(a) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_i - a_i| \leq r, 1 \leq i \leq n\},$$

称为  $n$  维正方体. 证明正方体都是闭集. 把上式中第一个  $\leq$  换成  $<$  得到的集合称为开立方体, 证明它们的确是开集.

2. 证明度量空间中的有限点集以及闭球  $\bar{B}_r(x) = \{y \in X \mid \rho(y, x) \leq r\}$  为闭集.
3. 在  $\mathbb{R}$  中举例说明, 无限个闭集的并集可能不是闭集, 无限个开集的交集可能不是开集.
4. 设  $X$  是度量空间  $Y$  的子度量空间. 证明,  $A \subset X$  为  $X$  中的开集当且仅当存在  $Y$  中的开集  $U$ , 使得  $A = X \cap U$ ; 类似地,  $B$  为  $X$  中闭集当且仅当存在  $Y$  中闭集  $V$ , 使得  $B = X \cap V$ .
5. 有理数  $\mathbb{Q}$  是  $\mathbb{R}$  的子度量空间. 证明,  $(-\pi, \pi) \cap \mathbb{Q}$  既是  $\mathbb{Q}$  中的开集, 也是  $\mathbb{Q}$  中的闭集.
6. 证明, 如果度量空间中的点列  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  收敛, 则其极限是惟一的.
7. 求下列子集的内点, 外点以及边界点:

$$(1) \left\{ \frac{1}{n} \mid n = 1, 2, \dots \right\} \subset \mathbb{R}; \quad (2) \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

8. 证明, 在欧氏空间  $\mathbb{R}^n$  中, 半径为  $r$  的开球的闭包就是半径为  $r$  的闭球. 在一般的度量空间中, 同样的事实还成立吗?
9. 设  $A \subset B$ , 则  $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ .
10. 设  $A = \{x_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ . 证明, 当  $x_0 \in \bar{A} - A$  时,  $A$  中存在子列收敛到  $x_0$ .
11. 证明  $\mathbb{R}^2$  的子集  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$  是稠密的 ( $A$  为  $X$  的稠密子集是指  $\bar{A} = X$ ).
12. (\*) 设  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  为闭区间上的有界函数, 它的图像  $\text{graph}(f)$  定义为

$$\text{graph}(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b]\}.$$

证明,  $f$  为连续函数当且仅当  $\text{graph}(f)$  为  $\mathbb{R}^2$  中的闭集.

## §11.3 度量空间的完备性

本节设  $(X, \rho)$  为度量空间. 设  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  为  $X$  中点列. 如果任给  $\varepsilon > 0$ , 均存在  $N = N(\varepsilon)$ , 当  $m, n \geq N$  时

$$\rho(x_m, x_n) < \varepsilon,$$

则称点列  $\{x_n\}$  为 Cauchy 列 (或基本列).

**定义 11.3.1** (完备性). 如果  $X$  中 Cauchy 列均为收敛点列, 则称  $(X, \rho)$  为完备度量空间.

注. (1) 收敛点列必为 Cauchy 列;

(2) Cauchy 列如果有收敛子列, 则其本身也一定收敛 (习题).

**例 11.3.1.** 实数  $\mathbb{R}$  在通常的度量下是完备的度量空间.

$\mathbb{R}$  的完备性是实数系的基本性质之一. 我们注意到, 有理数  $\mathbb{Q}$  作为子度量空间不是完备的, 因为数列

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

组成了  $\mathbb{Q}$  中的基本列, 但它在  $\mathbb{Q}$  中不收敛. 从  $\mathbb{Q}$  到  $\mathbb{R}$  的扩充可以看成是将  $\mathbb{Q}$  进行某种“完备化”, 分析学就建立在这种完备化的基础上. 下面的命题给出了我们在  $\mathbb{R}^n$  中做微积分的基础.

**命题 11.3.1.**  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  为完备度量空间.

**证明.** 设  $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$  为  $\mathbb{R}^n$  中点列, 把它写成分量形式

$$x_m = (x_m^1, x_m^2, \cdots, x_m^n),$$

则对任意  $i = 1, 2, \cdots, n$ , 有

$$|x_k^i - x_l^i| \leq \left[ \sum_{j=1}^n (x_k^j - x_l^j)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \|x_k - x_l\|,$$

因此, 如果  $\{x_m\}$  为 Cauchy 列, 则  $\{x_m^i\}_{m=1}^{\infty}$  对每个  $i = 1, 2, \cdots, n$  均为 Cauchy 列, 从而收敛. 设  $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m^i = x_0^i$ , 记  $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \cdots, x_0^n)$ , 则由

$$\|x_m - x_0\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_m^i - x_0^i\|$$

得

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = x_0.$$

这就证明了命题.  $\square$

设  $A$  为  $X$  中子集, 称  $\sup\{\rho(x, y) \mid x, y \in A\}$  为  $A$  的直径, 记为  $\text{diam}A$  或  $d(A)$ . 直径有限的集合称为有界集合.

**例 11.3.2.** 开球和闭球的直径.

$\mathbb{R}$  中区间  $[a, b]$  的直径为  $b - a$ , 即直径就是区间长度; 一般地,  $\mathbb{R}^n$  中半径为  $r$  的开球 (闭球) 直径为  $2r$ . 对于一般的度量空间来说, 根据三角不等式易见, 半径为  $r$  的开球 (闭球), 其直径不超过  $2r$ . 和  $\mathbb{R}^n$  不同的是, 这时等号可能不成立. 例如, 在离散度量空间中, 半径为  $1/2$  的开球, 其直径为  $0$ .

下面的定理是  $\mathbb{R}$  中闭区间套原理的一般形式.

**定理 11.3.2.** 设  $(X, \rho)$  为度量空间, 则下列几条等价:

- (1)  $(X, \rho)$  为完备度量空间;
- (2) (Cantor) 闭集套原理成立: 若  $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots$  为一列非空闭集, 且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{diam}F_n = 0$ , 则存在惟一的点  $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ .
- (3) 闭球套原理成立: (2) 中  $F_n$  换成直径或半径趋于  $0$  的闭球时结论不变.

**证明.** (1) $\implies$ (2): 取  $a_n \in F_n$ , 由  $F_n \supset F_{n+1} \supset \cdots$  知  $\{a_n, a_{n+1}, \cdots\} \subset F_n$ . 因此,  $m > n$  时

$$\rho(a_m, a_n) \leq \text{diam}F_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

从而  $\{a_n\}$  为 Cauchy 列, 设其极限为  $a$ , 由  $F_n$  为闭集得

$$a = \lim_{m \rightarrow \infty} a_m \in F_n, \quad \forall n \geq 1,$$

即  $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ . 如果另有  $b \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ , 则

$$\rho(a, b) \leq \text{diam}F_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

从而  $a = b$ .

(2) $\implies$ (3): 这是显然的.

(3) $\implies$ (1): (\*) 设  $\{a_n\}$  为  $X$  中 Cauchy 列, 为了证明这是一个收敛点列, 只须证明它包含一个收敛子列即可. 由 Cauchy 列的定义, 存在  $n_1 < n_2 < \cdots$ , 使得  $m, n \geq n_k$  时

$$\rho(a_m, a_n) < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

考虑  $X$  中的闭球  $F_k = \bar{B}_{2^{-k}}(a_{n_k}), k = 1, 2, \cdots$ . 当  $x \in F_{k+1}$  时,

$$\begin{aligned} \rho(x, a_{n_k}) &\leq \rho(x, a_{n_{k+1}}) + \rho(a_{n_{k+1}}, a_{n_k}) \\ &\leq \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k} \end{aligned}$$

这说明  $x \in F_k$ . 即  $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_k \supset F_{k+1} \supset \cdots$ . 另一方面,

$$\text{diam } F_k \leq 2 \cdot 2^{-k} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow +\infty),$$

由闭球套原理, 存在  $a \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$ . 此时

$$0 \leq \rho(a, a_{n_k}) \leq 2^{-k} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow +\infty),$$

即子列  $\{a_{n_k}\}$  收敛于  $a$ . □

由于  $\mathbb{R}^n$  是完备度量空间, 因此闭集套原理在  $\mathbb{R}^n$  中成立. 完备度量空间还有如下有用的压缩映像原理, 在下一章中我们将用它来研究多元反函数定理.

**定义 11.3.2** (压缩映射). 设  $A$  为  $X$  的子集, 映射  $f: A \rightarrow A$  如果满足以下条件:

$$(*) \text{ 存在常数 } 0 \leq q < 1, \text{ 使得 } \rho(f(a_1), f(a_2)) \leq q \cdot \rho(a_1, a_2), \quad \forall a_1, a_2 \in A.$$

则称之为压缩映射.

**定理 11.3.3** (压缩映像原理). 设  $A$  为完备度量空间  $X$  中的闭集,  $f: A \rightarrow A$  为压缩映射, 则存在惟一的点  $a \in A$ , 使得  $f(a) = a$  (不动点).

**证明.** 任取  $a_0 \in A$ , 递归地定义  $A$  中点列  $\{a_n\}$  如下:

$$a_n = f(a_{n-1}), \quad n = 1, 2, \cdots.$$

则

$$\rho(a_{n+1}, a_n) = \rho(f(a_n), f(a_{n-1})) \leq q \cdot \rho(a_n, a_{n-1}), \quad \forall n \geq 1.$$

从而有

$$\begin{aligned} \rho(a_{n+1}, a_n) &\leq q \cdot \rho(a_n, a_{n-1}) \leq q^2 \cdot \rho(a_{n-1}, a_{n-2}) \leq \cdots \leq q^n \cdot \rho(a_1, a_0), \\ \rho(a_m, a_n) &\leq \rho(a_m, a_{m-1}) + \rho(a_{m-1}, a_{m-2}) + \cdots + \rho(a_{n+1}, a_n) \\ &\leq (q^{m-1} + q^{m-2} + \cdots + q^n) \cdot \rho(a_1, a_0) \\ &\leq \frac{q^n}{1-q} \cdot \rho(a_1, a_0) \rightarrow 0, \quad (m > n, n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

这说明  $\{a_n\}$  为 Cauchy 列. 设其极限为  $a$ , 则  $a \in A$ . 由三角不等式得

$$\begin{aligned} \rho(f(a), a) &\leq \rho(f(a), f(a_n)) + \rho(f(a_n), f(a_{n-1})) + \rho(a_n, a) \\ &\leq q \cdot \rho(a, a_n) + q^{n-1} \cdot \rho(a_1, a_0) + \rho(a_n, a) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

这说明  $f(a) = a$ .

惟一性: 若  $f(b) = b$ , 则

$$\rho(a, b) = \rho(f(a), f(b)) \leq q \cdot \rho(a, b),$$

这说明  $\rho(a, b) = 0$ , 从而  $a = b$ . □

**例 11.3.3.** (\*) 压缩映像原理的一个应用.

考虑连续函数的空间  $C^0[0, 1]$ , 这个空间上有最大模度量:

$$\rho(f, g) = \max_{[0, 1]} |f(x) - g(x)|,$$

则  $(C^0[0, 1], \rho)$  是完备度量空间. 令

$$A = \{f \in C^0[0, 1] \mid f(0) = 0, f(1) = 1\},$$

则  $A$  为  $(C^0[0, 1], \rho)$  中的闭集. 考虑映射

$$\begin{aligned} \phi: A &\rightarrow A, \\ f &\mapsto \phi(f), \end{aligned}$$

其中  $\phi(f)$  是如下定义的连续函数:

$$\phi(f)(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}f(3x), & x \in [0, \frac{1}{3}], \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2}f(2-3x), & x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{4}f(3x-2), & x \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

不难看出  $\phi$  为压缩映射, 因此存在惟一的不动点  $h$ , 即  $h$  为连续函数, 满足条件  $h(0) = 0, h(1) = 1$ , 且  $\phi(h) = h$ .  $h$  具有一种自相似性, 可以证明, 这是一个无处可微的连续函数. □

下面的 Baire 纲定理也是  $\mathbb{R}$  上的 Baire 定理的一般形式, 它们的证明完全类似, 都是用闭集套原理, 我们留作习题.

**定理 11.3.4** (Baire). 设  $A_n$  ( $n \geq 1$ ) 为完备度量空间  $X$  中的一列闭集. 如果每个  $A_n$  都没有内点, 则它们的并集  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  也没有内点.

### 习题 11.3

1. 证明 Cauchy 点列如果有收敛子列, 则其自身也是收敛的.
2. (\*) 证明  $l^2$  是完备的度量空间.



3. 证明  $C^0[a, b]$  在最大模度量之下是一个完备的度量空间. (提示: 跟一致收敛的概念联系起来.)
4. (\*) 举例说明,  $C^0[a, b]$  在内积诱导的度量下不是完备的.
5. 记  $D[a, b]$  为  $[a, b]$  上可导且导数有界的函数全体组成的向量空间. 设  $f, g \in D[a, b]$ , 令
 
$$d(f, g) = \max_{[a, b]} |f(x) - g(x)| + \sup_{[a, b]} |f'(x) - g'(x)|,$$
 证明  $(D[a, b], d)$  为完备度量空间.
6. 证明,  $A$  为度量空间  $X$  中的有界集合当且仅当  $A$  包含于某个闭球之内.
7. 写出完备度量空间中的 Baire 纲定理的完整证明.
8. 设  $A$  为度量空间  $X$  的子集. 如果  $\bar{A} = X$ , 则称  $A$  为  $X$  的稠密子集, 或称  $A$  在  $X$  中稠密. 证明, 在完备度量空间中, 可数多个稠密开集的交集仍然是稠密子集. (提示: 考虑补集, 用 Baire 纲定理.)
9. (\*) 证明线性空间  $l^2$  不是可数维的, 即不存在可数个非零向量  $\{e_n\} \subset l^2$ , 使得  $l^2$  中任何一点均为  $\{e_n\}$  中有限个元素的线性组合. (提示: 考虑有限维子向量空间的并, 用 Baire 纲定理.)
10. (\*) 证明,  $\mathbb{R}^n$  中的开球不能写成若干个互不相交的闭球的并.

### §11.4 度量空间与紧致性

设  $S$  为度量空间  $(X, \rho)$  的子集, 如果  $S \subset \bigcup_{\alpha} G_{\alpha}$ , 则称  $\{G_{\alpha}\}$  为  $S$  的一个覆盖. 当  $G_{\alpha}$  均为开集时, 称  $\{G_{\alpha}\}$  为开覆盖; 只有有限个  $G_{\alpha}$  的覆盖称为有限覆盖, 由  $\{G_{\alpha}\}$  中的一部分所组成的覆盖称为子覆盖.

**例 11.4.1.** 设  $x_0 \in X$ . 任取  $y \neq x_0$ , 因为  $\rho(y, x_0) > 0$ , 故存在  $n \geq 1$ , 使得  $\rho(y, x_0) > \frac{1}{n}$ . 即  $y \in \{x \in X \mid \rho(x, x_0) > \frac{1}{n}\}$ . 这说明

$$X - \{x_0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in X \mid \rho(x, x_0) > \frac{1}{n}\right\},$$

这就得到了  $X - \{x_0\}$  的一个开覆盖.

**定义 11.4.1 (紧致性).** 如果集合  $S$  的任何开覆盖都有有限子覆盖, 则称  $S$  为紧致集合.

根据实数系的基本性质, 闭区间  $[a, b]$  是  $\mathbb{R}$  中的紧致集合. 紧致性是一个较难理解的概念, 我们将它和有界性以及闭集的概念联系起来看.

**命题 11.4.1.** 紧致集合必为有界闭集.

**证明.** 设  $A$  为紧致集合. 先证  $A$  有界. 任取  $a \in A$ , 因为

$$A \subset X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(a),$$

由  $A$  的紧致性知, 存在  $n_1, \dots, n_k$ , 使得

$$A \subset \bigcup_{i=1}^k B_{n_i}(a) = B_N(a),$$

其中  $N = \max\{n_1, \dots, n_k\}$ . 这说明  $A$  有界.

再证  $A$  是闭集. 任取  $b \in A^c$ , 因为

$$A \subset X - \{b\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in X \mid \rho(x, b) > \frac{1}{n}\right\},$$

利用  $A$  的紧致性, 同理可得  $N$ , 使得

$$A \subset \left\{x \in X \mid \rho(x, b) > \frac{1}{N}\right\},$$

这说明  $B_{1/N}(b) \subset A^c$ , 因此  $A^c$  为开集, 即  $A$  为闭集. □

**命题 11.4.2.** 设  $A$  为  $\mathbb{R}^n$  中子集, 则以下几条等价:

- (1)  $A$  为紧致集合;
- (2)  $A$  为序列紧致集合, 即  $A$  中任何无限点列均有收敛子列, 且该子列极限仍在  $A$  中;
- (3)  $A$  为有界闭集.

**证明.** (1)  $\implies$  (2). (反证法). 设  $\{b_n\}$  为  $A$  中点列, 且它无收敛于  $A$  中点的子列. 根据命题 11.2.3 的证明, 对任意  $a \in A$ , 存在开球  $B_{r(a)}(a)$ , 使得  $B_{r(a)}(a)$  最多只含有  $\{b_n\}$  中有限项. 显然,  $A \subset \bigcup_{a \in A} B_{r(a)}(a)$ , 由紧致性, 存在  $a_1, \dots, a_k$  使得

$A \subset \bigcup_{i=1}^k B_{r(a_i)}(a_i)$ , 特别地,  $\{b_n\}$  中只有有限项能出现在  $A$  中, 这就导出了矛盾!

(2)  $\implies$  (3). 先证  $A$  有界, (反证法). 如果存在  $a_n \in A$ , 使得  $\rho(a_0, a_n) \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ), 则显然  $\{a_n\}$  中无收敛子列, 这与假设相矛盾. 再证  $A$  为闭集, 仍用反证法. 根据命题 11.2.3, 此时存在  $a_n \in A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \notin A$ .  $\{a_n\}$  的一切子列均收敛于  $a \notin A$ , 这与  $A$  序列紧相矛盾!

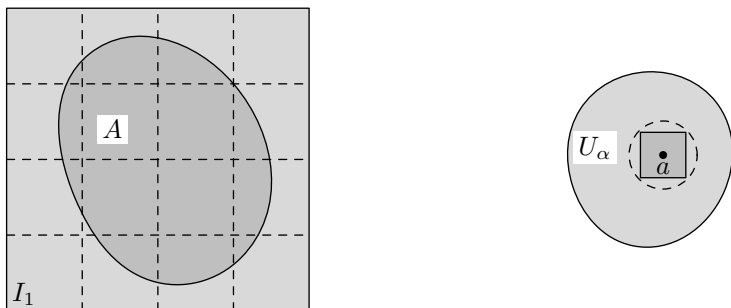


图 11.5 正方体的等分

(3)  $\implies$  (1) (反证法). 设  $A$  为有界闭集, 且存在  $A$  的开覆盖  $\{U_\alpha\}$ , 使得任何有限个  $U_\alpha$  均无法覆盖  $A$ . 取闭正方体  $I_1 \supset A$ , 将  $I_1$  做  $2^n$  等分, 必有一等分  $I_2 \subset I_1$ , 使得  $I_2 \cap A$  不能被有限个  $U_\alpha$  覆盖. 依此类推, 得一串闭立方体  $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$ ,  $\text{diam } I_m \rightarrow 0$  ( $m \rightarrow \infty$ ). 由闭集套原理, 存在惟一的点  $a \in I_m \cap A, \forall m \geq 1$ . 又因为  $\{U_\alpha\}$  为  $A$  的开覆盖, 故存在  $\alpha_0$  使得  $a \in U_{\alpha_0}$ . 于是  $m$  充分大时必有  $I_m \subset U_{\alpha_0}$ . 这与  $I_m \cap A$  不能被有限个  $U_\alpha$  覆盖相矛盾!  $\square$

注. 只有在证明的第三步才用到  $\mathbb{R}^n$  的性质, 特别地, 度量空间中的紧致集合一定是序列紧致的; 反之, 可以证明, 在度量空间中, 序列紧致的集合必定是紧致的, 参见本节习题.

**推论 11.4.3.**  $\mathbb{R}^n$  中有界点列必有收敛子列.

**证明.** 这是因为有界点列必然包含在某个闭球中, 而根据上述定理, 闭球是紧致集合, 因而也是序列紧致的, 特别地, 该点列存在收敛子列.  $\square$

下面的 Lebesgue 数引理是  $\mathbb{R}$  上 Lebesgue 数引理的推广.

**引理 11.4.4 (Lebesgue).** 设  $A$  为度量空间  $X$  中的紧致集合,  $\{U_\alpha\}$  为  $A$  的开覆盖. 则存在  $\lambda > 0$ , 使得只要  $A$  的子集  $B$  满足  $\text{diam}(B) < \lambda$ , 则  $B$  必定包含在某个  $U_\alpha$  中.

**证明.** (反证法) 设满足要求的  $\lambda$  不存在, 则对任意  $n \geq 1$ , 存在  $A$  的子集  $B_n$ , 使得  $B_n$  的直径小于  $1/n$ , 且  $B_n$  不包含于任何  $U_\alpha$  内. 取  $b_n \in B_n$ , 则得到  $A$  中的点列  $\{b_n\}$ . 不论  $\{b_n\}$  是不是有限子集, 由  $A$  的紧致性以及前一命题可知  $\{b_n\}$  存在收敛子列, 不妨设  $\{b_n\}$  本身收敛于  $b_0 \in A$ . 因为  $\{U_\alpha\}$  是  $A$  的开覆盖, 故存在  $\alpha_0$ , 使得  $b_0 \in U_{\alpha_0}$ . 因为  $U_{\alpha_0}$  为开集, 故存在  $\delta > 0$ , 使得

$$B_\delta(b_0) \subset U_{\alpha_0},$$

因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b_0$ , 故可取  $n > 2/\delta$ , 使得  $\rho(b_n, b_0) < \delta/2$ , 此时

$$\rho(b, b_0) \leq \rho(b, b_n) + \rho(b_n, b_0) \leq \text{diam}(B_n) + \frac{\delta}{2} < \frac{1}{n} + \frac{\delta}{2} < \delta, \quad \forall b \in B_n.$$

这说明  $B_n \subset B_\delta(b_0) \subset U_{\alpha_0}$ , 这与  $B_n$  的选取相矛盾.  $\square$

注. 引理中的  $\lambda$  称为关于覆盖  $\{U_\alpha\}$  的 Lebesgue 数. 从证明可以看出 Lebesgue 数引理对序列紧致的集合也成立.

#### 习题 11.4

1. 证明, 有限个紧致集合的交集和并集仍为紧致集合.
2. 设  $A$  为紧致集合,  $B \subset A$  为闭子集, 则  $B$  也是紧致集合.
3. 设  $X$  是紧致度量空间, 证明  $X$  也是完备的.
4. 举例说明一般度量空间中的有界闭集未必为紧致集合 (提示: 离散度量空间).
5.  $[a, b] \cap \mathbb{Q}$  是  $\mathbb{Q}$  中的紧致集合吗? 说明你的理由.
6. 在  $C^0[a, b]$  中取最大模度量, 判断下面子集  $A$  的紧致性

$$A = \{f \in C^0[a, b] \mid |f(x)| \leq 1, \forall x \in [a, b]\}.$$

7. 证明度量空间中的 Lebesgue 数引理对序列紧致的集合也成立.
8. 设  $X$  为紧致度量空间,  $\{A_\alpha\}$  为  $X$  中一族闭集. 如果  $\{A_\alpha\}$  中的任何有限个闭集的交集均非空, 则  $\bigcap_{\alpha} A_\alpha$  也不是空集. (提示: 考虑补集.)
9. (\*) 设  $A$  为度量空间  $X$  中序列紧致的集合, 则任给  $\varepsilon > 0$ , 存在有限个半径为  $\varepsilon$  的开球覆盖  $A$ .
10. (\*) 利用上题以及 Lebesgue 数引理证明, 度量空间中的集合是紧致的当且仅当它是序列紧致的.

### §11.5 连续映射

#### §11.5.1 连续映射及其基本性质

回忆一下连续函数的定义:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  在  $x_0$  处连续是指, 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得  $|x - x_0| < \delta$  时  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ . 用度量空间的语言可作如下推广:

**定义 11.5.1** (连续映射). 设  $f: X \rightarrow Y$  为度量空间  $(X, \rho_1), (Y, \rho_2)$  之间的映射, 设  $x_0 \in X$ . 如果任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得  $f(B_\delta^X(x_0)) \subset B_\varepsilon^Y(f(x_0))$ , 则称  $f$  在  $x_0$  处连续. 如果  $f$  处处连续, 则称  $f$  为连续映射. 当  $Y = \mathbb{R}$  时, 连续映射也称为连续函数.

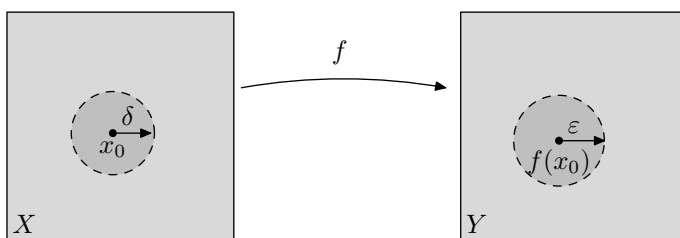


图 11.6 连续映射

其中, 记号  $B_\delta^X(x_0)$  表示  $X$  中以  $x_0$  为中心, 以  $\delta$  为半径的开球,  $B_\varepsilon^Y(f(x_0))$  表示  $Y$  中以  $f(x_0)$  为中心, 以  $\varepsilon$  为半径的开球.

**例 11.5.1.** 距离函数的连续性.

设  $a$  是度量空间  $(X, \rho)$  中固定的一点, 则函数  $f(x) = \rho(x, a)$  是连续的: 设  $x_0 \in X$ , 则任给  $\varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \varepsilon$ , 当  $x \in B_\delta(x_0)$  时

$$|f(x) - f(x_0)| = |\rho(x, a) - \rho(x_0, a)| \leq \rho(x, x_0) < \delta = \varepsilon,$$

因此  $f$  在  $x_0$  处连续.

**命题 11.5.1** (连续映射的刻画). 设  $f: X \rightarrow Y$  为度量空间之间的映射,  $x_0$  为  $X$  中的一点. 则

(1)  $f$  在  $x_0$  处连续  $\iff$  对任意收敛于  $x_0$  的点列  $\{x_n\}$ , 均有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0);$$

(2)  $f$  为连续映射  $\iff$  对任意开集  $V \subset Y$ ,  $f^{-1}(V)$  为  $X$  中开集;

(3)  $f$  为连续映射  $\iff$  对任意闭集  $B \subset Y$ ,  $f^{-1}(B)$  为  $X$  中闭集.

**证明.** (1) “ $\implies$ ” 设  $f$  在  $x_0$  处连续, 则任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得

$$f(B_\delta^X(x_0)) \subset B_\varepsilon^Y(f(x_0)).$$

因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , 故  $n$  充分大时  $x_n \in B_\delta^X(x_0)$ , 从而  $f(x_n) \in B_\varepsilon^Y(f(x_0))$ , 这表明

$$f(x_n) \rightarrow f(x_0) \quad (n \rightarrow \infty).$$

“ $\impliedby$ ” (反证法) 如果  $f$  在  $x_0$  处不连续, 则存在  $\varepsilon_0 > 0$ , 使得对  $\delta = 1/n$ , 存在  $x_n \in B_{1/n}^X(x_0)$ , 而  $f(x_n) \notin B_{\varepsilon_0}^Y(f(x_0))$ . 显然  $x_n \rightarrow x_0$ , 但  $f(x_n) \not\rightarrow f(x_0)$ , 矛盾!

(2) “ $\implies$ ” 设  $f$  为连续映射,  $V$  为  $Y$  中开集. 如果  $x_0 \in f^{-1}(V)$ , 则  $y_0 = f(x_0) \in V$ , 由于  $V$  为开集, 故存在  $\varepsilon > 0$ , 使得  $B_\varepsilon^Y(y_0) \subset V$ . 根据连续性, 存在  $\delta > 0$ , 使得  $f(B_\delta^X(x_0)) \subset B_\varepsilon^Y(y_0) \subset V$ , 即  $B_\delta^X(x_0) \subset f^{-1}(V)$ , 这说明  $f^{-1}(V)$  为开集.

“ $\Leftarrow$ ” 如果开集的原象仍为开集, 则任取  $x_0 \in X$  以及  $\varepsilon > 0$ , 记  $y_0 = f(x_0)$ . 于是  $f^{-1}(B_\varepsilon^Y(y_0))$  为  $X$  中包含  $x_0$  的开集, 从而存在  $\delta > 0$ , 使得

$$B_\delta^X(x_0) \subset f^{-1}(B_\varepsilon^Y(y_0)),$$

即  $f(B_\delta^X(x_0)) \subset B_\varepsilon^Y(y_0)$ , 这说明  $f$  在  $x_0$  处连续.

(3): 留作习题. □

注. (1) 如果  $A$  为  $X$  之子集,  $f: A \rightarrow Y$  为映射, 则把  $X$  的度量限制于  $A$ , 从而  $A$  也为度量空间 (子度量空间), 此时可以定义  $f$  的连续性, 并有类似的刻画.

(2) 设  $f: A \rightarrow Y$  连续, 如果任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得  $\rho_1(a_1, a_2) < \delta$  时  $\rho_2(f(a_1), f(a_2)) < \varepsilon$ , 则称  $f$  为一致连续映射.

**例 11.5.2.** *Lipschitz* 映射.

设  $f: X \rightarrow Y$  是度量空间之间的映射, 如果存在常数  $L$ , 使得

$$\rho_2(f(x_1), f(x_2)) \leq L\rho_1(x_1, x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in X,$$

则称  $f$  为 Lipschitz 映射,  $L$  称为 Lipschitz 常数. Lipschitz 映射是一致连续的. 特别地, 压缩映射是 Lipschitz 映射, 因此也是连续映射.

**定理 11.5.2** (连续映射与紧性). 设  $f: X \rightarrow Y$  为连续映射, 则

- (1)  $f$  将  $X$  中紧致集合映为  $Y$  中紧致集合;
- (2)  $f$  在紧致集合上一致连续.

**证明.** (1) 设  $A$  为  $X$  中紧致集合, 取  $f(A)$  的开覆盖  $\{V_\alpha\}$ , 则  $\{f^{-1}(V_\alpha)\}$  为  $A$  的开覆盖, 从而存在  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  使得  $A \subset \bigcup_{i=1}^k f^{-1}(V_{\alpha_i})$ . 这说明  $f(A) \subset \bigcup_{i=1}^k V_{\alpha_i}$ .

(2) 设  $A$  为紧致集合. 如果  $f$  在  $A$  上不是一致连续的, 则存在  $\varepsilon_0 > 0$ , 使得对  $\delta = 1/n$ , 存在  $a_n, b_n \in A$ , 使得

$$\rho_1(a_n, b_n) < \frac{1}{n}, \quad \rho_2(f(a_n), f(b_n)) > \varepsilon_0.$$

$\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  分别存在收敛子列, 不妨设它们本身是收敛的, 极限分别为  $a_0, b_0$ , 则

$$\begin{aligned} \rho_1(a_0, b_0) &\leq \rho_1(a_0, a_n) + \rho_1(a_n, b_n) + \rho_1(b_n, b_0) \\ &< \frac{1}{n} + \rho_1(a_0, a_n) + \rho_1(b_n, b_0) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

即  $a_0 = b_0$ . 但

$$\varepsilon_0 < \rho_2(f(a_n), f(b_n)) \leq \rho_2(f(a_n), f(a_0)) + \rho_2(f(b_0), f(b_n)) \rightarrow 0.$$

这就导出了矛盾! □

**推论 11.5.3** (最值定理). 连续函数  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  在紧致集合上可以取到最大值和最小值.

**证明.** 设  $A$  为  $X$  中的紧致集合, 则  $f(A)$  是  $\mathbb{R}$  中的紧致集合, 因此为  $\mathbb{R}$  中的有界闭集. 这说明  $f(A)$  中存在最大数和最小数, 它们分别是  $f$  在  $A$  上的最大值和最小值.  $\square$

**定义 11.5.2** (道路连通). 设  $G$  为  $X$  的子集, 如果任给  $x_1, x_2 \in G$ , 均存在连续映射 (连续曲线)  $\sigma: I = [0, 1] \rightarrow X$  使得  $\sigma(0) = x_1, \sigma(1) = x_2, \sigma(I) \subset G$ , 则称  $G$  道路连通.

显然,  $\mathbb{R}^n$  是道路连通的, 因为任何两点均可用直线段相连接.

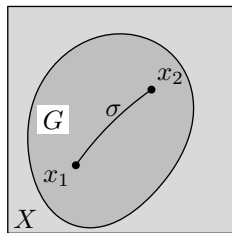


图 11.7 连通区域

**命题 11.5.4.**  $\mathbb{R}$  中道路连通集合必为区间 (可退化为一).

**证明.** 设  $G \subset \mathbb{R}$  道路连通,  $a \leq b \in G$ . 我们证明  $[a, b] \subset G$ . 事实上, 由定义, 存在连续映射  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , 使得  $f(0) = a, f(1) = b, f([0, 1]) \subset G$ .  $f$  为一元连续函数, 由介值定理,  $[a, b] \subset f([0, 1]) \subset G$ .  $\square$

**定理 11.5.5** (连续映射与连通性). 连续映射将道路连通的集合映为道路连通集合.

**证明.** 设  $G \subset X$  道路连通,  $f: X \rightarrow Y$  连续. 任取  $y_1, y_2 \in f(G)$ , 则存在  $x_1, x_2 \in G$  使得  $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$ . 由定义, 存在连续映射  $\sigma: [0, 1] \rightarrow X$  使得  $\sigma(0) = x_1, \sigma(1) = x_2, \sigma([0, 1]) \subset G$ . 复合映射  $f \circ \sigma: [0, 1] \rightarrow Y$  连续, 且  $f \circ \sigma(0) = f(x_1) = y_1, f \circ \sigma(1) = f(x_2) = y_2, f \circ \sigma([0, 1]) \subset f(G)$ .  $f \circ \sigma$  就是  $f(G)$  中连接  $y_1, y_2$  的道路.  $\square$

**推论 11.5.6** (介值定理). 设  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  为连续函数,  $G \subset X$  道路连通.

- (1) 如果存在  $x_1, x_2 \in G$ , 使得  $f(x_1)f(x_2) \leq 0$ , 则存在  $x_0 \in G$  使得  $f(x_0) = 0$ ;
- (2) 对于满足条件  $f(x_1) \leq y \leq f(x_2)$  的任意  $y$ , 一定存在  $x \in G$  使得  $y = f(x)$ .

**证明.** 以 (2) 为例. 因为  $f$  连续,  $G$  道路连通, 故  $f(G) \subset \mathbb{R}$  也道路连通, 从而  $f(G)$  为区间. 由  $f(x_1), f(x_2) \in f(G)$  即知  $[f(x_1), f(x_2)] \subset f(G)$ , 特别地,  $y \in f(G)$ , 即存在  $x \in G$  使得  $y = f(x)$ .  $\square$

**例 11.5.3.** 设  $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  为单位圆周上的连续函数, 则存在  $x_0 \in S^1$ , 使得

$$f(-x_0) = f(x_0).$$

**证明.** 考虑函数  $g: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ , 使得

$$g(x) = f(x) - f(-x), \quad \forall x \in S^1.$$

则  $g$  也是连续函数, 且

$$g(x)g(-x) = [f(x) - f(-x)][f(-x) - f(x)] = -[f(x) - f(-x)]^2 \leq 0,$$

根据介值定理, 存在  $x_0 \in S^1$ , 使得  $g(x_0) = 0$ , 此时  $f(-x_0) = f(x_0)$ .  $\square$

### §11.5.2 欧氏的连续映射

在以后的章节中, 欧氏空间将是我们的研究对象. 因此, 我们要考虑从一个欧氏空间到另一个欧氏空间的映射. 从  $\mathbb{R}$  到  $\mathbb{R}$  的映射称为一元函数; 当  $n > 1$  时, 从  $\mathbb{R}^n$  到  $\mathbb{R}$  的映射称为多元函数; 一般地, 从  $\mathbb{R}^n$  到  $\mathbb{R}^m$  的映射称为向量值函数.

对于多元连续函数来说, 其四则运算性质和一元连续函数没有什么不同.

**命题 11.5.7.** 设  $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  为连续函数, 则

- (1) 当  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  时,  $\lambda f + \mu g$  也是连续函数;
- (2)  $fg$  为连续函数;
- (3) 当  $g \neq 0$  时,  $f/g$  为连续函数.

现在我们考虑向量值的函数  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , 写成分量的形式为

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

我们有

**命题 11.5.8.**  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  为连续映射当且仅当  $f_i$  均为连续函数, 其中  $i = 1, \dots, m$ .

**证明.** 由连续性的刻画可知,  $f$  在  $x_0$  处连续当且仅当  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , 根据欧氏空间中的极限性质,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x) = f_i(x_0), \quad i = 1, \dots, m.$$

即  $f$  在  $x_0$  处连续当且仅当  $f_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) 均在  $x_0$  处连续.  $\square$

**例 11.5.4.** 线性映射.

设  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  为向量值函数. 如果任给  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , 成立

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$



则称  $f$  为线性映射.  $m = 1$  的情形就是线性函数.

记  $e_i$  是  $\mathbb{R}^n$  中第  $i$  个位置为 1, 其它位置为零的向量, 则  $\{e_1, \dots, e_n\}$  为  $\mathbb{R}^n$  的一组标准基.  $\mathbb{R}^n$  中的向量  $x$  可写为

$$x = (x_1, \dots, x_n) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n,$$

根据线性性,  $f(x)$  可写为

$$f(x) = f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n),$$

这是线性函数表达式的推广. 如果记  $f(e_i) = (a_{1i}, \dots, a_{mi})$ , 用列向量表示, 则上式可改写为

$$f(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

这是线性映射的矩阵表示,  $f$  由矩阵  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  完全决定了.

如果  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^s$  均为连续映射, 则复合映射  $g \circ f$  是从  $\mathbb{R}^n$  到  $\mathbb{R}^s$  的连续映射. 如果  $f, g$  均为线性映射, 且其矩阵表示分别为  $A, B$ , 则  $g \circ f$  也是线性映射, 其矩阵表示为  $BA$ . 因此, 对于线性映射的研究可以转化为对于矩阵的研究, 这是线性代数的内容.

### §11.5.3 二元函数及其极限

映射  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  称为二元函数.  $\mathbb{R}^2$  中的点用坐标  $(x, y)$  表示. 设  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , 如果存在  $A \in \mathbb{R}$ , 使得任给  $\varepsilon > 0$ , 均存在  $\delta > 0$  当

$$0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

时,  $|f(x, y) - A| < \varepsilon$ , 就称  $f$  在  $(x_0, y_0)$  处有极限 (重极限), 记为

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = A \quad \text{或} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x,y) = A.$$

如果对于每一个固定的  $y$ , 极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \varphi(y)$  存在, 则可以定义极限

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y).$$

类似地定义  $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ , 称它们为累次极限.

**例 11.5.5.** (1)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0$ , 这是因为

$$0 \leq \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2} |xy| \leq \frac{1}{4} (x^2 + y^2).$$

(2)  $\frac{xy}{x^2+y^2}$  在  $(0,0)$  处无极限 (分别考虑  $y=x$  和  $y=x^2$ .)

(3)  $f(x,y) = x \sin \frac{1}{y}$ . 由  $|f(x,y)| \leq x$  知  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ , 但  $\lim_{y \rightarrow 0} f(x,y)$  不存在.

(4)  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0$ , 但由 (2) 知重极限不存在.

**定理 11.5.9.** 如果  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = A$ , 且对任意  $y \neq b$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x,y) = \varphi(y)$  存在, 则

$$\lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x,y) = \lim_{y \rightarrow b} \varphi(y) = A;$$

如果对任意  $x \neq a$ ,  $\lim_{y \rightarrow b} f(x,y)$  也存在, 则

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x,y) = A = \lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x,y).$$

**证明.** 以  $A$  有限为例. 由假设, 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 当

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$$

时  $|f(x,y) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ . 固定  $y$ , 令  $x \rightarrow a$ , 得

$$\left| \lim_{x \rightarrow a} f(x,y) - A \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \quad \forall 0 < |y-b| < \frac{\delta}{2}.$$

这说明

$$\lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x,y) = A.$$

其它情形可类似证明. □

### 习题 11.5

1. 证明连续映射的复合仍为连续映射.
2. 设  $f: X \rightarrow Y$  为从度量空间到度量空间的映射. 证明,  $f$  为连续映射的充分必要条件是闭集的原象还是闭集.
3. 举例说明, 从  $\mathbb{R}^2$  到  $\mathbb{R}$  的连续映射不一定把闭集映为闭集 (提示: 考虑一元函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  的图像, 并向  $x$  轴作投影).
4. 设  $A$  为度量空间  $(X, d)$  中的子集, 令

$$d_A: X \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_A(x) = \inf_{a \in A} d(a, x).$$

证明  $d_A$  为连续映射, 且  $d_A(x_0) = 0$  当且仅当  $x_0 \in \bar{A}$ .

5. 设  $v, w \in \mathbb{R}^2$  为两个线性无关的向量, 如果函数  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  满足条件

$$f(x+v) = f(x), \quad f(x+w) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

则称  $f$  为双周期函数. 证明, 双周期连续函数一定可以取到最大值和最小值.

6. 证明,  $\mathbb{R}^n$  不能写成两个不相交非空闭集的并. (提示: 考虑道路连通性质.)
7. 设  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  为连续函数, 则存在两个不同的点  $p, q \in \mathbb{R}^2$ , 使得  $f(p) = f(q)$ .
8. 判断下列极限是否存在, 如存在则计算出来:

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad (2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2};$$

$$(3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 \ln(x^2 + y^2); \quad (4) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}.$$

9. 判断下列极限是否存在, 如存在则计算出来:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4}; \quad (2) \lim_{y \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4}; \quad (3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^y}{1 + x^y};$$

$$(4) \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^y}{1 + x^y}; \quad (5) \lim_{x \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi x}{2x + y}; \quad (6) \lim_{y \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi x}{2x + y}.$$

10. (\*) 证明  $\mathbb{R}^{n+1}$  中的单位球面

$$S^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$$

是道路连通的集合.

11. (\*) 设多元函数  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  在每一点附近都是有界的. 则  $f$  连续的充分必要条件是其图像  $\text{graph}(f)$  为闭集, 其中

$$\text{graph}(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in \mathbb{R}^n\}.$$

12. (\*) 给定  $\mathbb{R}^n$  中  $m$  个点, 证明存在  $\mathbb{R}^n$  中半径最小的闭球包含这些给定的点, 并且这样的球是惟一的; 如果给定 3 个点, 求这个球的球心和半径.

## 第十二章 多元函数的微分

在这一章中, 我们将研究多个变量的函数或映射的基本性质. 在前一章中我们已经研究过连续性了, 因此我们将研究多变量函数或映射的微分性质. 微分学的基本方法就是对函数或向量值的函数作线性化, 用线性映射去作逼近. 本章大部分的内容和一元函数相应的内容平行, 但有一些地方也有本质不同, 我们会在这些地方着重强调说明.

### §12.1 方向导数和偏导数

**定义 12.1.1** (方向导数). 设  $D$  为  $\mathbb{R}^n$  中的开集,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  为  $D$  中定义的函数. 对于  $p \in D$ , 以及  $\mathbb{R}^n$  中单位向量  $u$ , 极限

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p+tu) - f(p)}{t}$$

如果存在, 则称  $f$  在  $p$  处沿方向  $u$  有方向导数, 上述极限记为  $\frac{\partial f}{\partial u}(p)$ , 称为  $f$  沿  $u$  的方向导数.

注. (1) 方向导数就是一元函数  $\varphi(t) = f(p+tu)$  在  $t=0$  处的导数. 特别地, 当  $u = e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  (第  $i$  个位置为 1 的单位向量) 时, 又将  $\frac{\partial f}{\partial u}(p)$  记为  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ , 称为  $f$  的第  $i$  个偏导数. 按定义, 有

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p_1, \dots, p_{i-1}, p_i + t, p_{i+1}, \dots, p_n) - f(p_1, \dots, p_n)}{t}.$$

(2) 偏导数  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  又记为  $f'_{x_i}$  或  $f_{x_i}$ . 如果  $f'_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$  仍然可求偏导数, 则记  $f''_{y_i x_i} = \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$ ,  $f''_{x_i y_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial y_i} \right)$ , 称为 2 阶偏导数. 类似地可以定义高阶偏导数. 如果  $f$  存在直到  $k$  阶的连续偏导数, 则称  $f$  为  $C^k$  函数. 我们也使用形如这样的记号:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial y_i} \right), \quad \dots$$

**例 12.1.1.** 求  $f(x, y) = xy$  的 1 阶, 2 阶偏导数.

**解.**  $f'_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) = y$ ,  $f'_y = x$ ,  $f''_{yx} = 1$ ,  $f''_{xy} = 1$ ,  $f''_{xx} = f''_{yy} = 0$ .

**例 12.1.2.** 求  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + xy$  在  $(x_0, y_0) = (1, 2)$  处的偏导数.

**解.** 直接计算表明

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x.$$

因此有

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = \frac{\sqrt{5}}{5} + 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = \frac{2}{5}\sqrt{5} + 1.$$

**例 12.1.3.** 设  $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ , 求函数

$$f(x, y, z) = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{-\frac{1}{2}}$$

的偏导数.

**解.** 记

$$r = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{1}{2}}$$

则

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \frac{x - x_0}{r} = -\frac{x - x_0}{r^3}.$$

同理,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y - y_0}{r^3}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{z - z_0}{r^3}.$$

需要注意的是, 偏导数或方向导数只反映函数沿特定方向的性质, 例如偏导数或方向导数的存在不能保证多元函数的连续性, 这在一元函数不同.

**例 12.1.4.** 研究下面函数的方向导数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

因为  $f$  在两个坐标轴上恒为零, 因此  $f$  在  $(0, 0)$  处的偏导数为零. 取单位向量  $u = (u_1, u_2)$ , 当  $u_2 \neq 0$  时, 有

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \frac{t^3 u_1^2 u_2}{t^4 u_1^4 + t^2 u_2^2} = \frac{u_1^2}{u_2},$$

这说明  $f$  在  $(0, 0)$  处方向导数都存在. 但  $f$  在  $(0, 0)$  处不连续 (习题).  $\square$

**定理 12.1.1 (复合求导).** 设  $f$  如前,  $x^0 \in D$ . 假设  $f'_{x_i}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 在  $x^0$  处连续, 则

(1)  $f$  在  $x^0$  处连续;

(2) 如果  $x_i = x_i(t)$  在  $t_0$  处可导,  $x^0 = (x_1(t_0), \dots, x_n(t_0))$ , 则  $f(x(t))$  在  $t = t_0$  处可导, 且

$$\left. \frac{df(x(t))}{dt} \right|_{t=t_0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t_0)) \cdot \frac{dx_i}{dt}(t_0).$$

**证明.** (1) 利用微分中值定理, 有

$$\begin{aligned} f(x) - f(x^0) &= \sum_{i=1}^n [f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i, \dots, x_n) - f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}, \dots, x_n)] \\ &= \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, \xi_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \cdot (x_i - x_i^0), \end{aligned}$$

当  $x \rightarrow x^0$  时,  $\xi_i \rightarrow x_i^0$ , 由  $f'_{x_i}$  在  $x^0$  处连续知  $\lim_{x \rightarrow x^0} (f(x) - f(x^0)) = 0$ .

(2) 由 (1) 的证明, 有

$$\begin{aligned} \left. \frac{df}{dt} \right|_{t=t_0} &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(x(t)) - f(x(t_0))}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, \xi_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \cdot \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \\ &= \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(x^0) \cdot x'_i(t_0). \end{aligned}$$

这就证明了定理. □

**推论 12.1.2.** 在定理的条件下, 如果  $u = \sum_{i=1}^n u_i \cdot e_i = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ , 则

$$\frac{\partial f}{\partial u}(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(p + tu) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot u_i.$$

**定理 12.1.3** (求导次序的可交换性). 设  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  为二元函数,  $(x_0, y_0) \in D$ . 如果  $f''_{xy}$  和  $f''_{yx}$  在  $(x_0, y_0)$  处连续, 则

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

**证明.** 对于充分小的  $k \neq 0, h \neq 0$  分别考虑函数

$$\varphi(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y),$$

$$\psi(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0).$$

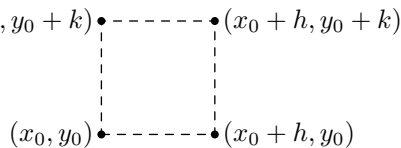


图 12.1 求导的次序

由微分中值定理, 有

$$\begin{aligned} \varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0) &= \varphi'_y(y_0 + \theta_1 k)k \quad (0 < \theta_1 < 1) \\ &= [f'_y(x_0 + h, y_0 + \theta_1 k) - f'_y(x_0, y_0 + \theta_1 k)]k \\ &= f''_{xy}(x_0 + \theta_2 h, y_0 + \theta_1 k)kh. \quad (0 < \theta_2 < 1) \end{aligned}$$

同理,

$$\psi(x_0 + h) - \psi(x_0) = f''_{yx}(x_0 + \theta_3 h, y_0 + \theta_4 k)hk, \quad (0 < \theta_3, \theta_4 < 1).$$

易见,

$$\varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0) = \psi(x_0 + h) - \psi(x_0),$$

故有

$$f''_{xy}(x_0 + \theta_2 h, y_0 + \theta_1 k) = f''_{yx}(x_0 + \theta_3 h, y_0 + \theta_4 k).$$

令  $k, h \rightarrow 0$ , 由  $f''_{xy}, f''_{yx}$  在  $(x_0, y_0)$  处连续即得欲证等式.  $\square$

**推论 12.1.4.** 多元函数的各阶偏导数如果连续, 则其值与求导次序无关.

**例 12.1.5.** 考虑函数

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

则  $f''_{xy}(0, 0) = 1, f''_{yx}(0, 0) = -1$ , 这说明上述定理中关于导数连续性的假设不可全去掉 (但可减弱, 参见本节习题).

### 习题 12.1

1. 设  $f$  为多元函数, 证明: 如果  $u, v$  为单位向量, 且  $u = -v$ , 则  $\frac{\partial f}{\partial u} = -\frac{\partial f}{\partial v}$ .

2. 计算偏导数:

(1)  $f(x, y) = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$ , 求  $f'_x(3, 4), f'_y(0, 1)$ ,

(2)  $f(x, y, z) = (\cos x / \sin y)e^z$ , 求  $(\pi, \frac{\pi}{2}, \ln 3)$  处的一阶偏导数,

(3)  $f(x, y) = \sin(x^2 y)$ , 求  $(1, 1)$  处的一阶偏导数.

3. 求下列函数的一阶偏导数:

$$\begin{array}{lll} (1) xy + \frac{x}{y}; & (2) \tan \frac{x^2}{y}; & (3) \cos(x^2 + y^2); \\ (4) \ln(x + \frac{y}{x^2}); & (5) x^2 y^{3/2}; & (6) e^{xy+yz+zx}; \\ (7) \arctan \frac{y}{x}; & (8) x^y; & (9) \ln(x_1 + x_2 + \cdots + x_n). \end{array}$$

4. 求下列函数的一阶和二阶偏导数:

$$\begin{array}{lll} (1) x^2 y^3; & (2) \ln xy; & (3) \arcsin(x_1^2 + \cdots + x_n^2); \\ (4) e^{x^y}; & (5) \tan(\arctan x + \arctan y); & (6) e^{x^2 + xyz}. \end{array}$$

5. 设  $z = f(xy)$ , 证明  $x \frac{\partial z}{\partial x} = y \frac{\partial z}{\partial y}$ .

6. 设  $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$ , 证明  $u'_x = v'_y, u'_y = -v'_x$ .

7. 记  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ , 称为平面  $\mathbb{R}^2$  上的 Laplace 算子, 证明上题中的  $u, v$  满足方程  $\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = 0$ ,  $\Delta v = v''_{xx} + v''_{yy} = 0$ .
8. 记  $r = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{1}{2}}$ , 证明  $\Delta r^{-1} = 0$ , 其中,  $\Delta$  为  $\mathbb{R}^3$  中的 Laplace 算子,  $\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz}$ .
9. (\*) 设  $f(x, y)$  分别关于变量  $x, y$  为连续函数, 证明, 如果  $f$  关于其中一个变量是单调函数 (比如偏导数存在且非负), 则  $f$  为二元连续函数.
10. (\*) 证明, 在定理 12.1.3 中, 只要两个混合导数  $f''_{xy}$  和  $f''_{yx}$  之一在  $(x_0, y_0)$  处连续, 结论同样成立.

## §12.2 切线和切面

设  $\sigma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$  为连续映射, 我们称  $\sigma$  为  $\mathbb{R}^n$  中的连续曲线. 记

$$\sigma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

如果  $x_i(t)$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 在  $t = t_0$  处均可导, 则称  $\sigma$  在  $t_0$  处可导, 记

$$\sigma'(t_0) = \frac{d\sigma}{dt}(t_0) = \left. \frac{d\sigma}{dt} \right|_{t=t_0} = (x'_1(t_0), \dots, x'_n(t_0)),$$

称  $\sigma'(t_0)$  为  $\sigma$  在  $t_0$  处的切向量.

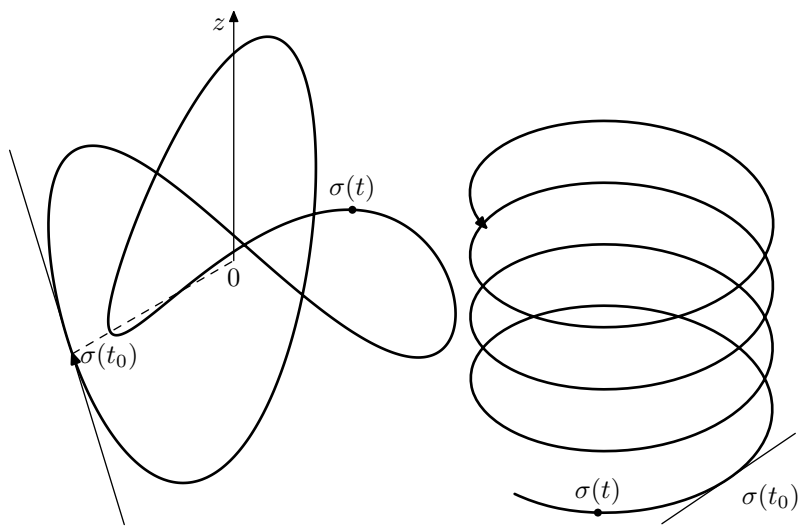


图 12.2 切线



当  $\sigma'(t_0) \neq 0$  时, 称  $\{\sigma(t_0) + \sigma'(t_0)u \mid u \in \mathbb{R}\}$  为  $\sigma$  在  $t_0$  处的切线, 其方程可写为  $p - \sigma(t_0) = u \cdot \sigma'(t_0)$ , 或

$$\frac{x_1 - x_1(t_0)}{x'_1(t_0)} = \frac{x_2 - x_2(t_0)}{x'_2(t_0)} = \cdots = \frac{x_n - x_n(t_0)}{x'_n(t_0)}.$$

经过  $\sigma(t_0)$  且与切线正交的超平面称为法面, 其方程为

$$(q - \sigma(t_0)) \cdot \sigma'(t_0) = 0.$$

**例 12.2.1.** 设  $f$  为一元可微函数, 令

$$\sigma(t) = (t, f(t)),$$

则  $\sigma'(t_0) = (1, f'(t_0))$ ,  $\sigma$  在  $t_0$  处切线方程为

$$\frac{x - t_0}{1} = \frac{y - f(t_0)}{f'(t_0)},$$

即

$$y = f(t_0) + f'(t_0)(x - t_0).$$

这也就是一元函数图像的切线. □

**例 12.2.2.** 求螺旋线

$$\sigma(t) = (a \cos t, a \sin t, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

的切线和法面方程.

**解.** 在  $t = t_0$  处,  $\sigma'(t_0) = (-a \sin t_0, a \cos t_0, 1)$ , 故切线方程为

$$\frac{x - a \cos t_0}{-a \sin t_0} = \frac{y - a \sin t_0}{a \cos t_0} = \frac{z - t_0}{1},$$

法面方程化简后为  $-xa \sin t_0 + ya \cos t_0 + z - t_0 = 0$ . □

设  $D$  为  $\mathbb{R}^m$  中的开集, 我们称连续映射  $r: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $n > m$ ) 为  $\mathbb{R}^n$  中的参数曲面. 设  $u^0 = (u_1^0, \cdots, u_m^0) \in D$ , 则

$$u \mapsto r(u_1^0, \cdots, u_{i-1}^0, u, u_{i+1}^0, \cdots, u_m^0)$$

为  $\mathbb{R}^n$  中曲线, 称为参数曲面上的  $u_i$  曲线. 如果  $u_i$  曲线在  $u_i^0$  处可导, 则记

$$\frac{\partial r}{\partial u_i}(u^0) = r_{u_i}(u^0) = r'_{u_i}(u^0),$$

它是该曲线在  $u^0$  处的切向量. 如果  $\{r'_{u_i}(u^0) \mid 1 \leq i \leq m\}$  线性无关 (此时称  $u^0$  为正则点), 则称由这些切向量张成的、经过  $r(u^0)$  的子线性空间为切空间, 切空间的正交补称为法空间, 法空间中的向量称为法向量.

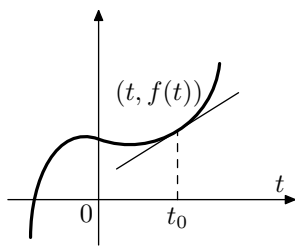


图 12.3 函数图像的切线

对于  $\mathbb{R}^3$  中的曲面, 设其参数表示为

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

则其切向量为

$$r'_u(u_0, v_0) = (x'_u(u_0, v_0), y'_u(u_0, v_0), z'_u(u_0, v_0)),$$

$$r'_v(u_0, v_0) = (x'_v(u_0, v_0), y'_v(u_0, v_0), z'_v(u_0, v_0)).$$

如果  $r'_u(u_0, v_0), r'_v(u_0, v_0)$  线性无关, 则

$$\begin{aligned}\vec{n} &= r'_u(u_0, v_0) \times r'_v(u_0, v_0) \\ &= (y'_u z'_v - z'_u y'_v, z'_u x'_v - x'_u z'_v, x'_u y'_v - y'_u x'_v) \neq 0,\end{aligned}$$

$\vec{n}$  为法向量, 从而曲面的切平面方程为

$$(p - r(u_0, v_0)) \cdot \vec{n} = 0,$$

或改写为

$$\begin{vmatrix} x - x(u_0, v_0) & y - y(u_0, v_0) & z - z(u_0, v_0) \\ x'_u(u_0, v_0) & y'_u(u_0, v_0) & z'_u(u_0, v_0) \\ x'_v(u_0, v_0) & y'_v(u_0, v_0) & z'_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0.$$

**例 12.2.3.** 求球面  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  的切面.

**解.** 球面可写成参数曲面

$$x = \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \cos \theta,$$

其中  $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . 其法向量为

$$\begin{aligned}\vec{n} &= (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta) \times (-\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, 0) \\ &= \sin \theta \cdot (x, y, z),\end{aligned}$$

故球面在  $(x_0, y_0, z_0)$  处切平面方程为

$$(x - x_0) \cdot x_0 + (y - y_0) \cdot y_0 + (z - z_0) \cdot z_0 = 0.$$

一般地, 当  $m = n - 1$  时, 称参数曲面  $r: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  为超曲面. 如果  $r$  表示为

$$r(u) = r(u_1, \dots, u_{n-1}) = (x_1(u_1, \dots, u_{n-1}), \dots, x_n(u_1, \dots, u_{n-1})),$$

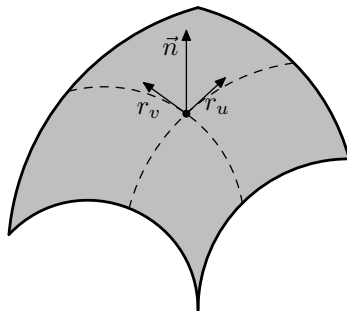


图 12.4 切向量与法向量

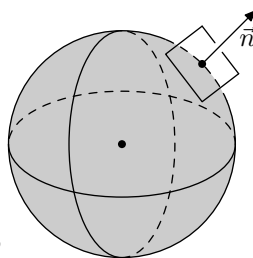


图 12.5 球面的切面

在正则点  $u^0$  处, 曲面的  $n-1$  个切向量为

$$r'_{u_i}(u^0) = \left( \frac{\partial x_1}{\partial u_i}(u^0), \dots, \frac{\partial x_n}{\partial u_i}(u^0) \right), \quad i = 1, \dots, n-1.$$

记  $\vec{N} = (N_1, \dots, N_n)$ , 其中

$$N_i = (-1)^{i-1} \frac{\partial(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_{n-1})}(u^0),$$

这里我们采用了下面的记号

$$\frac{\partial(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_{n-1})}(u^0) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1}(u^0) & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial u_{n-1}}(u^0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_{i-1}}{\partial u_1}(u^0) & \dots & \frac{\partial x_{i-1}}{\partial u_{n-1}}(u^0) \\ \frac{\partial x_{i+1}}{\partial u_1}(u^0) & \dots & \frac{\partial x_{i+1}}{\partial u_{n-1}}(u^0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1}(u^0) & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial u_{n-1}}(u^0) \end{pmatrix}.$$

根据矩阵行列式的性质,  $\vec{N}$  与  $r'_{u_i}(u^0)$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) 均正交, 即  $\vec{N}$  是曲面的法向量.

### 习题 12.2

1. 求下列曲线在指定点的切线和法面方程:

(1)  $\sigma(t) = (a \cos t \sin t, b \sin^2 t, c \cos t)$ ,  $t = \frac{\pi}{4}$ ,

(2)  $\sigma(t) = (t, t^2, t^3)$ ,  $t = t_0$ ,

(3)  $\sigma(t) = (a \cos t, a \sin t)$ ,  $t = t_0$ .

2. 求下列曲面在指定点的切面和法线:

(1)  $r(u, v) = (u, a \cos v, a \sin v)$ ,  $(u, v) = (u_0, v_0)$ ,

(2)  $z = x^2 + y^2$ ,  $(x, y, z) = (1, 2, 5)$ ,

(3)  $r(u, v) = (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u)$ ,  $(u, v) = (u_0, v_0)$ .

3. 设  $D \subset \mathbb{R}^n$  为开集,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  具有连续的偏导数.  $f$  的图像  $\text{graph}(f)$  是  $\mathbb{R}^{n+1}$  中的超曲面, 其中

$$\text{graph}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in D\} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

求此超曲面在任何一点的法向量和切空间方程.

4. 求三维球面  $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$  在任意一点的法向量和切空间方程.

## §12.3 映射的微分

回忆一下, 对于一元函数而言, 可微是指该函数可以被线性函数一阶逼近. 我们也可以利用线性化的思想来研究多元函数.

设  $D \subset \mathbb{R}^n$  为开集, 向量值函数  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$  写成分量形式为

$$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)),$$

为方便起见, 在下面的内容中欧氏空间里的向量有时以列向量来表示.

**定义 12.3.1** (微分). 设  $f$  如上,  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in D$ . 如果存在  $m \times n$  阶的矩阵  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , 使得对于  $x^0$  附近的点  $x$ , 有

$$\|f(x) - [f(x^0) + A \cdot (x - x^0)]\| = o(\|x - x^0\|), \quad (x \rightarrow x^0)$$

则称  $f$  在  $x^0$  处可微, 线性映射

$$\begin{aligned} df(x^0) : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ v &\mapsto A \cdot v \end{aligned}$$

称为  $f$  在  $x^0$  处的微分.

**命题 12.3.1** (可微  $\implies$  可导). 如果  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$  在  $x^0$  处可微, 则其分量  $f_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) 在  $x^0$  处存在方向导数, 并且

$$A = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) \right)_{m \times n}.$$

**证明.** 从微分的定义可以看出, 如果  $f$  在  $x^0$  处可微, 则  $f$  在  $x^0$  处连续. 下面以  $m = 1$  为例说明方向导数的存在性.

为此, 取单位向量  $u$ , 由定义, 我们有

$$\begin{aligned} f(x^0 + tu) - f(x^0) &= A \cdot (x^0 + tu - x^0) + o(\|x^0 + tu - x^0\|) \\ &= tA \cdot u + o(|t|), \end{aligned}$$

这说明  $\frac{\partial f}{\partial u}(x^0) = A \cdot u$ , 即方向导数存在. 特别地,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = A \cdot e_i, \quad A = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) \right).$$

这就证明了命题. □

**例 12.3.1.** 研究函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

在  $(0, 0)$  处的可导性和可微性.

解. 因为  $|f(x, y)| \leq \frac{1}{2}|x|$ , 故  $f$  在  $(0, 0)$  处连续, 易见  $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$ . 如果  $u = (u_1, u_2)$  为单位向量, 则

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tu_1, tu_2)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 u_1^2 u_2}{(u_1^2 + u_2^2)t^3} = u_1^2 u_2.$$

这说明  $f$  在  $(0, 0)$  处的方向导数存在, 然而  $f$  在  $(0, 0)$  处不可微 (为什么?).  $\square$

如果  $f_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) 的偏导数均存在, 则记  $Jf = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{m \times n}$ , 称为  $f$  的 Jacobian 矩阵. 当  $m = 1$  时, 又记  $Jf$  为  $\nabla f$ , 称为  $f$  的梯度.  $Jf$  在每一点的值构成一个映射  $Jf: D \rightarrow \mathbb{R}^{mn}$ , 这里我们将  $m \times n$  阶矩阵视为  $\mathbb{R}^{mn}$  中的点.

**定理 12.3.2** (可微的充分条件). 如果  $Jf$  在  $D$  中存在, 且它作为映射在  $x^0$  处连续, 则  $f$  在  $x^0$  处可微.

**证明.** 仍以  $m = 1$  为例来证明. 由条件,  $f'_{x_i}$  在  $x^0$  处连续,  $i = 1, 2, \dots, n$ . 根据微分中值定理, 有

$$\begin{aligned} f(x) - f(x^0) &= \sum_{i=1}^n [f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1^0, \dots, x_i^0, x_{i+1}, \dots, x_n)] \\ &= \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0 + \theta_i(x_i - x_i^0), x_{i+1}, \dots, x_n) \cdot (x_i - x_i^0) \\ &= \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(x^0) \cdot (x_i - x_i^0) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot (x_i - x_i^0), \end{aligned}$$

其中, 当  $x_i \rightarrow x_i^0$  时

$$\alpha_i = f'_{x_i}(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0 + \theta_i(x_i - x_i^0), x_{i+1}, \dots, x_n) - f'_{x_i}(x_1^0, \dots, x_n^0) \rightarrow 0,$$

从而

$$\begin{aligned} \left\| f(x) - [f(x^0) + \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(x^0) \cdot (x_i - x_i^0)] \right\| &\leq \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|x - x^0\| \\ &= o(\|x - x^0\|), \end{aligned}$$

即  $f$  在  $x^0$  处可微.  $\square$

如果我们将  $m \times n$  的矩阵视为  $\mathbb{R}^{mn}$  中的点, 则矩阵也可定义自然的范数. 即, 如果  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , 则其范数定义为

$$\|A\| = \left[ \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij}^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

由 Schwarz 不等式可得

$$\|A \cdot v\| \leq \|A\| \cdot \|v\|, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

**定理 12.3.3** (复合求导). 设  $\Delta$  为  $\mathbb{R}^l$  中开集,  $D$  为  $\mathbb{R}^m$  中开集,  $g: \Delta \rightarrow D$  及  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  为映射. 如果  $g$  在  $u^0 \in \Delta$  处可微,  $f$  在  $x^0 = g(u^0)$  处可微, 则复合映射  $h = f \circ g: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  在  $u^0$  处可微, 且

$$Jh(u^0) = Jf(x^0) \cdot Jg(u^0).$$

**证明.** 因为  $g$  在  $u^0$  处可微, 故

$$g(u) - g(u^0) = Jg(u^0) \cdot (u - u^0) + R_g(u, u^0), \quad (12.1)$$

其中  $R_g(u, u^0) = o(\|u - u^0\|)$ . 同理, 因为  $f$  在  $x^0 = g(u^0)$  处可微, 故

$$f(x) - f(x^0) = Jf(x^0) \cdot (x - x^0) + R_f(x, x^0), \quad (12.2)$$

其中  $R_f(x, x^0) = o(\|x - x^0\|)$ .

由 (12.1) 知, 当  $u \rightarrow u^0$  时,  $g(u) \rightarrow g(u^0) = x^0$ . 以  $x = g(u)$  代入 (12.2), 得

$$\begin{aligned} f \circ g(u) - f \circ g(u^0) &= Jf(x^0)(g(u) - g(u^0)) + R_f(g(u), g(u^0)) \\ &= Jf(x^0) \cdot Jg(u^0) \cdot (u - u^0) + R_{f \circ g}(u, u^0), \end{aligned} \quad (12.3)$$

其中

$$R_{f \circ g}(u, u^0) = Jf(x^0) \cdot R_g(u, u^0) + R_f(g(u), g(u^0)).$$

我们有如下估计

$$\begin{aligned} \|R_{f \circ g}(u, u^0)\| &\leq \|Jf(x^0) \cdot R_g(u, u^0)\| + \|R_f(g(u), g(u^0))\| \\ &\leq \|Jf(x^0)\| \cdot \|R_g(u, u^0)\| + o(\|g(u) - g(u^0)\|) \\ &= o(\|u - u^0\|) + o(O(\|u - u^0\|)) = o(\|u - u^0\|). \end{aligned}$$

由 (12.3) 及微分的定义知  $f \circ g$  在  $u^0$  处可微, 且  $J(f \circ g)(u^0) = Jf(x^0) \cdot Jg(u^0)$ .  $\square$

如果将  $f, g$  分别表示成分量形式

$$\begin{aligned} y_i &= f_i(x_1, \dots, x_m), \quad i = 1, \dots, n, \\ x_j &= g_j(u_1, \dots, u_l), \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

则  $J(f \circ g)(u^0) = Jf(x^0) \cdot Jg(u^0)$  写成矩阵的形式为

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial u_1}(u^0) & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial u_l}(u^0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial u_1}(u^0) & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial u_l}(u^0) \end{pmatrix}_{n \times l} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}(x^0) & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m}(x^0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1}(x^0) & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_m}(x^0) \end{pmatrix}_{n \times m} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1}(u^0) & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_l}(u^0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_m}{\partial u_1}(u^0) & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial u_l}(u^0) \end{pmatrix}_{m \times l}, \end{aligned}$$

即

$$\frac{\partial y_i}{\partial u_j}(u^0) = \sum_{s=1}^m \frac{\partial y_i}{\partial x_s}(g(u^0)) \cdot \frac{\partial x_s}{\partial u_j}(u^0).$$

这也就是所谓的链规则.

**例 12.3.2.** 设  $f(x, y)$  可微,  $\varphi(x)$  可微, 求  $u = f(x, \varphi(x))$  关于  $x$  的导数.

**解.** 由链规则,

$$\begin{aligned} u'_x &= f'_x(x, \varphi(x)) \cdot x'_x + f'_y(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \\ &= f'_x(x, \varphi(x)) + f'_y(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x). \end{aligned}$$

**例 12.3.3.** 设  $u = f(x, y)$  可微,  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , 证明

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2.$$

**证明.** 由链规则,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r \frac{\partial u}{\partial x} \sin \theta + r \frac{\partial u}{\partial y} \cos \theta \end{aligned}$$

这说明

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta\right)^2 + \left(-\frac{\partial u}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \theta\right)^2 \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2. \end{aligned}$$

**例 12.3.4.** 设  $z = f(u, v, w)$ ,  $v = \varphi(u, s)$ ,  $s = \psi(u, w)$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial w}$ .

**解.** 按照定义,

$$z = f(u, v, w) = f(u, \varphi(u, s), w) = f(u, \varphi(u, \psi(u, w)), w).$$

由链规则,

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial u}\right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial s} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial w} &= \frac{\partial f}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial v} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial w}\right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial s} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial w}. \end{aligned}$$

最后, 我们简单地介绍全微分 (形式微分) 的概念. 设  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  为可微的  $m$  元函数, 由定义,  $f$  在  $x$  处的微分  $df(x)$  是一个线性映射

$$\begin{aligned} df(x) : \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot v_i. \end{aligned}$$

我们将映射  $x \mapsto df(x)$  称为  $f$  的全微分, 记为  $df$ . 由于

$$d(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda df(x) + \mu dg(x), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

因此, 全微分之间也可以定义加法和数乘运算, 在这个意义下, 有

$$\begin{aligned} df &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i \quad (*) \\ d(\lambda f + \mu g) &= \lambda df + \mu dg, \\ d(f \cdot g) &= f dg + g df, \\ d\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{g df - f dg}{g^2} \quad (g \neq 0). \end{aligned}$$

如果将  $(*)$  写成矩阵形式:

$$df = Jf \cdot (dx_1, \dots, dx_m)^T,$$

则复合映射的链规则可写为

$$\begin{aligned} d(f \circ g) &= J(f \circ g) \cdot (du_1, \dots, du_l)^T \\ &= Jf(x) \cdot Jg(u)(du_1, \dots, du_l)^T \quad (x = g(u)) \\ &= Jf(g(u)) \cdot (dg_1, \dots, dg_m)^T. \end{aligned}$$

这个等式称为全微分的形式不变性.

**例 12.3.5.**  $u = \ln \frac{z^2}{x^2 + y^2}$ , 求  $du$  及  $u$  的一阶偏导数.

**解.** 按照全微分的运算规则, 有

$$\begin{aligned} du &= d \ln \frac{z^2}{x^2 + y^2} = d(\ln z^2 - \ln(x^2 + y^2)) \\ &= \frac{2}{z} dz - \frac{1}{x^2 + y^2} d(x^2 + y^2) \\ &= \frac{-2x}{x^2 + y^2} dx - \frac{2y}{x^2 + y^2} dy + \frac{2}{z} dz. \end{aligned}$$

这说明

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2}{z}.$$



## 习题 12.3

1. 研究下列函数在原点的可微性:

$$(1) f(x, y) = |xy|; \quad (2) f(x, y) = \sqrt{|xy|}; \quad (3) f(x, y) = \sqrt{x} \cos y;$$

$$(4) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$(5) f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

2. 计算下列映射在指定点的微分:

$$(1) f(x, y) = (xy^2 - 3x^2, 3x - 5y^2), \quad (x, y) = (1, -1);$$

$$(2) f(x, y, z) = (xyz^2 - 4y^2, 3xy^2 - y^2z), \quad (x, y) = (1, -2, 3);$$

$$(3) f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta), \quad (r, \theta) = (r_0, \theta_0);$$

$$(4) f(x, y) = (\sin x + \cos y, \cos(x + y)), \quad (x, y) = (0, 0).$$

3. 求复合映射  $f \circ g$  在指定点的 Jacobian 矩阵:

$$(1) f(x, y) = (xy, x^2y), \quad g(s, t) = (s + t, s^2 - t^2), \quad (s, t) = (2, 1);$$

$$(2) f(x, y) = (e^{x+2y}, \sin(y + 2x)), \quad g(u, v, w) = (u + 2v^2 + 3w^3, 2v - u^2), \\ (u, v, w) = (1, -1, 1);$$

$$(3) f(x, y, z) = (x + y + z, xy, x^2 + y^2 + z^2), \quad g(u, v, w) = (e^{v^2+w^2}, \sin uw, \sqrt{uv}), \\ (u, v, w) = (2, 1, 3).$$

4. 求复合偏导数:

$$(1) z = h(u, x, y), \quad y = g(u, v, x), \quad x = f(u, v), \quad \text{求 } z'_u, z'_v;$$

$$(2) z = f(u, x, y), \quad x = g(v, w), \quad y = h(u, v), \quad \text{求 } z'_u, z'_v, z'_w.$$

5. 计算下列函数的全微分:

$$(1) z = x^y; \quad (2) z = \frac{xy}{x^2 + 2y^2}; \quad (3) z = x^2y^2 + 3xy^3 - 2y^4;$$

$$(4) z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}; \quad (5) z = \cos(x + \ln y); \quad (6) z = \arctan(x + y);$$

$$(7) z = \frac{x-y}{x+y}; \quad (8) z = \ln(x^4 - y^3); \quad (9) z = e^{x+2y} + \sin(y + 2x).$$

6. 证明, 如果  $f(x, y)$  关于变量  $x$  连续, 且  $f'_y$  有界, 则  $f$  为二元连续函数.

7. 证明, 如果  $u(x, y)$  满足方程  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ , 则  $v(x, y) = u(x^2 - y^2, 2xy)$  和  $w(x, y) = w(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$  也满足此方程.

8. 证明, 函数

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2 t}}$$

满足如下方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

9. 设  $f$  为多元函数, 其偏导数均连续, 求在给定的任何一点处方向导数的最大值和最小值.

10. (\*) 设二元函数  $f$  的  $f'_x(x_0, y_0)$  存在,  $f'_y(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  附近连续, 证明  $f$  在  $(x_0, y_0)$  处可微.

11. (\*) 设  $f'_x$  和  $f'_y$  在  $(x_0, y_0)$  处可微, 证明  $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$ .

## §12.4 中值公式与 Taylor 公式

设  $p, q \in \mathbb{R}^n$ , 令

$$\sigma(t) = (1-t) \cdot p + t \cdot q, \quad \forall t \in [0, 1].$$

我们称  $\sigma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  为  $\mathbb{R}^n$  中连接  $p, q$  的直线段. 设  $A$  为  $\mathbb{R}^n$  中的子集, 如果任给  $a_1, a_2 \in A$ , 连接  $a_1, a_2$  的直线段仍包含于  $A$ , 则称  $A$  为凸集. 特别地, 凸集都是道路连通的. 我们将开的凸集称为凸域.

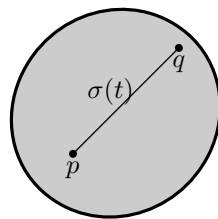


图 12.6 凸集

**例 12.4.1.**  $\mathbb{R}^n$  中的开球  $B_r(x)$  都是凸集.

我们知道, 包括 Lagrange 定理和 Cauchy 定理等在内的微分中值定理是研究一元函数的重要工具. 对于多元函数, 也有部分类似结果. 例如, 对于多元函数, 我们有

**定理 12.4.1** (微分中值定理). 设  $D$  为  $\mathbb{R}^n$  中凸域,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  可微, 则任给  $a, b \in D$ , 存在  $\xi \in D$ , 使得

$$f(b) - f(a) = Jf(\xi) \cdot (b - a),$$

其中  $\xi = a + \theta(b - a)$ ,  $\theta \in (0, 1)$ , 即  $\xi$  位于连接  $a, b$  的直线段上.

**证明.** 设  $\sigma: [0, 1] \rightarrow D$  为连接  $a, b$  的直线段, 则复合函数  $\varphi(t) = f \circ \sigma(t)$  是可微的一元函数. 由一元函数的微分中值定理, 存在  $\theta \in (0, 1)$  使得

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta) \cdot (1 - 0).$$

上式即  $f(b) - f(a) = Jf(\xi) \cdot (b - a)$ , 其中  $\xi = \sigma(\theta) = a + \theta(b - a)$ . □

**推论 12.4.2.** 设  $D$  为  $\mathbb{R}^n$  中区域 (道路连通开集),  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  可微. 如果  $Jf \equiv 0$ , 则  $f$  为常数.

**证明.** 如果  $D$  为凸域, 则欲证结论从定理 12.4.1 立即得到. 一般地, 任取  $D$  中两点  $p, q$ , 设  $\tau: [0, 1] \rightarrow D$  是连接  $p, q$  的连续曲线. 令

$$T = \{s \in [0, 1] \mid f \circ \tau(s) = f(p)\}.$$

因为  $0 \in T$ , 故  $T$  不是空集. 记  $T$  的上确界为  $t$ . 由  $f$  和  $\tau$  的连续性可知  $t \in T$ .

下面证明  $t = 1$  (反证法). 设  $t < 1$ . 首先, 因为  $D$  为开集, 故存在  $\varepsilon > 0$  使得  $B_\varepsilon(p) \subset D$ . 其次, 由  $\tau(t) = p$  以及  $\tau$  的连续性可知, 存在  $\delta > 0$ , 使得  $\tau([t, t + \delta]) \subset B_\varepsilon(p)$ . 由于  $B_\varepsilon(p)$  为凸域,  $f$  在  $B_\varepsilon(p)$  中为常值函数. 特别地,  $[t, t + \delta] \subset T$ . 这与  $t$  的定义相矛盾.

由  $t = 1$  即知  $f(q) = f(p)$ . 因为  $p, q$  是任取的, 这说明  $f$  为常数.  $\square$

**例 12.4.2.** 考虑向量值函数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(t) = (t^2, t^3)$ , 则

$$Jf(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}.$$

如果存在  $\theta \in (0, 1)$  使得

$$f(1) - f(0) = Jf(\theta) \cdot (1 - 0),$$

则

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\theta \\ 3\theta^2 \end{pmatrix}.$$

但这个等式无解. 这就说明定理 12.4.1 对向量值函数不再成立.  $\square$

根据这个例子, 微分中值定理不能直接推广到向量值函数. 但我们仍有下面的有用结果.

**定理 12.4.3 (拟微分中值定理).** 设  $D$  为  $\mathbb{R}^n$  中凸域,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$  可微, 则任给  $a, b \in D$ , 存在  $\xi \in D$  使得

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|Jf(\xi)\| \cdot \|b - a\|,$$

其中  $\xi = a + \theta(b - a)$ ,  $\theta \in (0, 1)$ .

**证明.** 记  $\sigma: [0, 1] \rightarrow D$  为连接  $a, b$  的直线段. 考虑复合函数

$$\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \langle f(b) - f(a), f \circ \sigma(t) \rangle,$$

则  $\varphi$  为一元可微函数, 且  $\varphi'(t) = \langle f(b) - f(a), Jf(\sigma(t)) \cdot (b-a) \rangle$ . 由一元函数的微分中值定理, 存在  $\theta \in (0, 1)$  使得

$$\begin{aligned} |\varphi(1) - \varphi(0)| &= |\varphi'(\theta)| \leq \|f(b) - f(a)\| \cdot \|Jf(\sigma(\theta)) \cdot (b-a)\| \\ &\leq \|f(b) - f(a)\| \cdot \|Jf(\xi)\| \cdot \|b-a\|. \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} |\varphi(1) - \varphi(0)| &= |\langle f(b) - f(a), f(b) \rangle - \langle f(b) - f(a), f(a) \rangle| \\ &= \|f(b) - f(a)\|^2, \end{aligned}$$

代入不等式就得到了定理的证明.  $\square$

**推论 12.4.4.** 设  $D$  为  $\mathbb{R}^n$  中区域,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$  可微. 如果  $Jf \equiv 0$ , 则  $f$  为常值映射.

**证明.** 和推论 12.4.2 的证明类似, 略.  $\square$

根据定义, 如果一个多元函数可微, 则它可以用线性函数逼近, 利用这一点我们可以做近似计算.

**例 12.4.3.** 求  $\frac{1.03^2}{\sqrt{0.98}\sqrt[3]{1.06}}$  的近似值.

**解.** 考虑函数  $f(x, y, z) = \frac{x^2}{\sqrt{y}\sqrt[3]{z}}$ ,  $x_0 = (1, 1, 1)$ ,  $h = (0.03, -0.02, 0.06)$ , 则

$$\begin{aligned} \frac{1.03^2}{\sqrt{0.98}\sqrt[3]{1.06}} &= f(1.03, 0.98, 1.06) \\ &= f(x_0 + h) \approx f(x_0) + Jf(x_0) \cdot h \\ &= 1 + \left(2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} 0.03 \\ -0.02 \\ 0.06 \end{pmatrix} = 1.05. \end{aligned}$$

利用微分作近似计算只考虑了函数的线性部分而已, 为了更好地求近似值, 我们要考虑高阶逼近. 跟一元函数类似, 可以用多元多项式来逼近多元函数. 为此先引进一些记号. 设  $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+$  ( $1 \leq i \leq n$ ), 记  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , 称为多重指标. 记

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdots \alpha_n!.$$

如果  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , 则记

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

对于多元函数  $f$ , 还用下面的记号表示  $|\alpha|$  阶偏导数:

$$D^\alpha f(x^0) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}(x^0).$$

**定理 12.4.5** (Taylor 公式). 设  $D$  为  $\mathbb{R}^n$  中凸域,  $f \in C^{m+1}(D)$  (即  $f$  具有  $m+1$  阶连续偏导数),  $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$ . 则任给  $x \in D$ , 存在  $\theta \in (0, 1)$  使得

$$f(x) = \sum_{k=0}^m \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} \cdot (x-a)^\alpha + \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{D^\alpha f(a + \theta(x-a))}{\alpha!} \cdot (x-a)^\alpha.$$

**证明.** 考虑一元函数  $\varphi(t) = f(a + t \cdot (x-a))$ ,  $t \in [0, 1]$ .  $\varphi$  具有  $m+1$  阶连续导数, 故由一元函数的 Taylor 公式, 存在  $\theta \in (0, 1)$ , 使得

$$(*) \quad \varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2!} \varphi''(0) + \dots + \frac{1}{m!} \varphi^{(m)}(0) + \frac{1}{(m+1)!} \varphi^{(m+1)}(\theta),$$

利用归纳法不难证明

$$\varphi^{(k)}(t) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(a + t(x-a)) \cdot (x-a)^\alpha.$$

特别地,  $t=0$  时, 有

$$\varphi^{(k)}(0) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(a) \cdot (x-a)^\alpha,$$

上式代入 (\*) 即得欲证公式. □

记

$$R_m = f(x) - \sum_{k=0}^m \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} \cdot (x-a)^\alpha.$$

由 Taylor 公式, 当  $f \in C^{m+1}(D)$  时

$$R_m = \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{D^\alpha f(a + \theta(x-a))}{\alpha!} \cdot (x-a)^\alpha. \quad (\text{Lagrange 余项})$$

**推论 12.4.6.** 在定理的条件下, 当  $\|x-a\|$  充分小时,  $R_m = O(\|x-a\|^{m+1})$ .

**证明.** 取  $\delta > 0$ , 使得  $\bar{B}_\delta(a) \subset D$ . 由于  $f \in C^{m+1}(D)$ ,  $\bar{B}_\delta(a)$  紧致, 故存在  $M > 0$  使得

$$|D^\alpha f(x)| \leq M, \quad \forall x \in \bar{B}_\delta(a), \quad |\alpha| \leq m+1.$$

因此

$$\begin{aligned} |R_m| &\leq M \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{1}{\alpha!} |(x-a)^\alpha| \\ &\leq M \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{1}{\alpha!} \|x-a\|^{|\alpha|} = C \cdot \|x-a\|^{m+1}. \end{aligned}$$

推论得证. □

注. (1) 如果  $f \in C^m(D)$ , 则 Taylor 公式可写为

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} \cdot (x-a)^\alpha + \sum_{|\alpha|=m} \frac{D^\alpha f(a+\theta(x-a))}{\alpha!} \cdot (x-a)^\alpha \\ &= \sum_{k=0}^m \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha + R_m, \end{aligned}$$

其中

$$R_m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} [D^\alpha f(a+\theta(x-a)) - D^\alpha f(a)] \cdot (x-a)^\alpha.$$

用推论的证明方法可得如下估计:

$$R_m = o(\|x-a\|^m) \quad (x \rightarrow a). \quad (\text{Peano 余项})$$

(2) 多元函数 Taylor 展开的前三项为

$$f(x) = f(a) + Jf(a) \cdot (x-a) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \cdot (x_i - a_i) \cdot (x_j - a_j) + \cdots$$

记

$$\text{Hess}(f) = \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right]_{n \times n},$$

称为  $f$  在  $a$  处的 Hessian.

(3) Taylor 展开式的系数由  $f$  惟一确定.

**定义 12.4.1** (凸函数). 设  $D$  为  $\mathbb{R}^n$  中的凸域,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  为多元函数. 如果任给  $x \neq y \in D$ , 均有

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y), \quad \forall t \in (0, 1),$$

则称  $f$  为  $D$  上的凸函数. 上式中 “ $\leq$ ” 换成 “ $<$ ” 时, 称为严格凸函数.

**定理 12.4.7.** (1) 如果  $f$  在凸域  $D$  上有连续一阶偏导数, 则  $f$  为凸函数  $\iff$

$$f(y) \geq f(x) + Jf(x) \cdot (y-x), \quad \forall x, y \in D.$$

(2) 如果  $f$  有连续二阶偏导数, 则  $f$  为凸函数  $\iff \text{Hess}(f) \geq 0$  (半正定).

**证明.** (1) “ $\implies$ ” 任给  $x, y \in D, t \in (0, 1)$ , 有

$$\begin{aligned} t(f(y) - f(x)) &\geq f(x + t(y-x)) - f(x) \\ &= Jf(x) \cdot t(y-x) + o(t\|y-x\|), \end{aligned}$$

上式两边除以  $t$ , 然后令  $t \rightarrow 0^+$  即得

$$f(y) \geq f(x) + Jf(x) \cdot (y - x).$$

“ $\Leftarrow$ ” 任给  $x, y \in D$ ,  $t \in [0, 1]$ , 记  $z = tx + (1 - t) \cdot y$ , 则

$$f(x) \geq f(z) + Jf(z) \cdot (x - z),$$

$$f(y) \geq f(z) + Jf(z) \cdot (y - z),$$

这说明

$$tf(x) + (1 - t)f(y) \geq f(z) + Jf(z) \cdot [t(x - z) + (1 - t)(y - z)] = f(z).$$

(2) “ $\Leftarrow$ ” 设  $f$  有连续的二阶偏导数, 且  $\text{Hess}(f)$  半正定, 则由 Taylor 公式, 任给  $x, y \in D$ , 存在  $\xi = x + \theta(y - x)$ ,  $\theta \in (0, 1)$  使得

$$\begin{aligned} f(y) &= f(x) + Jf(x) \cdot (y - x) + \frac{1}{2}(y - x)^T \cdot \text{Hess}(f)(\xi) \cdot (y - x) \\ &\geq f(x) + Jf(x) \cdot (y - x). \end{aligned}$$

由 (1) 知  $f$  为凸函数.

“ $\Rightarrow$ ” (反证法). 如果  $\text{Hess}(f)$  不是半正定的, 则存在  $x \in D$ , 以及  $\mathbb{R}^n$  中的非零向量  $h$ , 使得

$$h^T \cdot \text{Hess}(f)(x) \cdot h < 0.$$

由 Taylor 公式及其注记, 当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时, 有

$$\begin{aligned} f(x + \varepsilon \cdot h) &= f(x) + \varepsilon \cdot Jf(x) \cdot h + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \cdot h^T \cdot \text{Hess}(f) \cdot h + o(\|\varepsilon h\|^2) \\ &= f(x) + \varepsilon \cdot Jf(x) \cdot h + \varepsilon^2 \left[ \frac{1}{2}h^T \cdot \text{Hess}(f)(x) \cdot h + o(1) \right]. \end{aligned}$$

当  $\varepsilon \neq 0$  充分小时, 上式第三项  $< 0$ . 此时

$$f(x + \varepsilon h) < f(x) + Jf(x) \cdot \varepsilon h.$$

这与  $f$  为凸函数相矛盾 (用到 (1)). □

**例 12.4.4.** 设  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  为二阶连续可微函数, 如果

$$\text{Hess}(f)(x) \geq I_n, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

其中  $I_n$  为  $n$  阶单位方阵, 则  $f$  有惟一最小值.

**证明.** 根据 Taylor 公式,  $f(x)$  可在原点处展开为

$$f(x) = f(0) + Jf(0) \cdot x + \frac{1}{2}x^T \cdot \text{Hess}(f)(\xi) \cdot x.$$

由已知条件得

$$f(x) \geq f(0) + Jf(0) \cdot x + \frac{1}{2}\|x\|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

特别地, 当  $x \rightarrow \infty$  时,  $f(x) \rightarrow +\infty$ , 这说明  $f$  的最小值存在. 最小值的惟一性由  $f$  的严格凸性给出, 留给读者思考 (对照一元凸函数的情形).  $\square$

#### 习题 12.4

1. 设  $f$  为可微多元函数, 且其一阶偏导数有界, 证明  $f$  是 Lipschitz 函数, 即存在常数  $L$ , 使得

$$|f(y) - f(x)| \leq L\|x - y\|.$$

2. 设多元函数  $f$  在道路连通的开集  $D$  上连续, 并且偏导数都存在且恒为零, 证明  $f$  为常数.

3. 利用微分作近似计算: (1)  $1.002^2 \cdot 2.003^2 \cdot 3.004^3$ , (2)  $0.97^{1.05}$ .

4. 设  $k$  为非负整数,  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ , 证明

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \cdot a^\alpha.$$

特别地, 当  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$  时有什么结论?

5. 记  $\varphi(t) = f(a + t(x - a))$ , 利用归纳法证明

$$\varphi^{(k)}(t) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(a + t(x - a)) \cdot (x - a)^\alpha.$$

6. 设  $f$  在  $a$  处存在直到  $m$  阶的各种偏导数, 且在  $a$  附近, 有

$$f(x) = \sum_{k=0}^m \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha (x - a)^\alpha + o(\|x - a\|^m),$$

证明

$$c_\alpha = \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a), \quad \forall |\alpha| \leq m.$$



7. 对下列函数在指定点作 Taylor 展开:

- (1)  $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ ,  $(x, y) = (1, -2)$ ;
- (2)  $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ ,  $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ ;
- (3)  $f(x, y) = (1+x)^m(1+y)^n$ ,  $m, n$  为正整数,  $(x, y) = (0, 0)$ ;
- (4)  $f(x, y) = e^{x+y}$ ,  $(x, y) = (0, 0)$ .

8. 对下列函数作 Taylor 展开到指定项:

- (1)  $f(x, y) = x^y$ , 在  $(1, 1)$  处展开到二次项;
- (2)  $f(x, y) = \frac{\cos x}{\cos y}$ , 在  $(0, 0)$  处展开到二次项;
- (3)  $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ , 在  $(0, 0)$  处展开到六次项;
- (4)  $f(x, y) = \arctan \frac{y}{1+x^2}$ , 在  $(0, 0)$  处展开到四次项.

### §12.5 逆映射定理和隐映射定理

回忆一下: 对于一元函数, 如果它可微且导数处处非零, 则该函数可逆且其逆仍可微. 这里, 可微性和导数非零保证了函数在局部上与可逆线性函数有好的逼近, 因而也是 (局部) 可逆的. 下面我们考虑多元向量值函数类似的问题.

**例 12.5.1.** 可逆线性映射.

由线性代数, 线性映射  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  可逆当且仅当  $\det A \neq 0$ , 即  $A$  为单射. 我们有如下观察: 如果  $B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  为线性映射,  $\|B\| < 1$ , 则  $I_n - B$  可逆.

事实上, 设  $(I_n - B)v = 0$ , 则

$$\|v\| = \|I_n v\| = \|Bv\| \leq \|B\| \cdot \|v\|,$$

这说明  $v = 0$ .

这个例子意味着, 恒同映射这样一个可逆映射作一个小的扰动以后仍然为可逆映射. 一般地, 任何可逆线性映射在微扰下仍为可逆映射. 因为可微映射在局部上可以看成是其微分的平移加上微小扰动, 当微分可逆时, 该映射在局部上也应该是可逆的. 这种想法的确是正确的, 它可总结为下面的重要结果.

**定理 12.5.1 (逆映射定理).** 设  $W$  为  $\mathbb{R}^n$  中开集,  $f: W \rightarrow \mathbb{R}^n$  为  $C^k (k \geq 1)$  映射,  $x^0 \in W$ . 如果  $\det Jf(x^0) \neq 0$ , 则存在  $x^0$  的开邻域  $U \subset W$  以及  $y^0 = f(x^0)$  的开邻域  $V \subset \mathbb{R}^n$ , 使得  $f|_U: U \rightarrow V$  是可逆映射, 且其逆仍为  $C^k$  映射.

**证明.** 不失一般性, 可设  $x^0 = 0$ ,  $y^0 = f(x^0) = 0$ . 以  $A$  记  $f$  在  $x^0 = 0$  处的微分, 则  $A$  可逆, 且  $f \circ A^{-1}$  在  $0$  处微分为恒同映射. 如果欲证的结论对  $f \circ A^{-1}$  成立, 则对  $f$  也成立. 因此, 不妨从一开始就假设  $Jf(x^0) = I_n$ .

在  $x^0$  附近,  $f$  是恒同映射的微小扰动, 扰动项可定义为映射

$$\begin{aligned} g: W &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto f(x) - x, \end{aligned}$$

则  $g$  为  $C^k$  映射, 且  $Jg(0) = 0$ . 因此, 存在  $\varepsilon_0 > 0$  使得

$$\|Jg(x)\| \leq \frac{1}{2}, \quad \forall x \in \bar{B}_{\varepsilon_0}(0) \subset W.$$

由拟微分中值定理,

$$\begin{aligned} \|g(x_1) - g(x_2)\| &\leq \|Jg(\xi)\| \cdot \|x_1 - x_2\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|, \quad \forall x_1, x_2 \in \bar{B}_{\varepsilon_0}(0). \end{aligned}$$

给定  $y \in B_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(0)$ , 我们来解方程

$$f(x) = y, \quad x \in B_{\varepsilon_0}(0). \quad (12.4)$$

这等价于在  $B_{\varepsilon_0}(0)$  中寻找  $g_y(x) = x + y - f(x) = y - g(x)$  的不动点. 我们利用压缩映像原理来找这样的不动点. 首先,

$$\begin{aligned} \|g_y(x)\| &= \|y - g(x)\| \leq \|y\| + \|g(x)\| \\ &< \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{1}{2} \|x\| \leq \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0, \quad \forall x \in \bar{B}_{\varepsilon_0}(0). \end{aligned} \quad (12.5)$$

其次,  $g_y: \bar{B}_{\varepsilon_0}(0) \rightarrow B_{\varepsilon_0}(0) \subset \bar{B}_{\varepsilon_0}(0)$  是压缩映射:

$$\|g_y(x_1) - g_y(x_2)\| = \|g(x_2) - g(x_1)\| \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|, \quad \forall x_1, x_2 \in \bar{B}_{\varepsilon_0}(0).$$

从而 (12.4) 在  $\bar{B}_{\varepsilon_0}(0)$  中有惟一解, 记为  $x_y$ . 由 (12.5),  $x_y \in B_{\varepsilon_0}(0)$ . 记

$$U = f^{-1}(B_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(0)) \cap B_{\varepsilon_0}(0), \quad V = B_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(0),$$

则我们已经证明了  $f|_U: U \rightarrow V$  是一一映射, 其逆映射  $h(y) = x_y$  满足

$$y - g(h(y)) = h(y). \quad (12.6)$$

(1)  $h: V \rightarrow U$  是连续映射: 当  $y_1, y_2 \in V$  时

$$\begin{aligned} \|h(y_1) - h(y_2)\| &\leq \|y_1 - y_2\| + \|g(h(y_1)) - g(h(y_2))\| \\ &\leq \|y_1 - y_2\| + \frac{1}{2} \|h(y_1) - h(y_2)\|, \end{aligned}$$

这说明  $\|h(y_1) - h(y_2)\| \leq 2\|y_1 - y_2\|$ ,  $\forall y_1, y_2 \in V$ .

(2)  $h: V \rightarrow U$  是可微映射: 设  $y_0 \in V$ , 则对  $y \in V$ , 有

$$\begin{aligned} h(y) - h(y_0) &= (y - y_0) - [g(h(y)) - g(h(y_0))] \\ &= (y - y_0) - Jg(h(y_0)) \cdot (h(y) - h(y_0)) + o(\|h(y) - h(y_0)\|), \end{aligned}$$

上式可改写为

$$[I_n + Jg(h(y_0))] \cdot (h(y) - h(y_0)) = (y - y_0) + o(\|y - y_0\|).$$

因而

$$h(y) - h(y_0) = [I_n + Jg(h(y_0))]^{-1} \cdot (y - y_0) + o(\|y - y_0\|).$$

即  $h$  在  $y_0$  处可微.

(3)  $h: V \rightarrow U$  为  $C^k$  映射.

由 (2) 的证明知

$$Jh(y) = [I_n + Jg(h(y))]^{-1} = [Jf(h(y))]^{-1}, \quad \forall y \in V. \quad (12.7)$$

由  $f \in C^k$  知  $Jf \in C^{k-1}$ . 由 (2) 及 (12.7) 可推出  $Jh \in C^0$ , 即  $h \in C^1$ . 再由  $Jf \in C^{k-1}$ ,  $h \in C^1$  及 (12.7) 可推出  $Jh \in C^1$  即  $h \in C^2$ . 依次类推, 最后我们就得到  $h \in C^k$ .  $\square$

注. 从证明可以看出, 如果  $f: W \rightarrow \mathbb{R}^n$  的 Jacobian 非退化, 则  $f(W)$  为开集.

**例 12.5.2.** 考虑  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ . 显然,  $f$  不是单射, 但

$$\det Jf(x, y) = \det \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} = e^{2x} \neq 0.$$

这说明定理 12.5.1 的结论只能局部地成立, 这跟一元函数的情形不同!

**例 12.5.3.** 考虑  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = (x^3, y^3)$ , 则  $f$  为光滑单射, 也是满射, 但  $Jf(0, 0) = 0$ ,  $f$  的逆映射不可微. 这说明 Jacobian 非退化的条件不能去掉.

**例 12.5.4.** 设  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  为  $C^k (k \geq 1)$  映射,  $f(x^0, y^0) = 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0) \neq 0$ , 在  $(x^0, y^0)$  附近解方程

$$f(x, y) = 0.$$

**解.** 令  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $F(x, y) = (x, f(x, y))$ , 则  $F(x^0, y^0) = (x^0, 0)$ , 且

$$\det JF(x^0, y^0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x^0, y^0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0) \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0) \neq 0.$$

由逆映射定理, 在  $(x^0, y^0)$  附近,  $F$  为可逆映射. 于是当  $x$  在  $x^0$  附近时,  $y^0$  附近存在  $g(x)$ , 使得  $F(x, g(x)) = (x, 0)$ , 即  $f(x, g(x)) = 0$ . 对  $x$  求导得

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \cdot g'(x) = 0$$

从而

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}.$$

$y = g(x)$  称为由  $f(x, y) = 0$  决定的隐函数. □

上例可推广到一般维数, 所得结果称为隐映射 (隐函数) 定理.

**定理 12.5.2** (隐映射定理). 设  $W$  为  $\mathbb{R}^{n+m}$  中开集,  $W$  中的点用  $(x, y)$  表示, 其中  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_m)$ .  $f: W \rightarrow \mathbb{R}^m$  为  $C^k$  映射,

$$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), \dots, f_m(x, y)).$$

设  $(x^0, y^0) \in W$ ,  $f(x^0, y^0) = 0$  且  $\det Jf_y(x^0, y^0) \neq 0$ , 其中

$$Jf_y(x, y) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, y) \right)_{m \times m}.$$

则存在  $x^0$  的开邻域  $V \subset \mathbb{R}^n$  以及惟一的  $C^k$  映射  $g: V \rightarrow \mathbb{R}^m$ , 使得

$$(1) \ y^0 = g(x^0), \ f(x, g(x)) = 0, \ \forall x \in V.$$

$$(2) \ Jg(x) = -[Jf_y(x, g(x))]^{-1} Jf_x(x, g(x)),$$

其中

$$Jf_x(x, y) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x, y) \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

**证明.** 令  $F: W \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$  为

$$F(x, y) = (x, f(x, y)),$$

在  $(x^0, y^0)$  处利用逆映射定理即可, 因为证明和例 12.5.4 类似, 故略. □

**注.**  $g(x)$  称为由  $f(x, y) = 0$  决定的隐映射.

**例 12.5.5.** 设  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$ , 求  $x = 1, y = -2, z = 1$  时  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  的值.

**解.** 令  $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9$ , 则

$$F(1, -2, 1) = 0, \quad F_z(1, -2, 1) = (6z - 1)|_{z=1} = 5 \neq 0,$$

故  $z$  可局部地表示为  $x, y$  的函数, 记为  $z = z(x, y)$ . 由定理 12.5.2, 在  $(1, -2, 1)$  处, 有

$$\begin{aligned}(z_x, z_y) &= -F_z^{-1} \cdot (F_x, F_y) \\ &= -\frac{1}{5}(2x + y, 4y + x)|_{(x,y,z)=(1,-2,1)} = (0, \frac{7}{5}).\end{aligned}$$

又因为

$$z_y = -F_z^{-1} \cdot F_y = -\frac{1}{6z-1}(4y+x),$$

故

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{6}{(6z-1)^2} \cdot z_x(4y+x) - \frac{1}{6z-1},$$

从而

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, -2, 1) = -\frac{1}{5}.$$

**例 12.5.6.** 平面上直角坐标  $(x, y)$  和极坐标  $(r, \theta)$  之间的转换公式为

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

求  $r$  和  $\theta$  关于  $x, y$  的偏导数.

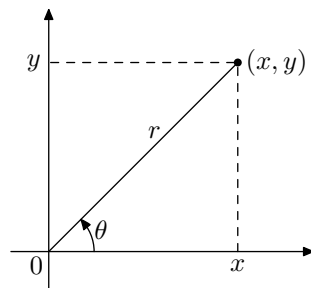


图 12.7 极坐标

**解.** 由逆映射定理

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},\end{aligned}$$

从而有

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r}.$$

**例 12.5.7** (隐式曲面). 设  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  为  $C^k (k \geq 1)$  的多元函数. 令

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = 0\}.$$

如果对于任意  $(x, y, z) \in S$ ,  $F'_x, F'_y, F'_z$  均不全为 0, 则称  $S$  为由  $F$  决定的隐式曲面.

设  $m_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$ , 不妨设  $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ . 则由定理 12.5.2, 在  $(x_0, y_0, z_0)$  附近,  $S$  可用参数曲面  $z = z(x, y)$  表示:

$$F(x, y, z(x, y)) = 0.$$

在  $(x^0, y^0, z^0)$  处曲面的法向量为

$$\begin{aligned}\vec{n} &= (1, 0, z_x(x^0, y^0)) \times (0, 1, z_y(x^0, y^0)) \\ &= (-z_x(x^0, y^0), -z_y(x^0, y^0), 1) \\ &= \frac{1}{F'_z}(F'_x(x^0, y^0, z^0), F'_y(x^0, y^0, z^0), F'_z(x^0, y^0, z^0)).\end{aligned}$$

$S$  在  $(x^0, y^0, z^0)$  处的切平面方程为

$$F'_x \cdot (x - x_0) + F'_y \cdot (y - y_0) + F'_z \cdot (z - z_0) = 0.$$

在  $(x^0, y^0, z^0)$  处的法线方程为

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

**例 12.5.8** (隐式曲线). 设  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  为  $C^k(k \geq 1)$  的映射, 令

$$l = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = G(x, y, z) = 0\},$$

如果对任意的  $(x, y, z) \in l$ ,

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{pmatrix} \neq 0,$$

则称  $l$  为由  $F, G$  决定的隐式曲线.

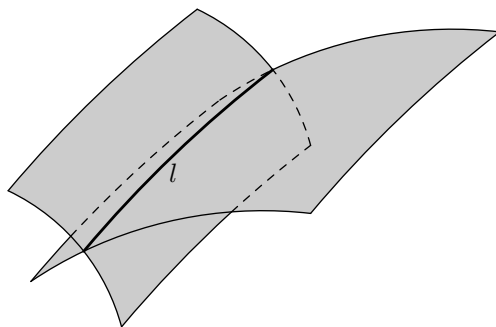


图 12.8 隐式曲线

设  $m_0 = (x_0, y_0, z_0) \in l$ , 由隐映射定理, 在  $m_0$  附近  $l$  可由参数曲线

$$y = y(x), \quad z = z(x)$$

表示, 其中

$$F(x, y(x), z(x)) = G(x, y(x), z(x)) = 0,$$

且

$$\begin{pmatrix} y'(x) \\ z'(x) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} F'_x \\ G'_x \end{pmatrix},$$

或写为

$$\begin{cases} F'_x + F'_y \cdot y' + F'_z \cdot z' = 0, \\ G'_x + G'_y \cdot y' + G'_z \cdot z' = 0. \end{cases}$$

这说明  $(1, y', z')$  与  $(F'_x, F'_y, F'_z)$  和  $(G'_x, G'_y, G'_z)$  均正交. 因而  $m_0$  处的切线方程为

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix}},$$

法面方程为

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ F'_x & F'_y & F'_z \\ G'_x & G'_y & G'_z \end{vmatrix} = 0.$$

### 习题 12.5

1. 设  $A$  为  $n$  阶可逆方阵, 证明, 存在  $\epsilon(A) > 0$ , 使得当  $\|B\| < \epsilon(A)$  时,  $A + B$  也是可逆方阵.
2. 设  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  为可微映射, 且  $\|Jf(x)\| \leq q < 1, \forall x \in \mathbb{R}^n$ . 证明  $f$  存在唯一的不动点.
3. 就维数为 1 的情形将逆映射定理按本节给出的证明重新证明一下, 并说明为什么一元函数有整体的反函数定理.
4. 研究下列函数在指定点的邻域内是否可以将  $y$  解为  $x$  的函数:
  - (1)  $f(x, y) = x^2 - y^2, (x, y) = (0, 0)$ ;
  - (2)  $f(x, y) = \sin[\pi(x + y)] - 1, (x, y) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ ;
  - (3)  $f(x, y) = xy + \ln xy - 1, (x, y) = (1, 1)$ ;
  - (4)  $f(x, y) = x^5 + y^5 + xy - 3, (x, y) = (1, 1)$ .

5. 计算指点点的偏导数:

(1)  $z^y - xz^3 - 1 = 0$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}(1, 2, 1)$ ;

(2)  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z = 9$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1, -2, 1)$ .

6. 方程组  $xv - 4y + 2e^u + 3 = 0$ ,  $2x - z - 6u + v \cos u = 0$  在点  $x = -1$ ,  $y = 1$ ,  $z = -1$ ,  $u = 0$ ,  $v = 1$  处确定了隐函数  $u = u(x, y, z)$ ,  $v = v(x, y, z)$ . 求  $u$ ,  $v$  在该点处的 Jacobian 矩阵.

7. 求下列曲面在指定点的切面:

(1)  $x^3 + 2xy^2 - 7z^3 + 3y + 1 = 0$ ,  $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ ;

(2)  $(x^2 + y^2)^2 + x^2 - y^2 + 7xy + 3x + z^4 - z = 14$ ,  $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ ;

(3)  $\sin^2 x + \cos(y + z) = \frac{3}{4}$ ,  $(x, y, z) = (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, 0)$ ;

(4)  $x^2 + y^2 = z^2 + \sin z$ ,  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ .

8. 求下列曲线在指定点的切线:

(1)  $x^2 + y^2 + z^2 = 3x$ ,  $2x - 3y + 5z = 4$ ,  $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ ;

(2)  $x^2 + z^2 = 10$ ,  $y^2 + z^2 = 10$ ,  $(x, y, z) = (1, 1, 3)$ ;

(3)  $3x^2 + 3y^2 - z^2 = 32$ ,  $x^2 + y^2 = z^2$ ,  $(x, y, z) = (\sqrt{7}, 3, 4)$ ;

(4)  $x^3y + y^3x = 3 - x^2y^2$ ,  $(x, y) = (1, 1)$ .

9. 设  $U, V$  为  $\mathbb{R}^n$  中的开集,  $f: U \rightarrow V$  为可微映射, 且  $\det Jf(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in U$ . 如果  $f$  的逆映射存在且连续, 则其逆映射一定也是可微的.

10. (\*) 设  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  为连续可微的映射, 且

$$\|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

证明  $f$  可逆, 且其逆映射也是连续可微的.

## §12.6 无条件极值

**定义 12.6.1** (极值). 设  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  为多元函数, 其中  $A$  为  $\mathbb{R}^n$  中的子集,  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in A$ . 如果存在  $\delta > 0$ , 使得

$$f(x^0) \geq f(x) \quad (\text{或 } f(x^0) \leq f(x)), \quad \forall x \in A \cap B_\delta(x^0) - \{x^0\},$$

则称  $x^0$  为  $f$  的极大 (小) 值点,  $f(x^0)$  为  $f$  的极大 (小) 值. 当上式中 “ $\geq$ ” (“ $\leq$ ”) 换成 “ $>$ ” (“ $<$ ”) 时, 相应地把  $x^0$  称为严格极值点,  $f(x^0)$  为严格极值.

**命题 12.6.1** (达到极值的必要条件). 设  $x^0$  为  $f$  的极值点, 如果  $x^0$  为  $A$  的内点, 且  $f$  在  $x^0$  处存在一阶偏导数, 则  $f'_{x_1}(x^0) = f'_{x_2}(x^0) = \dots = f'_{x_n}(x^0) = 0$ .



**证明.** 以  $f'_{x_1}$  为例, 考虑一元函数  $\varphi(x) = f(x, x_2^0, \dots, x_n^0)$ , 则  $\varphi$  可导, 且以  $x_1^0$  为极值点, 由 Fermat 定理知  $\varphi'(x_1^0) = 0$ , 即  $f'_{x_1}(x^0) = 0$ .  $\square$

**注.** 满足条件  $f'_{x_1}(x^0) = \dots = f'_{x_n}(x^0) = 0$  的点  $x^0$  称为  $f$  的驻点或临界点.

**定理 12.6.2.** 设  $U$  为  $\mathbb{R}^n$  中开集,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  具有二阶连续偏导数,  $x^0$  为  $f$  的驻点. 则

- (1) 如果  $x^0$  为  $f$  的极小 (大) 值点, 则  $\text{Hess}(f)(x^0)$  为半正 (负) 定方阵;
- (2) 如果  $\text{Hess}(f)(x^0)$  为正 (负) 定方阵, 则  $x^0$  为  $f$  的严格极小 (大) 值点;
- (3) 如果  $\text{Hess}(f)(x^0)$  为不定方阵, 则  $x^0$  不是  $f$  的极值点.

**证明.** 证明的思想是在  $x^0$  附近利用  $f$  的 Taylor 展开:

$$\begin{aligned} f(x^0 + h) - f(x^0) &= Jf(x^0) \cdot h + \frac{1}{2} h^T \cdot \text{Hess}(f)(x^0) \cdot h + o(\|h\|^2) \\ &= \frac{1}{2} h^T \cdot \text{Hess}(f)(x^0) \cdot h + o(\|h\|^2). \end{aligned} \quad (12.8)$$

(1) 设  $x^0$  为  $f$  的极小值点,  $v$  为任意固定的单位向量, 在 (12.8) 中取  $h = t \cdot v$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , 则当  $|t|$  充分小时,

$$0 \leq f(x^0 + h) - f(x^0) = t^2 \left[ \frac{1}{2} \cdot v^T \cdot \text{Hess}(f)(x^0) \cdot v + o(1) \right],$$

上式两边除以  $t^2$ , 然后令  $t \rightarrow 0$  得

$$0 \leq v^T \cdot \text{Hess}(f)(x^0) \cdot v, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1.$$

这说明  $\text{Hess}(f)(x^0)$  为半正定方阵.  $x^0$  为极大值点时证明完全类似.

(2) 如果  $\text{Hess}(f)(x^0)$  正定, 则

$$\lambda_0 = \min_{\|v\|=1} v^T \cdot \text{Hess}(f)(x^0) \cdot v > 0.$$

从而当  $\|h\|$  充分小时

$$\begin{aligned} f(x^0 + h) - f(x^0) &\geq \frac{1}{2} \|h\|^2 \cdot \lambda_0 + o(\|h\|^2) \\ &= \|h\|^2 \left( \frac{1}{2} \lambda_0 + o(1) \right) \geq \frac{1}{4} \lambda_0 \cdot \|h\|^2, \end{aligned}$$

即  $x^0$  为严格极小值点.  $\text{Hess}(f)(x^0)$  负定的情形类似.

(3) 证明与 (1), (2) 类似, 略.  $\square$

**例 12.6.1.** 求  $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x + y)^2$  的极值.

**解.** 先求驻点:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 2x - 2y, \quad 0 = \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 2x - 2y,$$

上式有三个解

$$m_0 = (0, 0), \quad m_1 = (1, 1), \quad m_2 = (-1, -1).$$

为了判极大, 极小值, 再在驻点处求 Hessian:

$$\text{Hess}(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12y^2 - 2 \end{pmatrix}.$$

在  $m_1, m_2$  处, Hessian 正定, 从而  $m_1, m_2$  为极小值点, 此时

$$f(m_1) = f(m_2) = -2.$$

在  $m_0$  处  $\text{Hess}(f)$  退化, 用  $\text{Hess}(f)$  无法判别  $m_0$  是否为极值点. 但对于  $0 < x < 1$ , 令  $y = x$ , 则

$$f(x, y) = 2x^4 - 4x^2 < 0;$$

令  $y = -x$ , 则  $f(x, y) = 2x^4 > 0$ , 这说明  $m_0$  不是极值点.  $\square$

**例 12.6.2 (最小二乘法).** 设  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  为平面  $\mathbb{R}^2$  上  $n$  个点, 求一条直线  $y = ax + b$ , 使得  $F(a, b) = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$  最小.

**解.** 函数  $F(a, b)$  是关于  $(a, b)$  的光滑函数. 先求驻点:

$$0 = \frac{\partial F}{\partial a}(a, b) = 2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)x_i,$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial b}(a, b) = 2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i),$$

当

$$n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (x_i - x_j)^2 \neq 0$$

时, 上述二元一次方程组有惟一的解 (驻点), 在此驻点处,  $F$  的 Hessian 为

$$2 \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{pmatrix},$$

它是正定方阵, 故该驻点为极小值点. 由于当  $(a, b) \rightarrow \infty$  时  $F(a, b) \rightarrow +\infty$ , 故该驻点为惟一的最小值点 (见下面的引理).

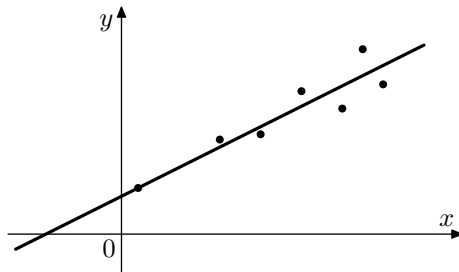


图 12.9 最小二乘法

为了写出直线方程, 我们注意到, 当  $(x, y)$  在此直线上时,

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n y_i & n \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i y_i & \sum_{i=1}^n x_i \end{pmatrix} \cdot (a, -1, b)^T = 0,$$

这说明

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n y_i & n \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i y_i & \sum_{i=1}^n x_i \end{vmatrix} = 0,$$

这也就是所求直线方程. □

**例 12.6.3.** 求  $f(x, y) = x^2 + y^3 - 3y$  的极值.

**解.** 先求驻点:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad 0 = \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3.$$

解出驻点为  $(0, 1), (0, -1)$ . 再计算 Hessian:

$$\text{Hess}(f)(0, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad \text{Hess}(f)(0, -1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

这说明  $(0, 1)$  为极小值点,  $f(0, 1) = -2$ ;  $(0, -1)$  不是极值点. □

**注.**  $(0, 1)$  虽然是  $f$  的惟一极小值点, 但不是最小值点! 这个例子中的函数有两个驻点, 下面的例子说明, 即使只有一个驻点, 也不一定就是最小值点, 这和一元函数是不同的!

**例 12.6.4.** 求  $f(x, y) = x^2 + y^2(1+x)^3$  的极值.

**解.** 易见  $(0, 0)$  为  $f$  的惟一驻点, 且为极小值点, 但  $f(-2, 3) = -5 < f(0, 0) = 0$ , 因此  $(0, 0)$  不是最小值点. □

**引理 12.6.3.** 设  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  为连续函数, 则

- (1) 如果  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ , 则  $f$  在  $\mathbb{R}^n$  上达到最大值;
- (2) 如果  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ , 则  $f$  在  $\mathbb{R}^n$  上达到最小值.

**证明.** 以 (1) 为例, 取  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ , 由已知条件, 存在  $R > 0$  使得  $\|x\| \geq R$  时,

$$f(x) < f(x^0).$$

则  $f$  在  $\bar{B}_R(0)$  上的最大值即为  $f$  为  $\mathbb{R}^n$  上的最大值. □

**例 12.6.5.** 求  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - y$  在三角型区域  $D: x \geq 0, y \geq 0, 2x + y \leq 4$  上的最大值, 最小值.

**解.** 本例须考虑  $f$  在  $D$  上的边界上的值. 先求  $D$  内驻点:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \implies (x, y) = (1, \frac{1}{2}), \quad f(1, \frac{1}{2}) = -\frac{5}{4};$$

在边界上:

(1)  $y = 0, 0 \leq x \leq 2$ :  $f(x, 0) = x^2 - 2x$ , 其驻点为  $(1, 0), f(1, 0) = -1$ .

(2)  $x = 0, 0 \leq y \leq 4$ :  $f(0, y) = y^2 - y$ , 驻点为  $(0, 1/2), f(0, 1/2) = -1/4$ ;

(3)  $x \geq 0, y \geq 0, 2x + y = 4$ :  $f(x, y) = 5x^2 - 16x + 12$ , 驻点为  $(8/5, 4/5), f(8/5, 4/5) = -4/5$ .

最后, 在三个端点上:  $f(0, 0) = 0, \quad f(2, 0) = 0, \quad f(0, 4) = 12$ , 因此经过比较以后得知  $f$  的最大值为 12, 最小值为  $-5/4$ .  $\square$

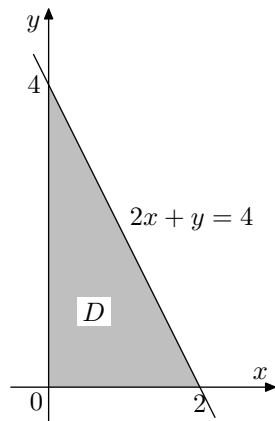


图 12.10 三角区域

### 习题 12.6

1. 求下列函数的驻点, 并判断是否为极值点, 是什么类型的极值点:

- |  |  |
|--|--|
| (1) $f(x, y) = y^2(\sin x - \frac{x}{2});$ | (2) $f(x, y) = \cos(x + y) + \sin(x - y);$ |
| (3) $f(x, y) = y^x;$                       | (4) $f(x, y) = x/y - xy;$                  |
| (5) $f(x, y) = (ax^2 + by^2)e^{-x^2-y^2};$ | (6) $f(x, y) = ye^{-x^2}.$                 |

2. 求下列函数的极值:

- (1)  $f(x, y) = xy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad a, b > 0;$   
 (2)  $f(x, y) = \sin x + \cos y + \cos(x - y), \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2};$   
 (3)  $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2), \quad x, y \neq 0.$

3. 求下列函数的极值:

- |   |                                  |
|---|----------------------------------|
| (1) $f(x, y) = 4(x - y) - x^2 - y^2;$       | (2) $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2;$ |
| (3) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1;$ | (4) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$ |

4. 求抛物线  $y = x^2$  与直线  $x - y - 2 = 0$  之间的最短距离.

5. 给定  $\mathbb{R}^n$  中  $m$  个点, 求与这些点的距离的平方和最小的一点.

6. 设  $0 < a < b$ ,  $n \geq 1$ . 试在  $(a, b)$  中选取  $n$  个点  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 使得

$$u = \frac{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}{(a + x_1)(x_1 + x_2) \cdots (x_{n-1} + x_n)(x_n + b)}$$

取最大值.

7. (\*) 构造一个光滑的二元函数  $f(x, y)$ , 使得原点  $(0, 0)$  为  $f$  的驻点, 且在每一条直线  $y = kx$  上,  $(0, 0)$  均为极小值点, 但  $(0, 0)$  不是  $f$  的极小值点.

### §12.7 Lagrange 乘数法

设  $U$  为  $\mathbb{R}^n$  中开集,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  为  $U$  上多元函数,  $\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}^m (m < n)$  为  $C^1$  映射. 令

$$A = \{x \in U \mid \Phi(x) = 0\},$$

$f$  在  $A$  上的极值称为条件极值, 方程  $\Phi(x) = 0$  称为约束条件.

如果  $A$  为  $\mathbb{R}^n$  中的  $C^1$  曲面 (参见第十五章第三节),  $x^0 \in A$  为  $f$  的条件极值点, 则对于  $A$  上经过  $x^0$  的任何可微曲线  $\sigma(t)$  ( $\sigma(0) = x^0$ ),  $t = 0$  为  $f(\sigma(t))$  的驻点, 因此

$$0 = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\sigma(t)) = Jf(x^0) \cdot \sigma'(0),$$

即  $f$  在  $x^0$  处的梯度  $Jf(x^0)$  与  $A$  在  $x^0$  处的切向量  $\sigma'(0)$  正交. 这说明此时  $Jf(x^0)$  是  $A$  在  $x^0$  处的一个法向量.

利用隐 (函数) 映射定理, 我们可以更准确地将上述想法总结为下面的结果.

**定理 12.7.1** (Lagrange 乘数法). 设  $f \in C^1(U)$ ,  $x^0 \in A$  为  $f$  的条件极值点. 如果  $J\Phi(x^0)$  的秩为  $m$ , 则存在  $\lambda \in \mathbb{R}^m$ , 使得

$$Jf(x^0) - \lambda \cdot J\Phi(x^0) = 0. \quad (12.9)$$

**证明.** 不妨设  $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ , 且

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_m} \end{pmatrix} (x^0) \neq 0.$$

由隐映射定理, 存在点  $z^0 = (x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)$  的开邻域  $V$  以及  $C^1$  映射  $g: V \rightarrow \mathbb{R}^m$  使得

$$y^0 = g(z^0), \quad \Phi(g(z), z) = 0, \quad \forall z \in V.$$

其中  $y^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ ,  $y = (x_1, \dots, x_m)$ ,  $z = (x_{m+1}, \dots, x_n)$ ,  $x = (y, z) \in U$ . 在  $x^0 = (y^0, z^0)$  处求导, 有

$$Jg(z^0) = -(J_y \Phi)^{-1}(x^0) \cdot J_z \Phi(x^0). \quad (12.10)$$

由于  $x^0$  为  $f$  的条件极值点, 故  $z^0$  为  $f(g(z), z)$  的极值点 (驻点), 在  $z_0$  处求导, 得

$$J_y f(x^0) \cdot Jg(z^0) + J_z f(x^0) = 0. \quad (12.11)$$

将 (12.10) 式代入 (12.11), 得

$$J_z f(x^0) = J_y f(x^0) \cdot (J_y \Phi)^{-1}(x^0) \cdot J_z \Phi(x^0). \quad (12.12)$$

记  $\lambda = J_y f(x^0) \cdot (J_y \Phi)^{-1}(x^0)$ , 即

$$J_y f(x^0) = \lambda \cdot J_y \Phi(x^0). \quad (12.13)$$

(12.12) 式可用  $\lambda$  改写为

$$J_z f(x^0) = \lambda \cdot J_z \Phi(x^0). \quad (12.14)$$

(12.13) 式和 (12.14) 式结合起来就得到

$$Jf(x^0) - \lambda \cdot J\Phi(x^0) = 0.$$

这就证明了定理.  $\square$

注. (1) 在定理的条件下,  $A$  在  $x^0$  附近是  $n - m$  维隐式曲面, 它在  $x^0$  处的法空间由  $J\varphi_1(x^0), \dots, J\varphi_m(x^0)$  张成, (12.9) 式就是说  $Jf(x^0)$  是法向量.

(2) 在实际应用中, (12.9) 式通常解释为: 如果  $x^0$  为条件极值点, 则  $(x^0, \lambda)$  为辅助函数

$$F(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \varphi_i(x)$$

的驻点.

**例 12.7.1.** 求圆周  $(x-1)^2 + y^2 = 1$  上的点与固定点  $(0, 1)$  的距离的最大值, 最小值.

**解.** 在约束条件  $(x-1)^2 + y^2 - 1 = 0$  下求距离函数  $d = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$  的最大值和最小值. 考虑辅助函数

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + (y-1)^2 - \lambda[(x-1)^2 + y^2 - 1],$$

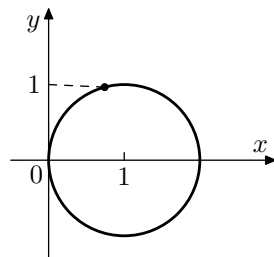


图 12.11 约束距离

求其驻点:

$$F'_x = F'_y = F'_\lambda = 0 \iff \begin{cases} x - \lambda(x-1) = 0 \\ y - 1 - \lambda y = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{-\lambda}{1-\lambda} \\ y = \frac{1}{1-\lambda} \\ \lambda = 1 \pm \sqrt{2} \end{cases}$$

在驻点处

$$d^2 = \lambda^2, \text{ 即 } d = |\lambda|,$$

由于  $d$  在圆周上达到最大, 最小值, 故其最大值必为  $\sqrt{2}+1$ , 最小值必为  $\sqrt{2}-1$ .  $\square$

**例 12.7.2.** 体积为  $V$  的长方体面积最小值为多少?

**解.** 设长方体长, 宽, 高分别为  $x, y, z$ , 则面积为

$$A = 2(xy + yz + zx),$$

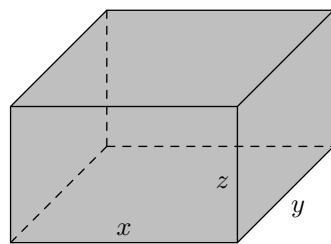


图 12.12 长方体表面

体积为  $V = xyz$ . 在约束条件  $xyz - V = 0$  之下求  $A$  的最小值.

令

$$F(x, y, \lambda) = 2(xy + yz + zx) - \lambda(xyz - V),$$

求驻点:

$$F'_x = F'_y = F'_z = F'_\lambda = 0 \implies \begin{cases} 2(y+z) - \lambda yz = 0 \\ 2(z+x) - \lambda zx = 0 \\ 2(x+y) - \lambda xy = 0 \\ xyz - V = 0 \end{cases} \implies x = y = z = V^{\frac{1}{3}}.$$

因为当  $x, y$  或  $z \rightarrow 0$  时,  $A \rightarrow +\infty$ , 故  $A$  的最小值存在, 从而等于  $6V^{\frac{2}{3}}$ .  $\square$

**例 12.7.3.** 设  $\alpha_i > 0, x_i > 0, i = 1, \dots, n$ . 证明

$$x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \leq \left( \frac{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} \right)^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n},$$

等号成立当且仅当  $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ .

**解.** 考虑函数

$$f(x_1, \dots, x_n) = \ln(x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \ln x_i$$

在约束条件  $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = c$  ( $c > 0$ ) 下的条件极值. 令

$$F(x, \lambda) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \ln x_i - \lambda \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i - c \right),$$

求驻点:

$$\begin{aligned} F'_{x_i} = F'_\lambda = 0 &\implies \frac{\alpha_i}{x_i} = \lambda \alpha_i, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i - c = 0, \\ &\implies x_i = \frac{c}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

因为在集合

$$D: x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = c$$

的边界上,  $f$  取值为  $-\infty$ , 因此  $f$  在  $D$  的内部取到最大值, 上述惟一驻点必为最大值点, 从而

$$\ln(x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \ln \frac{c}{\sum_{i=1}^n \alpha_i},$$

即

$$x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \leq \left( \frac{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} \right)^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}.$$

### 习题 12.7

1. 求下列函数在指定约束条件下的最值:

- (1)  $f(x, y) = xy$ ,  $x + y = 1$ ;
- (2)  $f(x, y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ ,  $x^2 + y^2 = 1$ ;
- (3)  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ;
- (4)  $f(x, y) = \cos \pi(x + y)$ ,  $x^2 + y^2 = 1$ ;
- (5)  $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ;
- (6)  $f(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + z^2$ ,  $x + y + z = 1$ ;
- (7)  $f(x, y, z) = x^a y^b z^c$ ,  $x + y + z = 1$ , 其中  $a, b, c > 0$ .

2. 求周长为  $2l$  的平面三角形的最大面积.

3. 求包含在椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  内矩形的最大周长.

4. 求包含在椭球  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  内长方体的最大体积.



5. 求原点到直线  $2x + 2y + z + 9 = 0$ ,  $2x - y - 2z - 18 = 0$  的距离.
6. 求椭圆  $x^2 + 4y^2 = 4$  到直线  $x + y = 4$  的距离.
7. 求圆内接三角形中面积最大者.
8. 设  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ , 求  $u = \sum_{i=1}^n a_i x_i$  在高维球面  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = r^2$  上的最大值和最小值.
9. 设  $p > 1$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , 用求条件极值的办法证明 Hölder 不等式

$$\sum_{i=1}^n u_i v_i \leq \left( \sum_{i=1}^n u_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n v_i^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad \forall u_i, v_i \geq 0, i = 1, \dots, n.$$

10. (\*) 设  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  为  $n$  阶方阵,  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ , 令

$$f(x) = x^T A x + b x = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

- (1) 分析  $f$  在  $\mathbb{R}^n$  上的极值;
- (2) 分析  $f$  在约束条件  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$  下的极值.

## §12.8 多元函数微分的补充材料



本节内容可作为选读材料.

### §12.8.1 二次型与极值

在利用  $\text{Hess}(f)$  判别极值时, 需要判别其正定或负定性. 我们下面给出判别一个对称方阵为正定阵的方法.

设  $A$  为  $n$  阶对称实方阵,  $A$  可以视为线性映射  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . 另一方面,  $A$  也诱导出函数  $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$Q(x) = \langle x, Ax \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad A = (a_{ij})_{n \times n}.$$

因为  $n-1$  维球面

$$S^{n-1} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \right\}$$

为有界闭集, 故  $Q$  在  $S^{n-1}$  可以取到最小值和最大值.

**引理 12.8.1.**  $Q(x)$  在  $S^{n-1}$  上的最小值必为线性映射  $A$  的特征值.

**证明.** 记  $\lambda_0 = \min_{S^{n-1}} \{Q(x)\}$ , 则存在  $x^0 \in S^{n-1}$ , 使得

$$\lambda_0 = Q(x^0).$$

因此有

$$Q(x) \geq \lambda_0 \cdot \|x\|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

特别地, 对任意  $y \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$ , 有

$$\varphi(t) = Q(x^0 + ty) - \lambda_0 \|x^0 + ty\|^2 \geq 0.$$

$\varphi(t)$  关于  $t$  为光滑函数,  $t=0$  时取到最小值 0, 故  $\varphi'(0) = 0$ . 简单的计算表明

$$\langle y, Ax^0 \rangle + \langle x^0, Ay \rangle - \lambda_0 (\langle x^0, y \rangle + \langle y, x^0 \rangle) = 0.$$

由  $A$  为对称方阵得

$$\langle y, Ax^0 - \lambda_0 x^0 \rangle = 0.$$

取  $y = Ax^0 - \lambda_0 x^0$ , 由内积的正定性, 有

$$Ax^0 - \lambda_0 x^0 = 0.$$

即  $\lambda_0$  为特征值. □

这个引理的证明可以推广如下: 设  $V \subset \mathbb{R}^n$  为子向量空间, 如果  $AV \subset V$ , 则称  $V$  为  $A$  的一个不变子空间. 令

$$\mu = \inf \{Q(x) \mid x \in V, \|x\| = 1\},$$

则完全类似的证明可以推出  $\mu$  为  $A$  的特征值.

如果  $V$  为不变子空间, 则其正交补

$$V^\perp = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle = 0, \quad \forall x \in V\}$$

也是  $A$  的不变子空间; 而如果  $\mu$  为特征值, 则特征子空间

$$V(\mu) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \mu x\}$$

是不变子空间. 因此, 如果重复上面的证明过程, 我们就可以得到  $A$  的所有特征值

$$\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_r, \quad r \leq n.$$

其中

$$\lambda_i = \min \{Q(x) \mid x \perp V(\lambda_0) \oplus V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_{i-1}), \|x\| = 1\}, \quad i \geq 1.$$

从而有

**引理 12.8.2.** 设  $A$  为  $n$  阶实对称方阵, 则

- (1)  $A$  的特征值全为实数;
- (2)  $A$  为正定矩阵  $\iff$  其特征值都是正实数.

**证明.** (1) 以及 (2) 的 “ $\implies$ ” 部分已证.

(2) 的 “ $\impliedby$ ”: 如果  $A$  的特征值  $\lambda_0, \dots, \lambda_r$  均为正数, 则  $\mathbb{R}^n$  有正交分解

$$\mathbb{R}^n = V(\lambda_0) \oplus V(\lambda_1) \oplus \dots \oplus V(\lambda_r).$$

任给  $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0, x$  有正交分解

$$x = x_0 + x_1 + \dots + x_r, \quad x_i \in V(\lambda_i),$$

从而

$$Q(x) = \sum_{i=0}^r \lambda_i \cdot \|x_i\|^2 > 0.$$

即  $A$  是正定方阵. 或者这样证: 由于特征值都大于零, 因而最小特征值也大于零, 由引理 12.8.1 的证明即知  $A$  是正定的.  $\square$

**引理 12.8.3.** 设  $A$  为  $n$  阶实对称方阵, 其正特征值个数 (含重数) 为  $k$ , 如果  $V$  为  $\mathbb{R}^n$  的子向量空间, 且对任意  $x \in V (x \neq 0)$ , 均有  $Q(x) > 0$ , 则  $\dim V \leq k$ .

**证明.** (反证法) 设  $\dim V > k$ , 记  $A$  的正特征值对应的特征子空间的直和为  $V_0$ , 则  $\dim V_0 = k$ . 考虑正交投影

$$P: V \rightarrow V_0,$$

因为  $\dim V > \dim V_0$ , 故  $\ker P \neq \{0\}$ . 从而存在  $x \in V (x \neq 0)$  使得  $x \perp V_0$ . 由引理 12.8.2 的证明易见, 此时必有  $Q(x) \leq 0$ , 这就导出了矛盾.  $\square$

现在我们就得到了矩阵正定性的如下判别法:

**定理 12.8.4.**  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  为正定方阵  $\iff \det(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq k}} > 0, \forall 1 \leq k \leq n$ .

**证明.** “ $\implies$ ” 如果  $A$  正定, 则显然  $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq k}}$  正定, 其特征值全为正实数, 故行列式为正 (行列式为特征值之积).

“ $\impliedby$ ” 对  $n$  用归纳法.  $n=1$  显然. 设命题对  $n-1$  成立, 则对于  $n$  阶方阵, 由归纳假设,  $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n-1 \\ 1 \leq j \leq n-1}}$  正定, 这说明  $A$  在子向量空间  $\mathbb{R}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$  上正定. 由引理 12.8.3,  $A$  至少有  $n-1$  个正的特征值. 又因为  $\det A > 0$ , 故所有特征值均为正数, 由引理 12.8.2 即知  $A$  是正定的.  $\square$

注. 对半正定, 负定等方阵有类似的结果.

## §12.8.2 函数的相关性和独立性

在线性代数中, 向量空间中的一组向量有线性相关或线性独立的说法. 我们现在考虑多元函数的类似概念. 设  $f_i: U \rightarrow \mathbb{R}$  ( $1 \leq i \leq m$ ) 是定义在开集  $U \subset \mathbb{R}^n$  上的一组连续可微函数. 这一组函数也可以看成向量值函数

$$F: U \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

的分量. 如果存在开集  $V \supset F(U)$  上定义的连续可微函数  $\Phi: V \rightarrow \mathbb{R}$ , 使得

$$\Phi(F) = \Phi(f_1, f_2, \dots, f_m) \equiv 0, \quad \text{且} \quad \nabla \Phi(y) \neq 0, \quad \forall y \in V,$$

则称  $\{f_i\}$  在  $U$  上函数相关.

注. 如果  $\{f_i\}$  函数相关, 则根据隐函数定理, 存在局部定义的连续可微函数  $\Psi$ , 使得  $\{f_i\}$  中的某一个函数, 比如  $f_j$ , 可以表示为

$$f_j = \Psi(f_1, f_2, \dots, f_{j-1}, f_{j+1}, \dots, f_m),$$

这种等式也可以用来给出函数相关性的定义.

## 例 12.8.1. 考察函数

$$f_1(x) = \sum_{k=1}^n x_k, \quad f_2(x) = \sum_{k=1}^n x_k^2, \quad f_3(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$$

的相关性.

解. 直接的计算表明

$$f_1(x)^2 = f_2(x) + 2f_3(x),$$

因此  $\{f_1, f_2, f_3\}$  是函数相关的 (取  $\Phi(y) = y_1^2 - y_2 - 2y_3$ ). □

如果在任意点  $x^0 \in U$  附近,  $\{f_i\}$  均不是函数相关的, 则称  $\{f_i\}$  是一组彼此独立的函数. 如何判断函数的相关性或独立性呢? 我们仍然用微分学的基本手段, 即作线性化来研究这一问题. 如果  $\{f_i\}$  是函数相关的, 则对等式  $\Phi(F) = 0$  求导, 得到下面的 Jacobian 之间的等式

$$J\Phi \cdot JF(x) = 0, \quad \forall x \in U.$$

因为  $J\Phi = \nabla \Phi \neq 0$ , 上式表明  $\text{Rank} JF(x) < m, \forall x \in U$ , 其中  $\text{Rank}$  表示矩阵的秩. 特别地, 我们就得到如下函数独立性的一个判别方法.

**定理 12.8.5.** 设  $m \leq n$ ,  $\{f_i\}$  如上. 如果  $\text{Rank} JF(x) = m, \forall x \in U$ , 则  $\{f_i\}$  彼此独立; 特别地, 当  $m = n$  且  $\det JF(x) \neq 0 \forall x \in U$  时,  $\{f_i\}$  彼此独立.

注.  $\text{Rank} JF(x) = m$  等价于说向量  $\{\nabla f_i(x)\}_{i=1}^m$  线性无关.

例 12.8.2. 设  $f_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 为  $\mathbb{R}^n$  上的一组线性函数, 则当  $\det A = 0$  时  $\{f_i\}$  函数相关; 当  $\det A \neq 0$  时  $\{f_i\}$  彼此独立, 其中  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ .

现在我们注意如下事实: 如果作变量替换  $x = \varphi(u)$ , 则  $\{f_i(x)\}$  的函数相关性和独立性与  $\{f_i(\varphi(u))\}$  的函数相关性和独立性是一样的. 利用这件事, 我们考虑这样一个特殊情形, 即假设 Jacobian  $JF$  的秩满足条件

$$\text{Rank} JF(x) \equiv l < m, \quad \forall x \in U.$$

我们来说明在这种情形下,  $\{f_i\}$  在任何一点  $x^0 \in U$  附近都是函数相关的. 事实上, 由于  $JF(x^0) = l$ , 不妨设

$$\det \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq l \\ 1 \leq j \leq l}}(x^0) \neq 0.$$

考虑函数

$$G: U \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad G(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_l(x), x_{l+1}, \dots, x_n),$$

易见  $\det JG(x^0) \neq 0$ , 因此, 根据逆映射定理,  $G$  在  $x^0$  附近可逆, 其逆映射  $\varphi = G^{-1}$  也是连续可微的,  $x = \varphi(u)$  可视为变量替换. 在这个变量替换下,  $F$  可写为

$$F \circ \varphi(u) = (u_1, u_2, \dots, u_l, F^{l+1}(u), \dots, F^n(u)).$$

因为  $\text{Rank} J(F \circ \varphi) = \text{Rank} JF = l$ , 从上式可知

$$\frac{\partial F^i}{\partial u_j} \equiv 0, \quad \forall l+1 \leq i, j \leq n.$$

这说明, 在  $u^0 = G(x^0)$  附近,  $F^i$  ( $l+1 \leq i \leq n$ ) 只依赖于变量  $u_1, \dots, u_l$ . 特别地, 映射  $F \circ \varphi$  的分量在  $u^0 = G(x^0)$  附近是函数相关的, 因此  $F$  的分量在  $x^0$  附近函数相关.

令

$$\text{Rank} JF = \max_{x \in U} \text{Rank} JF(x),$$

称  $\text{Rank} JF$  为  $F$  在  $U$  上的秩. 如果  $JF$  在  $x^0 \in U$  处达到此秩, 则在  $x^0$  附近  $JF$  的秩也是  $\text{Rank} JF$ . 利用上述讨论, 我们立即得到如下推论

推论 12.8.6. 设  $\{f_i\}$  以及  $F$  如上. 如果  $JF$  在  $x^0 \in U$  达到最大秩  $l$ , 则它的  $l$  个分量在  $x^0$  附近是彼此独立的, 而其余的分量均和这  $l$  个分量函数相关.

## 第十三章 多元函数的积分

本章讨论多元函数的积分问题. 我们遵循的理论框架和第六章类似, 主要的困难是, 一元函数的积分区域是区间, 而多元函数的积分区域就要复杂得多. 由于两个变量的函数和更多变量的函数的积分理论并无本质差别, 因此我们从  $\mathbb{R}^2$  中的积分开始讨论. 多元函数的积分和一元函数的积分之间的差别还有: 多元函数的积分有积分次序的交换问题, 多元函数的积分变量替换公式的证明比一元函数积分的变量替换公式的证明要困难一些.

### §13.1 二重 Riemann 积分

设  $[a, b]$ ,  $[c, d]$  分别为  $\mathbb{R}$  中的区间, 则  $I = [a, b] \times [c, d]$  为  $\mathbb{R}^2$  中的矩形, 其直径  $d(I)$  和面积  $v(I)$  分别为

$$d(I) = \sqrt{(b-a)^2 + (d-c)^2}, \quad v(I) = (b-a)(d-c).$$

设这两个区间分别有分割

$$\pi_1: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b, \quad \pi_2: c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d,$$

则直线  $x = x_i$  ( $0 \leq i \leq m$ ) 和  $y = y_j$  ( $0 \leq j \leq n$ ) 将  $I$  分成  $mn$  个小矩形

$$I_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n),$$

这些区间的分点连同小矩形称为  $I$  的一个分割, 记为  $\pi = \pi_1 \times \pi_2$ . 分割  $\pi$  的模定义为  $\|\pi\| = \max_{i,j} d(I_{ij})$ .

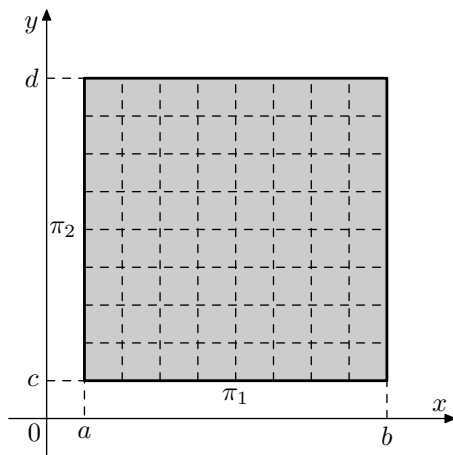


图 13.1 矩形的分割

**定义 13.1.1** (矩形上的 Riemann 积分). 假设  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  为矩形  $I$  上定义的函数, 如果存在实数  $A$ , 使得任给  $\varepsilon > 0$ , 均存在  $\delta > 0$ , 当  $\|\pi\| < \delta$  时, 有

$$\left| \sum_{i,j} f(\xi_{ij})v(I_{ij}) - A \right| < \varepsilon, \quad \forall \xi_{ij} \in I_{ij},$$

则称  $f$  在  $I$  上 Riemann 可积或简称可积,  $A$  为  $f$  在  $I$  上的积分, 记为

$$A = \int_I f = \iint_I f(x, y) dx dy.$$

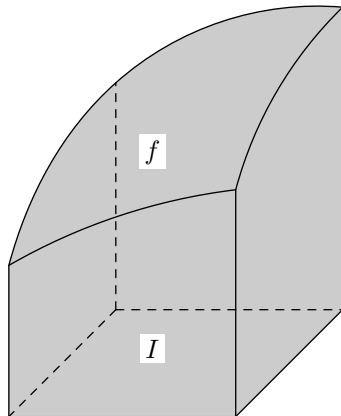


图 13.2 二重积分

注. (1) 我们将  $\sum_{i,j} f(\xi_{ij})v(I_{ij})$  称为  $f$  关于分割  $\pi$  的一个 Riemann 和, 也记为  $S(f, \pi, \xi)$ . 如果  $f$  可积, 则积分可用极限表示

$$\int_I f = \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} S(f, \pi, \xi).$$

(2) 与一元函数类似,  $f$  在  $I$  上 Riemann 可积的必要条件是  $f$  为有界函数.

下面假设  $f$  为  $I$  上定义的有界函数. 我们象对一元函数所做过的那样来讨论  $f$  可积的充分必要条件. 记  $M_{ij} = \sup_{p \in I_{ij}} f(p)$ ,  $m_{ij} = \inf_{p \in I_{ij}} f(p)$ , 并令

$$S(\pi) = S(\pi, f) = \sum_{i,j} M_{ij}v(I_{ij}), \quad s(\pi) = s(\pi, f) = \sum_{i,j} m_{ij}v(I_{ij}),$$

$S(\pi)$  和  $s(\pi)$  分别是  $f$  关于分割  $\pi$  的 Darboux 上和与 Darboux 下和. 与一元函数一样, 称

$$\omega_{ij} = M_{ij} - m_{ij} = \sup_{p \in I_{ij}} f(p) - \inf_{p \in I_{ij}} f(p)$$

为  $f$  在小矩形  $I_{ij}$  上的振幅.  $f$  的上和与下和之差可以表示为

$$S(\pi) - s(\pi) = \sum_{i,j} \omega_{ij}v(I_{ij}).$$

如果  $[a, b]$  的分割  $\pi'_1$  是由  $\pi_1$  通过添加分点得到,  $[c, d]$  的分割  $\pi'_2$  是由  $\pi_2$  通过添加分点得到, 则称  $[a, b] \times [c, d]$  的分割  $\pi' = \pi'_1 \times \pi'_2$  是  $\pi = \pi_1 \times \pi_2$  的一个加细. 对于加细分割, 下面的命题的证明和一元函数完全类似.

**命题 13.1.1.** 如果  $\pi'$  是  $\pi$  的加细, 则

$$s(\pi) \leq s(\pi') \leq S(\pi') \leq S(\pi),$$

即分割加细后下和不减, 上和不增.

**推论 13.1.2.** 对于  $I$  的任何两个分割  $\pi^1, \pi^2$ , 均有

$$s(\pi^1) \leq S(\pi^2).$$

**证明.** 设  $\pi^1 = \pi_1 \times \pi_2, \pi^2 = \pi'_1 \times \pi'_2$ , 令

$$\pi = \pi^1 \cup \pi^2 = (\pi_1 \cup \pi'_1) \times (\pi_2 \cup \pi'_2),$$

则  $\pi$  既是  $\pi^1$  的加细, 又是  $\pi^2$  的加细, 因此

$$s(\pi^1) \leq s(\pi) \leq S(\pi) \leq S(\pi^2),$$

这说明下和总是不超过上和. □

对于有界函数, 它的上和与下和也都是有界的. 因此可以考虑

$$S(f) = \inf_{\pi} S(\pi), \quad s(f) = \sup_{\pi} s(\pi).$$

分别称  $S(f), s(f)$  为  $f$  在  $I$  上的上积分与下积分.

**例 13.1.1.** 如果  $f(x) = k$  为常值函数, 则显然它在  $I$  上的任何 Riemann 和均为  $k \cdot v(I)$ , 因此常值函数可积. 同时, 常值函数的上积分和下积分与其积分也相等.

如果  $k$  为常数, 则易见  $f + k$  可积当且仅当  $f$  可积, 且

$$S(f + k) = S(f) + k \cdot v(I), \quad s(f + k) = s(f) + k \cdot v(I).$$

我们有

**定理 13.1.3 (Darboux).** 设  $f$  为  $I$  上的有界函数, 则

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} S(\pi) = \inf_{\pi} S(\pi), \quad \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} s(\pi) = \sup_{\pi} s(\pi).$$

**证明.** 我们以上和为例证明. 因为  $f$  有界, 根据刚才的讨论, 不妨设  $0 \leq f \leq M$ . 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在分割  $\pi'$ , 使得

$$S(\pi') < \inf_{\pi} S(\pi) + \frac{\varepsilon}{2}.$$



设  $\delta > 0$  为充分小的正数, 如果  $I_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$  为分割  $\pi'$  的一个小矩形, 则将它沿每一条边向其内部平行地内缩  $\delta$  距离, 得 (开) 矩形

$$I_{ij}^\delta = (x_{i-1} + \delta, x_i - \delta) \times (y_{j-1} + \delta, y_j - \delta),$$

记

$$J_\delta = I - \bigcup_{i,j} I_{ij}^\delta,$$

则  $J_\delta$  是一些 (闭) 矩形之并, 其面积  $v(J_\delta)$  可以定义,

且当  $\delta$  趋于零时, 该面积趋于零. 我们固定一个充分小的  $\delta$ , 使得

$$v(J_\delta) < \frac{\varepsilon}{2M+1}.$$

现在设  $\|\pi\| < \delta$ , 对于分割  $\pi$  中的每一个小矩形来说, 不难看出, 要么它完全含于  $J_\delta$ , 要么它完全含于分割  $\pi'$  的某个 (开) 矩形之内, 二者必居其一 (也可同时成立). 因此,  $\pi$  的上和有下面的估计:

$$\begin{aligned} \inf_{\pi} S(\pi) &\leq S(\pi) \leq M \cdot v(J_\delta) + S(\pi') \\ &\leq M \cdot \frac{\varepsilon}{2M+1} + \inf_{\pi} S(\pi) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \inf_{\pi} S(\pi) + \varepsilon. \end{aligned}$$

这说明  $\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} S(\pi) = \inf_{\pi} S(\pi)$ . □

注. 读者可以思考一下, 这里的证明和一元函数相应的证明有何不同?

有了 Darboux 定理, 下面关于可积性的判断定理和一元函数相应的证明就没什么不同了.

**定理 13.1.4** (可积的充要条件). 设  $f$  为  $I$  上的有界函数, 则下列条件等价:

- (1)  $f$  在  $I$  上 Riemann 可积.
- (2)  $f$  在  $I$  上的上积分和下积分相等.
- (3)  $\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i,j} \omega_{ij} v(I_{ij}) = 0$ .
- (4) 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $I$  的某个分割  $\pi$ , 使得

$$S(\pi) - s(\pi) = \sum_{i,j} \omega_{ij} v(I_{ij}) < \varepsilon.$$

**推论 13.1.5.** 设  $f$  为矩形  $I$  上的连续函数, 则  $f$  是 Riemann 可积的;

**证明.**  $f$  在  $I$  上连续意味着  $f$  在  $I$  上一致连续. 利用可积的充要条件 (比如 (3)), 剩下的证明和一元函数完全相同. □

对于多元函数, 下面的结果也是成立的.

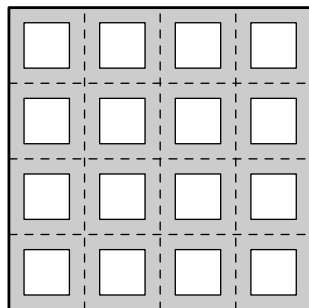


图 13.3 矩形的内缩

**定理 13.1.6 (Riemann).** 设  $f$  为  $I$  上的有界函数, 则  $f$  可积的充分必要条件是任给  $\varepsilon, \eta > 0$ , 存在  $I$  的分割  $\pi$ , 使得

$$\sum_{\omega_{ij} \geq \eta} v(I_{ij}) < \varepsilon.$$

和一元函数一样, 我们引入零测集的概念来刻画可积函数.

**定义 13.1.2 (零测集).** 设  $A \subset \mathbb{R}^2$  为平面点集. 如果任给  $\varepsilon > 0$ , 存在至多可数个闭矩形

$$I_i, \quad i = 1, 2, \dots,$$

使得

$$A \subset \bigcup_{i \geq 1} I_i, \quad \text{且} \quad \sum_{i \geq 1} v(I_i) < \varepsilon,$$

则称  $A$  为零测集.

和一维的情形类似, 我们有

**命题 13.1.7.** (1) 有限点集均为零测集; (2) 零测集的子集仍为零测集; (3) 可数个零测集之并仍为零测集; (4) 矩形的边界是零测集; (5) 设  $f$  为  $[a, b]$  上的一元可积函数, 则其图像  $\text{graph}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^2$  为零测集.

**证明.** 前三条的证明和一维的情形完全类似, 我们略去.

(4) 设  $\delta > 0$  为充分小的正数, 将矩形分别内缩  $\delta$  距离和外展  $\delta$  距离, 得到两个矩形, 原矩形的边界包含于这两个矩形之差, 这两个矩形之差可以分为若干小矩形之并. 当  $\delta$  趋于零时, 它们的面积之和趋于零, 因此原矩形的边界为零测集.

(5) 任给  $\varepsilon > 0$ , 因为  $f$  为一元可积函数, 故可取  $[a, b]$  的分割

$$\pi: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

使得  $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$ , 其中  $\omega_i = M_i - m_i$  为  $f$  在小区间  $[x_{i-1}, x_i]$  上的振幅,  $M_i$  和  $m_i$  分别是  $f$  在该小区间上的上确界与下确界. 因此

$$\{(x, f(x)) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} \subset [x_{i-1}, x_i] \times [m_i, M_i] = I_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

从而有

$$\text{graph}(f) \subset \bigcup_{i=1}^n I_i,$$

并且

$$\sum_{i=1}^n v(I_i) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})(M_i - m_i) = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \varepsilon,$$

这说明  $\text{graph}(f)$  为零测集. □

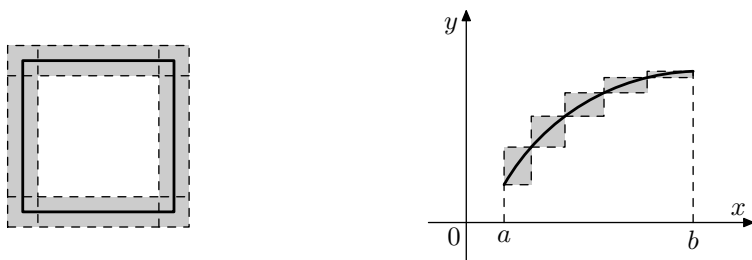


图 13.4 矩形的边界和可积函数的图像

注. 从命题的证明还可以看出, 因为矩形的边界为零测集, 在零测集定义中将“闭矩形”换成“开矩形”也是可以的.

对于多元函数, 我们也可定义振幅. 设  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  为有界函数,  $x \in A$ .  $f$  在  $x$  处的振幅定义为

$$\omega(f, x) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \sup\{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in B_r(x) \cap A\}.$$

易见,  $f$  在  $x$  处连续当且仅当  $\omega(f, x) = 0$ . 设  $\delta > 0$ , 记

$$D_\delta = \{x \in A \mid \omega(f, x) \geq \delta\},$$

则  $f$  的间断点 (不连续点) 全体为  $D_f = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{\frac{1}{n}}$ .

**定理 13.1.8 (Lebesgue).** 矩形  $I$  上的有界函数  $f$  是 *Riemann* 可积的当且仅当  $f$  的间断点集  $D_f$  为零测集.

**证明.** 这个定理的证明和一元函数相应的 Lebesgue 定理的证明没有本质不同, 只要注意使用本节 Darboux 定理证明中矩形内缩的技巧即可, 留作习题.  $\square$

下面的推论是显然的.

**推论 13.1.9.** (1) 设  $f$  是矩形  $I$  上的可积函数, 矩形  $J$  包含于  $I$ , 则  $f$  也是  $J$  上的可积函数; (2) 如果矩形  $I$  被有限个矩形  $\{J_i\}$  所覆盖, 且  $f$  在每个  $J_i$  上都是可积的, 则  $f$  在  $I$  上也是可积的.

为了研究函数在一般集合 (不必为矩形) 上的可积性问题, 我们引进零面积集的概念.

**定义 13.1.3 (零面积集).** 设  $A \subset \mathbb{R}^2$  为平面点集. 如果任给  $\varepsilon > 0$ , 存在有限个闭矩形

$$I_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

使得

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n I_i, \quad \text{且} \quad \sum_{i=1}^n v(I_i) < \varepsilon,$$

则称  $A$  为零面积集.

显然, 零面积集必为零测集. 我们还有

**命题 13.1.10.** (1) 有限点集是零面积集; (2) 零面积集的子集仍为零面积集; (3) 有限个零面积集之并仍为零面积集; (4)  $A$  为零面积集当且仅当  $\bar{A} = A \cup \partial A$  为零面积集; (5) 有界闭集  $A$  为零面积集当且仅当  $A$  是零测集.

**证明.** 前三条的证明略去.

(4) 如果  $\bar{A}$  为零面积集, 则由 (2) 知,  $A \subset \bar{A}$  为零面积集. 反之, 设  $A$  为零面积, 则任给  $\varepsilon > 0$ , 存在有限个闭矩形  $\{I_i\}$ , 使得

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n I_i, \quad \text{且} \quad \sum_{i=1}^n v(I_i) < \varepsilon,$$

显然仍有

$$\bar{A} \subset \bigcup_{i=1}^n I_i, \quad \text{且} \quad \sum_{i=1}^n v(I_i) < \varepsilon,$$

因此  $\bar{A}$  为零面积集.

(5) 只要说明有界闭的零测集必为零面积集即可. 我们知道有界闭集是紧致集, 因此在零测集的定义中采用开矩形覆盖, 则可以从其中挑选有限个开矩形, 使得它们仍然覆盖该紧致集, 这当然表明这个紧致集是零面积集.  $\square$

如果仔细检查一下命题 13.1.7 的证明, 我们实际上知道矩形的边界是零面积集, 而可积函数的图像也是零面积集. 下面的结果反映了零面积集概念的用处.

**定理 13.1.11.** 设  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  为矩形  $I$  上的有界函数. 如果  $A = \{x \in I \mid f(x) \neq 0\}$  为零面积集, 则  $f$  可积且积分为零.

**证明.** 因为  $f$  在开集  $I - \partial I - \bar{A}$  上为零, 故  $f$  的间断点包含于集合  $\partial I \cup \bar{A}$  中.  $A$  是零面积集意味着  $\bar{A}$  也是零面积集. 从而  $\partial I \cup \bar{A}$  为零面积集. 根据 Lebesgue 定理,  $f$  可积. 对于  $I$  的任何分割, 由于矩形不是零面积集, 所以每一个小矩形中均存在  $f$  的零点, 即  $f$  的 Riemann 和总可以取零值, 从而  $f$  的积分为零.  $\square$

现在我们来定义有界集合的面积. 设  $A \in \mathbb{R}^2$  为平面点集, 记  $\chi_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  为下面定义的函数:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

即  $\chi_A$  是  $A$  的特征函数.

**定义 13.1.4** (有界集合的面积). 设  $A$  为有界集合,  $I$  为包含  $A$  的矩形. 如果  $A$  的特征函数  $\chi_A$  在  $I$  上 Riemann 可积, 则称  $A$  是可求面积的, 它的面积定义为  $\chi_A$  在  $I$  上的积分.

注. (1)  $A$  是否可求面积以及面积的大小与定义中矩形  $I$  的选取无关. 如果  $A$  本身就是一个矩形, 则按此定义给出的面积和矩形的面积公式给出的面积是一致的.

(2) 如果  $A$  本身是零面积集, 则按照前面的讨论我们知道,  $A$  是可求面积的, 且其面积为零.

**例 13.1.2.** 如果  $A, B$  是可求面积的有界集合, 则  $A \cap B, A \cup B$  也是可求面积的.

**证明.** 这只要注意到特征函数满足下列等式

$$\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B, \quad \chi_{A \cup B} = \max\{\chi_A, \chi_B\},$$

以及可积函数类的基本运算性质即可. □

下面的结果给出了有界集合可求面积的充分必要条件.

**定理 13.1.12.** 有界集合  $A$  可求面积当且仅当其边界  $\partial A$  为零面积集.

**证明.** 不妨设  $\bar{A} \subset I - \partial I$ . 易见  $\chi_A$  的间断点集正好为  $\partial A$ . 因此  $\chi_A$  可积当且仅当  $\partial A$  为零测集. 因为  $\partial A$  为有界闭集, 它为零测集当且仅当它是零面积集. □

有了这些预备, 我们可以考虑函数在一般集合上的积分了. 为了简单起见, 我们只考虑函数在可求面积的集合上的积分. 设  $A$  是可求面积的有界集合,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  为  $A$  上的有界函数, 将  $f$  零延拓为  $\mathbb{R}^2$  上的函数  $f_A$  如下:

$$f_A(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^2 - A. \end{cases}$$

**定义 13.1.5.** 设  $A$  和  $f$  如上,  $I$  为包含  $A$  的矩形. 如果  $f_A$  为  $I$  上的可积函数, 则称  $f$  在  $A$  上可积, 且积分定义为  $f_A$  在  $I$  的积分, 即

$$\int_A f = \int_I f_A.$$

注. (1) 这个定义也和矩形  $I$  的选取无关. 当  $A$  本身就是矩形时, 这个定义和矩形上积分的定义是一致的.

(2) 由可求面积的定义我们知道, 有界集合可求面积当且仅当常值函数 1 在这个集合上是可积的.

下面的定理给出了函数在可求面积的集合上可积的判别条件.

**定理 13.1.13.** 设  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  是可求面积集合  $A$  上定义的有界函数. 则  $f$  可积的充分必要条件是  $f$  在  $A$  上的间断点集为零测集.

**证明.** 取矩形  $I$  使得  $\bar{A} \subset I - \partial I$ . 由定义,  $f$  在  $A$  上可积当且仅当  $f_A$  在  $I$  上可积. 根据 Lebesgue 定理,  $f_A$  可积当且仅当其间断点集为零测集. 因为在  $I - \bar{A}$  中  $f_A$  为零, 因此  $f_A$  的不连续点都在  $\bar{A}$  中. 又由于  $\partial A$  为零面积集, 故  $f_A$  可积当且仅当  $f_A$  在  $A - \partial A$  中的间断点集为零测集. 在  $A - \partial A$  中  $f_A = f$ , 因此  $f_A$  可积当且仅当  $f$  在  $A - \partial A$  中的间断点集为零测集, 也就是说当且仅当  $f$  在  $A$  上的间断点为零测集.  $\square$

### 习题 13.1

1. 证明, 如果  $f, g$  均为矩形  $I$  上的可积函数, 则  $fg$  也是  $I$  上的可积函数.
2. 证明, 如果  $f, g$  分别是  $[a, b]$  和  $[c, d]$  上的一元可积函数, 则  $f(x)g(y)$  是矩形  $[a, b] \times [c, d]$  上的可积函数.
3. 直接证明只有有限个间断点的有界函数是 Riemann 可积的.
4. 设  $f(x, y)$  是矩形  $[a, b] \times [c, d]$  上的函数, 且对于每一个固定的  $x \in [a, b]$ ,  $f(x, y)$  是关于  $y$  的单调递增函数; 而对于每一个  $y \in [c, d]$ ,  $f(x, y)$  是关于  $x$  的单调递增函数. 证明  $f$  是可积的.
5. 设非负函数  $f$  在矩形  $I$  上可积, 则  $\sqrt{f}$  在  $I$  上也可积.
6. 设  $f$  是  $[a, b]$  上的一元连续函数,  $\varphi: I \rightarrow [a, b]$  为矩形  $I$  上的可积函数, 则复合函数  $f \circ \varphi$  为矩形  $I$  上的可积函数.
7. 设  $f$  在矩形  $I$  上连续, 映射  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2): J \rightarrow I$  的两个分量均为矩形  $J$  上的可积函数, 则复合函数  $f \circ \varphi$  为  $J$  上可积函数.
8. 证明, 矩形都不是零测集. (提示: 去证明闭矩形不是零面积集.)
9. 证明  $[0, 1] \times [0, 1]$  中有理点的全体不是零面积集.
10. 设  $A$  为  $\mathbb{R}$  上的零测集. 证明  $A \times \mathbb{R}$  为  $\mathbb{R}^2$  上的零测集.
11. 设  $\sigma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$  为连续曲线,  $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ . 如果  $x(t)$  或  $y(t)$  连续可微, 则  $\sigma([\alpha, \beta])$  为  $\mathbb{R}^2$  中的零面积集.
12. 定义在区间  $[0, 1]$  上的 Dirichlet 函数  $D(x)$  不是一元可积函数, 它的图像是零面积集吗?
13. 设  $A$  为可求面积的集合, 证明  $\bar{A}$  也是可求面积的, 且  $A$  的面积为零当且仅当它是零面积集.

## §13.2 多重积分及其基本性质

前面一节关于二重积分的理论可以直接推广到  $n$  重积分上. 在  $n$  维欧氏空间  $\mathbb{R}^n$  中, 称点集

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

为一个  $n$  维矩形, 其直径  $d(I)$  和体积  $v(I)$  分别为

$$d(I) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}, \quad v(I) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n).$$

设区间  $[a_i, b_i]$  ( $i = 1, 2, \cdots, n$ ) 有分割

$$\pi_i: a_i = x_0^i < x_1^i < \cdots < x_{m_i}^i = b_i,$$

这时超平面  $x_i = x_j^i$  ( $i = 1, 2, \cdots, n; j = 0, 1, \cdots, m_i$ ) 将  $I$  分割成  $m_1 \cdot m_2 \cdots m_n$  个小  $n$  维矩形

$$I_{i_1 \cdots i_n} = [x_{i_1-1}^1, x_{i_1}^1] \times \cdots \times [x_{i_n-1}^n, x_{i_n}^n], \quad 1 \leq i_1 \leq m_1, \cdots, 1 \leq i_n \leq m_n.$$

这些小矩形所形成的分割记为  $\pi = \pi_1 \times \cdots \times \pi_n$ , 定义

$$\|\pi\| = \max_{i_1 \cdots i_n} d(I_{i_1 \cdots i_n}),$$

称为分割  $\pi$  的模.

**定义 13.2.1** ( $n$  维矩形上的 Riemann 积分). 设  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  为  $n$  维矩形  $I$  上定义的函数, 如果存在实数  $A$ , 使得任给  $\varepsilon > 0$ , 均存在  $\delta > 0$ , 当  $\|\pi\| < \delta$  时, 有

$$\left| \sum_{i_1 \cdots i_n} f(\xi_{i_1 \cdots i_n}) v(I_{i_1 \cdots i_n}) - A \right| < \varepsilon, \quad \forall \xi_{i_1 \cdots i_n} \in I_{i_1 \cdots i_n},$$

则称  $f$  在  $I$  上 Riemann 可积或简称可积,  $A$  为  $f$  在  $I$  上的积分, 记为

$$A = \int_I f = \int_I f(x) dx = \int \cdots \int_I f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n.$$

$n$  重 Riemann 积分的理论与二重 Riemann 积分的理论是完全类似的, 我们不再重复叙述, 只是指出  $\mathbb{R}^n$  中零测集, 零体积集和可求体积集分别对应于  $\mathbb{R}^2$  中的零测集, 零面积集和可求面积集, 读者可以自行写出它们的定义.

下面考虑多重积分的基本性质. 第一个是关于被积函数的线性性.

**命题 13.2.1.** 设  $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$  是可求体积的有界集合  $A$  上定义的可积函数,  $\alpha, \beta$  为常数, 则  $\alpha f + \beta g$  也是  $A$  上的可积函数, 且

$$\int_A (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_A f + \beta \int_A g.$$

**证明.** 通过转化为矩形上的积分并利用可积的充要条件得到  $\alpha f + \beta g$  的可积性, 再由积分的定义得到欲证等式.  $\square$

下面的性质是关于积分区域的可加性的.

**命题 13.2.2.** 设  $A_1, A_2$  为可求体积的有界集合,  $A_1 \cap A_2$  为零体积集. 如果  $f$  在  $A_1$  和  $A_2$  上均可积, 则  $f$  在  $A_1 \cup A_2$  上也可积, 且

$$\int_{A_1 \cup A_2} f = \int_{A_1} f + \int_{A_2} f.$$

**证明.** 取矩形  $I \supset A_1 \cup A_2$ , 则  $f_{A_1 \cup A_2} - (f_{A_1} + f_{A_2})$  仅在零体积集  $A_1 \cap A_2$  上才可能取非零值, 特别地, 由定理 13.1.11 知  $f_{A_1 \cup A_2} - (f_{A_1} + f_{A_2})$  在  $I$  上可积且积分为零, 因此  $f_{A_1 \cup A_2}$  在  $I$  上可积, 且

$$\begin{aligned} \int_{A_1 \cup A_2} f &= \int_I f_{A_1 \cup A_2} \\ &= \int_I (f_{A_1} + f_{A_2}) \\ &= \int_I f_{A_1} + \int_I f_{A_2} \\ &= \int_{A_1} f + \int_{A_2} f. \end{aligned}$$

这个结果也可推广到多个可求体积的集合的情形.  $\square$

下面的性质是多重积分的保序性.

**命题 13.2.3.** 设  $A$  为可求体积的有界集合,  $f, g$  为  $A$  上的可积函数.

- (1) 如果  $f \geq 0$ , 则  $\int_A f \geq 0$ ;
- (2) 如果  $f \geq g$ , 则  $\int_A f \geq \int_A g$ ;

**证明.** (1) 取矩形  $I \supset A$ , 则  $f$  的延拓函数  $f_A$  仍然是非负函数, 其 Riemann 和也总是非负的, 因而  $f_A$  在  $I$  上的积分非负, 即  $f$  在  $A$  上的积分非负.

(2) 如果  $f \geq g$ , 则  $f - g$  为非负可积函数, 由 (1) 知  $f - g$  在  $A$  上的积分非负, 由积分关于被积函数的线性性即知  $f$  在  $A$  上的积分不小于  $g$  在  $A$  上的积分.  $\square$

**推论 13.2.4.** 设  $A$  为可求体积的有界集合,  $f$  为  $A$  上的可积函数, 则  $|f|$  也是  $A$  上可积函数, 且

$$\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f|.$$

**证明.** 取矩形  $I \supset A$ , 则  $|f_A| = |f|_A$ . 由  $f_A$  在  $I$  上可积知  $|f_A|$  也在  $I$  上可积, 从而  $|f|_A$  在  $I$  上可积, 即  $|f|$  在  $A$  上可积. 注意到

$$-|f|_A \leq f_A \leq |f|_A,$$



由积分的保序性和线性性得

$$-\int_I |f|_A \leq \int_I f_A \leq \int_I |f|_A,$$

即

$$-\int_A |f| \leq \int_A f \leq \int_A |f|,$$

推论得证.  $\square$

**定理 13.2.5** (积分中值定理). 设  $A$  为可求体积的有界集合,  $f, g$  为  $A$  上的可积函数. 如果  $g$  在  $A$  上不变号, 则存在常数  $\mu$ , 使得

$$\int_A fg = \mu \int_A g,$$

其中  $\inf_A f \leq \mu \leq \sup_A f$ .

**证明.** 不妨假设  $g \geq 0$ . 跟前面的论证类似, 不难看出  $fg$  在  $A$  上可积. 且由

$$(\inf_A f)g(x) \leq f(x)g(x) \leq (\sup_A f)g(x), \quad \forall x \in A$$

以及积分的保序性得

$$(\inf_A f) \int_A g \leq \int_A fg \leq (\sup_A f) \int_A g,$$

如果  $\int_A g = 0$ , 则上式表明  $fg$  在  $A$  上的积分也为零, 此时  $\mu$  可任意取值. 设  $\int_A g > 0$ , 则

$$\inf_A f \leq \frac{\int_A fg}{\int_A g} \leq \sup_A f,$$

令

$$\mu = \frac{\int_A fg}{\int_A g},$$

则  $\mu$  是满足要求的常数.  $\square$

**推论 13.2.6.** 设  $A$  为可求体积的紧致区域,  $f$  为  $A$  上的连续函数. 如果  $g$  是  $A$  上不变号的可积函数, 则存在  $\xi \in A$ , 使得

$$\int_A fg = f(\xi) \int_A g,$$

**证明.** 利用积分中值定理和连续函数在紧致区域上的介值定理即可.  $\square$

### 习题 13.2

1. 类比于  $\mathbb{R}^2$ , 试给出  $\mathbb{R}^n$  中零测集和零体积集的定义.
2. 证明,  $n$  维矩形的边界是  $\mathbb{R}^n$  中的零体积集;  $\mathbb{R}^n$  中的超平面是零测集.
3. 设  $f$  在  $n$  维矩形  $I$  上可积,  $J \subset I$  为子矩形. 则  $f$  在  $J$  上也可积.
4. 设  $f, g$  在可求体积的有界集  $A$  上可积, 则  $\max\{f, g\}$  和  $\min\{f, g\}$  也在  $A$  上可积.
5. 设  $f$  在矩形  $I, J$  上可积, 且矩形  $I$  和  $J$  的内部不相交, 则  $f$  在  $I \cup J$  上也可积, 且

$$\int_{I \cup J} f = \int_I f + \int_J f.$$

6. 设  $A_1, \dots, A_k$  为可求体积的有界集合, 且  $A_i \cap A_j$  ( $1 \leq i \neq j \leq k$ ) 为零体积集. 如果  $f$  在每个  $A_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) 上均可积, 则  $f$  在  $A_1 \cup \dots \cup A_k$  上也可积, 且

$$\int_{A_1 \cup \dots \cup A_k} f = \int_{A_1} f + \dots + \int_{A_k} f.$$

7. 设  $f$  为矩形  $I$  上的非负连续函数, 则  $\int_I f \geq 0$ , 且等号成立当且仅当  $f \equiv 0$ .
8. 设  $f > 0$  为矩形  $I$  上的可积函数, 则积分  $\int_I f > 0$ .
9. 设  $A$  为  $\mathbb{R}^n$  中可求体积的紧致区域,  $f$  为  $A$  上的连续函数, 则存在  $\xi \in A$ , 使得

$$\int_A f = f(\xi)v(A).$$

10. 利用中值定理, 证明

$$1.96 \leq \iint_{|x|+|y| \leq 10} \frac{dxdy}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} < 2.$$

11. 设  $\{f_n\}$  是矩形  $I$  上一列单调递减连续函数, 如果  $f_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ), 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n = 0.$$

12. 设  $f$  为连续函数, 求极限

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{x^2+y^2 \leq r^2} f(x, y) dxdy.$$

## §13.3 重积分的计算

我们现在讨论重积分的计算问题. 重积分的一个常用的计算方法就是转化为一元函数的积分去处理. 我们先以矩形上的二重积分为例加以说明.

设  $f(x, y)$  为矩形  $I = [a, b] \times [c, d]$  上的有界函数. 对于每一个固定的  $x \in [a, b]$ ,  $f(x, y)$  可以看成区间  $[c, d]$  上关于  $y$  的函数, 它在  $[c, d]$  上的下积分和上积分分别记为  $\varphi(x)$  和  $\psi(x)$ , 这样我们就得到了定义在  $[a, b]$  上的两个有界函数.

**定理 13.3.1.** 设  $f(x, y)$  在  $I$  上可积, 则  $\varphi(x)$  和  $\psi(x)$  在  $[a, b]$  上均可积, 且

$$\int_I f = \int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b \psi(x) dx.$$

**证明.** 用记号  $\pi_1, \pi_2$  分别表示  $[a, b]$  和  $[c, d]$  的分割:

$$\pi_1: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b, \quad \pi_2: c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d,$$

$I$  的相应分割记为  $\pi = \pi_1 \times \pi_2$ . 因为  $f$  在  $I$  上可积, 故任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 当  $\|\pi\| < \delta$  时

$$\int_I f - \varepsilon < \sum_{ij} f(\xi_{ij}) v(I_{ij}) < \int_I f + \varepsilon, \quad \forall \xi_{ij} = (\xi_i, \eta_j) \in I_{ij}.$$

特别地, 当  $\|\pi_1\| < \delta/\sqrt{2}, \|\pi_2\| < \delta/\sqrt{2}$  时, 上式成立. 此时有

$$\begin{aligned} \int_I f - \varepsilon &\leq \sum_{ij} \inf_{\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]} f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j \\ &\leq \sum_{ij} \sup_{\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]} f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j \leq \int_I f + \varepsilon, \end{aligned}$$

因为  $\sum_{j=1}^n \inf_{\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]} f(\xi_i, \eta_j) \Delta y_j$  是函数  $f(\xi_i, y)$  在  $[c, d]$  上的 Darboux 下和, 故

$$\sum_{j=1}^n \inf_{\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]} f(\xi_i, \eta_j) \Delta y_j \leq \varphi(\xi_i).$$

同理

$$\sum_{j=1}^n \sup_{\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]} f(\xi_i, \eta_j) \Delta y_j \geq \psi(\xi_i).$$

因此我们得到

$$\int_I f - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^m \varphi(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^m \psi(\xi_i) \Delta x_i \leq \int_I f + \varepsilon.$$

这说明  $\varphi(x)$  和  $\psi(x)$  在  $[a, b]$  上均可积, 且积分等于  $f$  在  $I$  上的积分.  $\square$

**推论 13.3.2.** 设  $f(x, y)$  在矩形  $I$  上可积. 如果对于每一个  $x \in [a, b]$ , 变量  $y$  的函数  $f(x, y)$  在  $[c, d]$  上可积, 则

$$\int_I f = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

同理, 如果对于每一个  $y \in [c, d]$ , 变量  $x$  的函数  $f(x, y)$  在  $[a, b]$  上可积, 则

$$\int_I f = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

**推论 13.3.3.** 设  $f(x, y)$  为矩形  $I$  上的连续函数, 则有

$$\int_I f = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx,$$

上式最左边为重积分, 右边称为累次积分.

对于多重积分, 类似的结果也成立. 例如, 三重积分在一定条件下可以化为二重积分和一重积分.

**例 13.3.1.** 设  $I = [0, 1] \times [0, 1]$ , 计算积分

$$\iint_I \frac{y dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

**解.** 被积函数是连续函数, 因此

$$\begin{aligned} \iint_I \frac{y dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} &= \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{y dy}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \int_0^1 \left( \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}} \right) dx = \ln \frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}}. \end{aligned}$$

**例 13.3.2.** 设  $I = [0, 1] \times [0, 1]$ , 计算积分  $\int_I f$ , 其中

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 - x - y, & x + y \leq 1, \\ 0, & x + y > 1. \end{cases}$$

**解.** 函数  $f$  为连续函数, 故

$$\begin{aligned} \int_I f &= \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y) dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} (1 - x)^2 dx = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

例 13.3.3. 设  $I = [0, 1]^3 = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ , 计算积分

$$\int_I \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}.$$

解. 被积函数是连续函数, 因此

$$\begin{aligned} \int_I \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3} &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{(2+x+y)^2} \right] dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x} \right) - \left( \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3+x} \right) \right] dx \\ &= \frac{1}{2} (5 \ln 2 - 3 \ln 3). \end{aligned}$$

现在我们讨论一般区域上重积分化累次积分的问题, 这往往可以通过考虑矩形上的积分予以解决.

定理 13.3.4. 设  $A \subset \mathbb{R}^2$  为可求面积的有界集合,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  为有界连续函数. 记  $A$  在  $x$  轴上的垂直投影为

$$I = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{存在 } y \text{ 使得 } (x, y) \in A\}.$$

如果对于每一点  $x \in I$ ,  $A_x = \{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in A\}$  是区间 (可退化为一点), 则

$$\int_A f = \int_I dx \int_{A_x} f(x, y) dy.$$

同理, 记  $A$  在  $y$  轴上的垂直投影为

$$J = \{y \in \mathbb{R} \mid \text{存在 } x \text{ 使得 } (x, y) \in A\}.$$

如果对于每一点  $y \in J$ ,  $A^y = \{x \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in A\}$  是区间 (可退化为一点), 则

$$\int_A f = \int_J dy \int_{A^y} f(x, y) dx.$$

证明. 因为  $A$  可求面积,  $f$  有界连续, 故  $f$  可积. 取包含  $A$  的矩形  $[a, b] \times [c, d]$ , 则  $f_A$  在  $[a, b] \times [c, d]$  上可积. 当  $x \in I$  时,  $f_A(x, y)$  关于  $y$  在  $[c, d]$  上的积分等于连续函数  $f(x, y)$  关于  $y$  在区间  $A_x$  上的积分. 当  $x \in [a, b] \cap I^c$  时  $f_A(x, y) = 0$ . 因此, 对于每一个  $x \in [a, b]$ ,  $f_A(x, y)$  关于  $y$  在  $[c, d]$  上均可积, 从而有

$$\begin{aligned} \int_A f &= \int_{[a, b] \times [c, d]} f_A = \int_a^b dx \int_c^d f_A(x, y) dy \\ &= \int_a^b dx \int_c^d f_A(x, y) dy = \int_I dx \int_{A_x} f(x, y) dy. \end{aligned}$$

关于  $y$  轴投影的结果完全类似. □

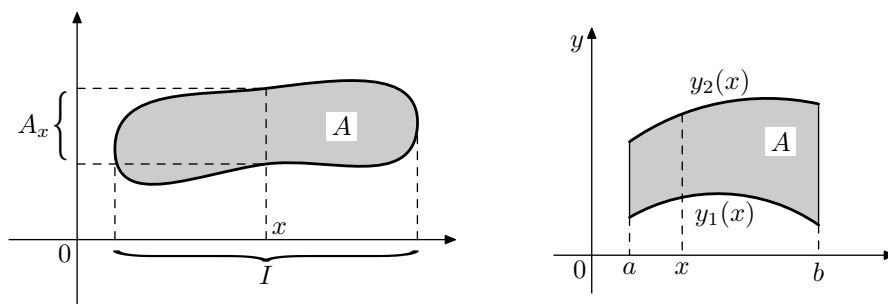


图 13.5 多重积分的投影法

注. 只要  $f$  在  $A$  上可积, 且  $f(x, y)$  关于  $y$  在每一个区间  $A_x$  上可积, 则定理的第一个结论仍然成立, 第二个结论类似. 定理中的这种计算重积分的方法称为“投影法”.

设  $y_1(x) \leq y_2(x)$  为  $[a, b]$  上定义的连续函数, 则集合

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1(x) \leq y \leq y_2(x), a \leq x \leq b\}$$

的边界为零面积集, 因此  $A$  可求面积.  $A$  与跟  $x$  轴垂直的直线的交要么为空集, 要么为区间, 因此得到

**定理 13.3.5.** 设  $y_1, y_2$  和  $A$  如上. 函数  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  可积, 且对于每一个  $x \in [a, b]$ , 关于  $y$  的积分

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

存在, 则

$$\int_A f = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

**证明.** 证明和上一定理类似, 略. □

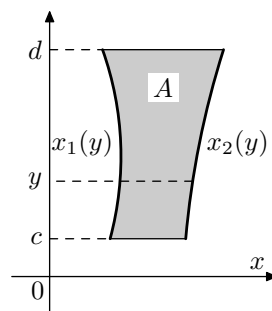
同样, 如果  $A$  是这样的集合

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1(y) \leq x \leq x_2(y), c \leq y \leq d\},$$

在类似条件下就有

$$\int_A f = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx.$$

对于一般的  $n$  重积分, 类似的结果也成立 (把区间换成矩形), 我们仅举例说明.

图 13.6 向  $y$  轴的投影

## 例 13.3.4. 计算积分

$$I = \int_A x^2 y^2 dx dy,$$

其中  $A$  是由直线  $y = 0$ ,  $x = 1$  和  $y = x$  围成的三角形区域.

解. 利用向  $x$  轴作投影, 得

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x x^2 y^2 dy = \int_0^1 \frac{1}{3} x^5 dx = \frac{1}{18}.$$

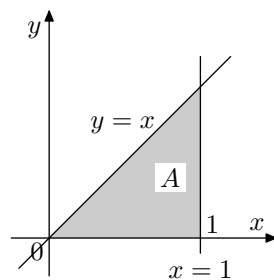


图 13.7 三角区域投影

## 例 13.3.5. 计算积分

$$I = \int_A y^2 dx dy,$$

其中  $A$  是由直线  $2x - y - 1 = 0$  与抛物线  $x = y^2$  所围成的区域.

解. 直线  $2x - y - 1 = 0$  与抛物线  $x = y^2$  的交点为  $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$  和  $(1, 1)$ . 利用向  $y$  轴作投影, 得

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^1 dy \int_{y^2}^{\frac{y+1}{2}} y^2 dx = \int_{-\frac{1}{2}}^1 [\frac{1}{2} y^2 (y+1) - y^4] dy = \frac{63}{640}.$$

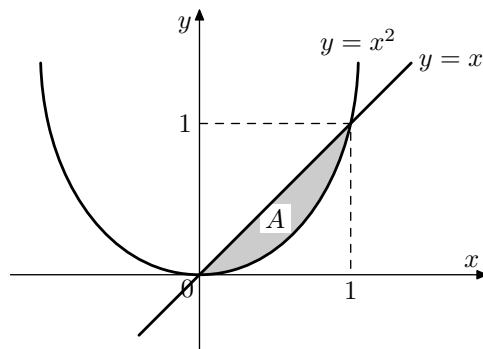
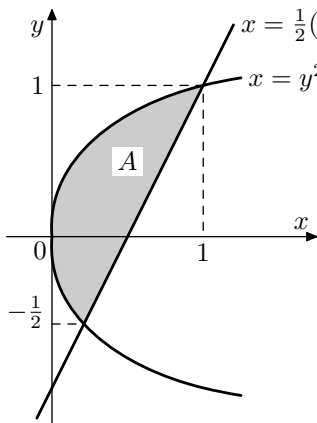


图 13.8 直线和抛物线相交区域的投影

## 例 13.3.6. 计算积分

$$I = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} \frac{\sin x}{x} dx.$$

解. 这个积分必须交换次序才行. 它可以看成连续函数  $\frac{\sin x}{x}$  在由直线  $y = x$  和抛物线  $y = x^2$  所围成的区域上的积分, 因而

$$I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x \frac{\sin x}{x} dy = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} (x - x^2) dx = 1 - \sin 1.$$

**例 13.3.7.** 用投影法求平面上圆的面积.

**解.** 设  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$  为平面上圆心在  $(x_0, y_0)$ , 半径为  $r$  的圆. 向  $x$  轴做投影得区间  $I = [x_0 - r, x_0 + r]$ , 任给  $x \in I$ , 圆所截出的区间长度为  $2\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}$ , 因此圆的面积为

$$\begin{aligned} v &= \int_{x_0-r}^{x_0+r} 2\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} dx \\ &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos^2 \theta d\theta = \pi r^2. \end{aligned}$$

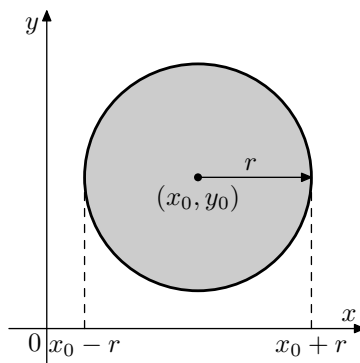


图 13.9 圆盘的投影

**例 13.3.8.** 在区域  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0, x + y \leq a\}$  ( $a > 0$ ) 上计算积分  $\int_A xy \, dx dy$ .

**解.** 被积函数是连续函数, 因此

$$\int_A xy \, dx dy = \int_0^a dx \int_0^{a-x} xy \, dy = \int_0^a \frac{1}{2} x(a-x)^2 dx = \frac{a^4}{24}.$$

**例 13.3.9.** 在如下区域 ( $a > 0$ )

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \geq 0, x + y + z \leq a\}$$

上计算积分  $\int_A xyz \, dx dy dz$ .

**解.** 利用上例, 有

$$\begin{aligned} \int_A xyz \, dx dy dz &= \int_0^a dx \iint_{\substack{y, z \geq 0, \\ y+z \leq a-x}} xyz \, dy dz \\ &= \int_0^a \frac{1}{24} x(a-x)^4 dx = \frac{1}{720} a^6. \end{aligned}$$

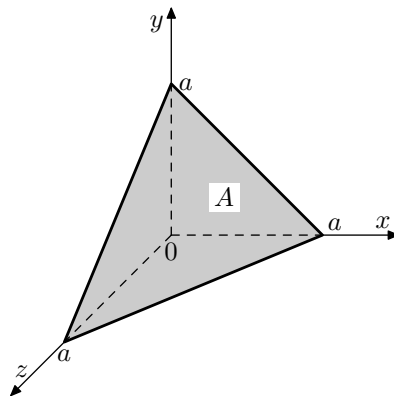


图 13.10 三角面的投影

**例 13.3.10.** 求  $n$  维单形  $\Delta_n(a)$  ( $a > 0$ ) 的体积, 其中

$$\Delta_n(a) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_1 + \dots + x_n \leq a\}.$$

**解.** 被积区域  $\Delta_n(a)$  可以表示为

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_1 \leq a, 0 \leq x_2 \leq a - x_1, \dots, 0 \leq x_n \leq a - x_1 - \dots - x_{n-1}\},$$

因此

$$v(\Delta_n(a)) = \int_0^a dx_1 \int_0^{a-x_1} dx_2 \cdots \int_0^{a-x_1-\dots-x_{n-1}} dx_n.$$



在上式右端中对各个一元积分依次做变量替换

$$y_n = x_1 + \cdots + x_n, \cdots, y_2 = x_1 + x_2, y_1 = x_1,$$

得

$$\begin{aligned} v(\Delta_n(a)) &= \int_0^a dy_1 \int_{y_1}^a dy_2 \cdots \int_{y_{n-1}}^a dy_n \\ &= \int_0^a dy_1 \int_{y_1}^a dy_2 \cdots \int_{y_{n-2}}^a (a - y_{n-1}) dy_{n-1} \\ &= \cdots = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^a (a - y_1)^{n-1} dy_1 \\ &= \frac{a^n}{n!}. \end{aligned}$$

### 习题 13.3

1. 计算下列积分:

(1)  $\int_I \frac{x^2}{1-y^2} dx dy, I = [0, 1] \times [0, 1];$

(2)  $\int_I \sin(x+y) dx dy, I = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}];$

(3)  $\int_A \sin^2 x dx dy, A$  是由  $y=0, x=\sqrt{\pi/2}, y=x$  所围成的区域;

(4)  $\int_A \frac{x^2}{y^2} dx dy, A$  是由  $x=2, y=x$  和  $xy=1$  所围成的区域;

(5)  $\int_A xy^2 dx dy, A$  是由  $y^2=2px, x=p/2 (p>0)$  所围成的区域.

2. 求由平面  $x=0, x=1, y=0, y=2, z=0$  与  $z=xy^2$  所围区域的体积.

3. 求由平面  $x=-1, x=1, y=-1, y=2, z=0$  与  $z=x^2+y^2$  所围区域的体积.

4. 计算曲面  $|x|+|y|+|z|=a (a>0)$  所围成的区域的体积.

5. 求曲面  $z=xy$ , 平面  $z=x+y, x+y=1, x=0, y=0$  所围成区域的体积.

6. 设  $A = \{(x, y, z, w) | x, y, z, w \geq 0, x+y+z+w \leq a\}$ , 计算积分

$$\int_A xyzw dx dy dz dw.$$

7. 如果一元函数  $f, g$  分别在  $[a, b]$  和  $[c, d]$  上可积, 证明

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x)g(y) dx dy = \left[ \int_a^b f(x) dx \right] \left[ \int_c^d g(y) dy \right].$$

8. 设  $f(x, y)$  为  $[a, b] \times [a, b]$  上的连续函数, 证明

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx.$$

9. 设  $f$  为  $[a, b]$  上的可积函数, 证明

$$\int_a^b dx \int_a^x f(y) dy = \int_a^b f(y)(b-y) dy.$$

10. 设  $f$  为  $[a, b]$  上的可积函数, 证明

$$\int_a^b f(x) dx \int_a^x f(y) dy = \frac{1}{2} \left[ \int_a^b f(x) dx \right]^2.$$

11. 设  $f$  为  $[a, b]$  上的可积函数, 证明

$$\int_a^b f(x_1) dx_1 \int_a^{x_1} f(x_2) dx_2 \cdots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n = \frac{1}{n!} \left[ \int_a^b f(x) dx \right]^n.$$

12. 计算下列  $n$  重积分:

$$(1) \int_0^1 x_1 dx_1 \int_0^{x_1} x_2 dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} x_n dx_n; \quad (2) \int_{[0,1]^n} (x_1 + \cdots + x_n)^2 dx_1 \cdots dx_n.$$

13. 在  $[0, 1] \times [0, 1]$  上定义函数  $f(x, y)$  如下:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为无理数,} \\ 3y^2, & x \text{ 为有理数.} \end{cases}$$

证明  $f$  不是二重 Riemann 可积的, 但积分  $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy$  存在.

14. 在  $[0, 1] \times [0, 1]$  上定义函数  $f(x, y)$  如下:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & x, y \text{ 都是或都不是无理数,} \\ \frac{1}{p}, & x \text{ 为有理数, } x = \frac{r}{p}, y \text{ 为无理数,} \\ \frac{1}{q}, & x \text{ 为无理数, } y \text{ 为有理数, } y = \frac{s}{q}. \end{cases}$$

证明  $f$  是二重 Riemann 可积的, 但它的累次积分不存在.

15. 设  $f$  为  $[a, b]$  上的非负函数, 记

$$A_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

证明,  $A_f$  可求面积当且仅当  $f$  可积, 此时  $A_f$  的面积为  $f$  在  $[a, b]$  上的积分.

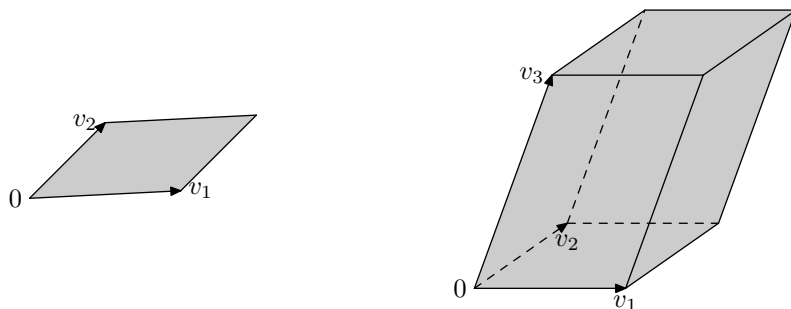


图 13.11 平行多面体的体积

### §13.4 重积分的变量替换

在前一节, 我们介绍了计算重积分的“投影法”, 这个方法可以计算很多重积分. 不过, 这个投影法也有局限性: 只能向坐标轴或坐标面做投影. 一个自然的问题就是能否向任意方向做投影得到计算公式? 比如, 考虑下面的简单图形:

$$P(v_1, v_2, \dots, v_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i v_i \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n. \right\} \quad (13.1)$$

其中  $v_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 为  $\mathbb{R}^n$  中的向量. 当  $n = 2$  且  $v_1, v_2$  线性无关时,  $P(v_1, v_2)$  为平面上的平行四边形. 如果这个平行四边形有一条边和坐标轴平行, 则用投影法可以得出其面积公式. 一般的情形如何处理? 这是我们在本节要讨论的问题.

#### §13.4.1 仿射变换

(1) 平移变换. 设  $v_0 \in \mathbb{R}^n$  为固定的向量, 考虑仿射线性变换  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\varphi(x) = x + v_0$ . 根据矩形体积的平移不变性容易知道, 如果  $A \subset \mathbb{R}^n$  可求体积, 则  $\varphi(A)$  也是可求体积的, 并且体积不变, 这可称为体积的平移不变性.

(2) 伸缩变换. 设  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 考虑线性映射  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n), \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

矩形  $I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$  在  $\varphi$  下的像仍为矩形 (可以退化), 其体积为

$$v(\varphi(I)) = |\lambda_1| \cdots |\lambda_n| v(I) = |\det(\varphi)| v(I).$$

将矩形  $I$  换成一般的可求体积的图形, 上述公式仍然成立, 这可从下面的覆盖引理看出.

**引理 13.4.1** (覆盖引理之一). 设  $\Omega$  为  $\mathbb{R}^n$  中可求体积的有界集合, 则任给  $\varepsilon > 0$ , 存在有限个矩形  $\{I_i\}$  与  $\{J_j\}$ , 使得

$$\bigcup_i I_i \subset \Omega, \quad \sum_i v(I_i) > v(\Omega) - \varepsilon; \quad \bigcup_j J_j \supset \Omega, \quad \sum_j v(J_j) < v(\Omega) + \varepsilon,$$

其中  $\{I_i\}$  的内部互不相交.

**证明.** 取包含  $\Omega$  的矩形  $I$ , 由体积的定义, 有

$$\int_I \chi_\Omega = v(\Omega).$$

因此, 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $I$  的分割  $\pi = \{I_{ij}\}$ , 使得

$$\left| \sum_{ij} \chi_\Omega(\xi_{ij}) v(I_{ij}) - v(\Omega) \right| < \varepsilon, \quad \forall \xi_{ij} \in I_{ij}.$$

根据特征函数的定义, 显然有

$$\sum_{ij} \inf_{\xi_{ij} \in I_{ij}} \chi_\Omega(\xi_{ij}) v(I_{ij}) = \sum_{I_{ij} \subset \Omega} v(I_{ij}),$$

因此, 对于分割  $\pi$  就有

$$v(\Omega) - \varepsilon < \sum_{I_{ij} \subset \Omega} v(I_{ij}) \leq v(\Omega).$$

同理

$$\sum_{ij} \sup_{\xi_{ij} \in I_{ij}} \chi_\Omega(\xi_{ij}) v(I_{ij}) = \sum_{I_{ij} \cap \Omega \neq \emptyset} v(I_{ij}),$$

此时有

$$v(\Omega) \leq \sum_{I_{ij} \cap \Omega \neq \emptyset} v(I_{ij}) < v(\Omega) + \varepsilon.$$

这就证明了引理.  $\square$

**注.** 从证明可以看出, 那些内部与  $\partial\Omega$  有非空交的矩形的体积之和不超  $2\varepsilon$ , 由于  $\partial\Omega$  包含于这些矩形以及其它矩形边界的并集之中, 因此这给出了可求体积的有界集合的边界必为零体积集的另一证明. 同时, 也可以看出伸缩变换将可求体积的集合变为可求体积的集合.

**例 13.4.1.** 求  $n$  维单形

$$\Delta_n(a) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \\ x_1 + \dots + x_n \leq a\} \quad (a > 0)$$

的体积.

**解.** 这个例子我们在前节算过, 现在用递推的办法再算一次. 利用伸缩变换  $\varphi(x) = ax$  易见

$$v(\Delta_n(a)) = v(\Delta_n(1))a^n.$$

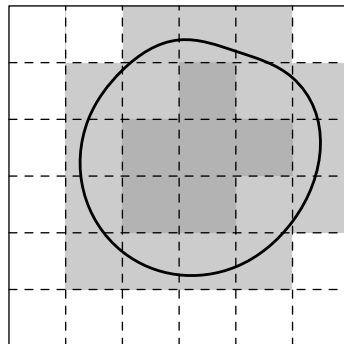


图 13.12 覆盖引理之一

为了简单起见, 记  $v(\Delta_n(1)) = v_n$ , 我们只要求出  $v_n$  就可以了. 利用投影法, 有

$$v_{n+1} = \int_0^1 v(\Delta_n(1-x_1)) dx_1 = v_n \int_0^1 (1-x_1)^n dx_1 = \frac{1}{n+1} v_n,$$

由  $v_1 = 1$  以及上述递推式即得

$$v_n = \frac{1}{n!}, \quad \forall n \geq 1.$$

因此  $v(\Delta_n(a)) = \frac{1}{n!} a^n$ , 这和上节的计算结果一致.  $\square$

**例 13.4.2.** 求中心在  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , 半径为  $r$  的  $n$  维球体

$$\bar{B}_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x - x_0) \cdot (x - x_0) \leq r^2\}$$

的体积.

**解.** 根据体积的平移不变性, 不妨设  $x_0$  为原点. 半径为  $r$  的  $n$  维球体的体积记为  $\omega_n(r)$ . 利用伸缩变换可知  $\omega_n(r) = \omega_n(1)r^n$ , 为了简单起见, 记  $\omega_n = \omega_n(1)$ . 利用投影法, 得

$$\begin{aligned} \omega_{n+1} &= \int_{-1}^1 \omega_n(\sqrt{1-x_1^2}) dx_1 \\ &= \omega_n \int_{-1}^1 (1-x_1^2)^{n/2} dx_1 \\ &= 2\omega_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} t dt = 2\omega_n J_{n+1}. \end{aligned}$$

其中,  $J_{n+1}$  在第六章第三节中已经计算过:

$$J_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{\pi}{2}, \quad J_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, \quad \forall k \geq 0.$$

根据  $\omega_1 = 2$  以及上述递推公式可得

$$\omega_1 = 2, \quad \omega_2 = \pi, \quad \omega_{n+2} = \omega_n \frac{2\pi}{n+2}, \quad n \geq 1.$$

由此进一步得到

$$\omega_{2k} = \frac{(2\pi)^k}{(2k)!!} = \frac{\pi^k}{k!}, \quad \omega_{2k-1} = \frac{2^k \pi^{k-1}}{(2k-1)!!}, \quad k \geq 1. \quad (13.2)$$

**例 13.4.3.** 设  $a_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 为正实数, 求椭球

$$\left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n^2} \leq 1 \right\}$$

的体积.

**解.** 利用伸缩变换  $x_i = a_i t_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 可得椭球体积为  $(a_1 a_2 \cdots a_n) \omega_n$ , 其中  $\omega_n$  是上例中的  $n$  维单位球的体积.  $\square$

(3) 正交变换. 设  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  为正交变换, 在  $\mathbb{R}^n$  的标准基  $\{e_i\}$  下  $\varphi$  表示为

$$\varphi(e_1, e_2, \cdots, e_n) = (e_1, e_2, \cdots, e_n)A,$$

其中  $A$  为正交矩阵, 即

$$AA^T = A^T A = I_n \quad (I_n \text{ 为单位方阵}).$$

我们将说明正交变换保持体积不变.

**引理 13.4.2** (覆盖引理之二). 设  $\Omega$  为  $\mathbb{R}^n$  中可求体积的有界集合, 则任给  $\varepsilon > 0$ , 存在有限个  $n$  维球体  $\{B_i\}$  与  $\{B^j\}$ , 使得

$$\bigcup_i B_i \subset \Omega, \quad \sum_i v(B_i) > v(\Omega) - \varepsilon; \quad \bigcup_j B^j \supset \Omega, \quad \sum_j v(B^j) < v(\Omega) + \varepsilon,$$

其中  $\{B_i\}$  的内部互不相交.

**证明.** 先设  $v(\Omega) > 0$ . 与引理 13.4.1 的证明类似, 先取矩形  $I = [a, b]^n$  使得  $\Omega \subset I$ . 将  $I$  作  $m^n$  等分, 当  $m$  充分大时, 完全包含于  $\Omega$  的小矩形  $\{I_i^1\}$  的体积之和满足条件

$$\sum_i v(I_i^1) > \frac{1}{2} v(\Omega).$$

矩形  $I_i^1$  的内接球记为  $B_i^1$ , 则根据前面例子中球体的体积公式, 有

$$\sum_i v(B_i^1) = \frac{\omega_n}{2^n} \sum_i v(I_i^1) > \frac{\omega_n}{2^{n+1}} v(\Omega).$$

记

$$q = 1 - \frac{\omega_n}{2^{n+1}},$$

则  $0 < q < 1$ , 且

$$0 < v(\Omega - \bigcup_i B_i^1) < q \cdot v(\Omega).$$

对  $\Omega - \bigcup_i B_i^1$  重复上述过程, 可得包含于  $\Omega - \bigcup_i B_i^1$  的有限个球体  $\{B_{i'}^2\}$ , 使得

$$0 < v(\Omega - \bigcup_i B_i^1 - \bigcup_{i'} B_{i'}^2) < q \cdot v(\Omega - \bigcup_i B_i^1) < q^2 \cdot v(\Omega).$$

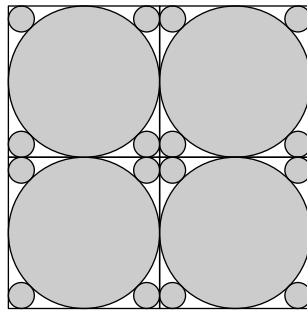


图 13.13 覆盖引理之二

继续重复这一过程, 由于  $q^k \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ), 对任给的  $\varepsilon > 0$ , 就得到内部互不相交的有限个  $n$  维球体  $\{B_i\}$ , 使得 ( $k$  充分大)

$$0 < v(\Omega - \bigcup_i B_i) < q^k \cdot v(\Omega) < \min\left\{\frac{1}{n^{\frac{n}{2}}\omega_n}, 1\right\}\varepsilon.$$

现在, 对于  $\Omega' = \Omega - \bigcup_i B_i$ , 仍然考虑矩形  $I$  的  $m^n$  等分, 当  $m$  充分大时, 存在覆盖  $\Omega'$  的小矩形  $\{I^j\}$ , 使得

$$\sum_j v(I^j) < v(\Omega') + \frac{1}{n^{\frac{n}{2}}\omega_n}\varepsilon,$$

矩形  $I^j$  的外接球记为  $B_2^j$ , 则

$$\sum_j v(B_2^j) = \frac{\omega_n n^{\frac{n}{2}}}{2^n} \sum_j v(I^j) < \frac{n^{\frac{n}{2}}\omega_n}{2^n} (v(\Omega') + \frac{1}{n^{\frac{n}{2}}\omega_n}\varepsilon) < \varepsilon.$$

这说明  $\{B_i, B_2^j\}$  是覆盖  $\Omega$  的  $n$  维球, 它们的体积之和满足引理的要求.

最后一段的证明对于  $v(\Omega) = 0$  的情形也适用, 这样就完全证明了引理.  $\square$

**推论 13.4.3.** 正交变换保持体积不变.

**证明.** 注意到正交变换将  $n$  维球映为  $n$  维球, 且球的半径不变 (从而体积不变). 特别地, 根据覆盖引理, 正交变换将零体积集映为零体积集. 再注意到正交变换将集合的边界点映为边界点, 内点映为内点, 因此将可求体积的集合映为可求体积的集合. 再由覆盖引理以及正交变换保持球体体积不变即知正交变换保持可求体积集合的体积不变.  $\square$

**例 13.4.4.** 设  $A$  为  $n$  阶正定对称实方阵, 求椭球

$$E_A = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid xAx^T \leq 1\}$$

的体积.

**解.** 我们知道, 正定对称方阵可以对角化, 即存在正交方阵  $O$ , 使得

$$A = O \cdot \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \cdot O^T, \quad \lambda_i > 0 \quad (1 \leq i \leq n).$$

利用正交变换  $y = xO$ , 椭球  $E_A$  的体积与下面的标准椭球

$$\{y \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 = y \cdot \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \cdot y^T \leq 1\}$$

体积相同, 根据前面的例子即知它的体积为

$$v(E_A) = \omega_n (\lambda_1)^{-\frac{1}{2}} \cdots (\lambda_n)^{-\frac{1}{2}} = \omega_n (\det A)^{-\frac{1}{2}}.$$

一般地, 如果  $P$  为正定对称矩阵, 作为线性变换, 它把可求体积的集合  $\Omega$  映为可求体积的集合  $P(\Omega)$ , 且

$$v(P(\Omega)) = (\det P)v(\Omega),$$

这个等式的证明和上例类似, 结合正交变换以及伸缩变换的结果即可.

(4) 一般的线性变换. 设  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  为线性映射, 在  $\mathbb{R}^n$  的标准基下可表示为  $n$  阶方阵  $A$ . 下面为了简单起见我们有时不区分  $\varphi$  和  $A$ . 设  $\Omega$  为  $\mathbb{R}^n$  中可求体积的有界集合, 我们考虑集合  $A(\Omega)$ . 首先, 如果  $\varphi$  是退化的 ( $\det A = 0$ ), 则  $A(\Omega)$  含于  $\mathbb{R}^n$  的某个超平面中, 从而必为零体积集. 因此下面假设  $\det A \neq 0$ , 此时  $AA^T$  为正定对称方阵, 从而可以对角化, 且特征值均大于零, 这说明  $AA^T$  可以写为

$$AA^T = P^2,$$

其中  $P$  也是正定对称方阵,  $\det P = |\det A|$ . 记  $O = P^{-1}A$ , 则上式表明  $O$  是正交矩阵, 特别地,  $A(\Omega) = P(O(\Omega))$  可求体积, 且

$$v(A(\Omega)) = v(P(O(\Omega))) = (\det P)v(O(\Omega)) = (\det P)v(\Omega),$$

即

$$v(A(\Omega)) = |\det A|v(\Omega). \quad (13.3)$$

现在我们可以解决本节开头所提出的问题了.

**例 13.4.5.** 设  $\{v_i\}_{i=1}^n$  为  $\mathbb{R}^n$  中的向量, 求平行多面体

$$P(v_1, \dots, v_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i v_i \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n. \right\}$$

的体积.

**解.** 记  $\mathbb{R}^n$  的标准基为  $\{e_i\}_{i=1}^n$ , 考虑线性映射  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $A(e_i) = v_i$ . 则显然有

$$\begin{aligned} P(v_1, \dots, v_n) &= \left\{ \sum_{i=1}^n x_i v_i \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n. \right\} \\ &= \left\{ A\left( \sum_{i=1}^n x_i e_i \right) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n. \right\} \\ &= A(P(e_1, \dots, e_n)). \end{aligned}$$

而  $P(e_1, \dots, e_n) = [0, 1]^n$ , 因此, 由 (13.3) 式得

$$v(P(v_1, \dots, v_n)) = |\det A|v([0, 1]^n) = |\det A|.$$



例如, 当  $n = 2$ ,  $v_1 = (a_1, b_1)$ ,  $v_2 = (a_2, b_2)$  时,

$$v(P(v_1, v_2)) = |a_1 b_2 - a_2 b_1|,$$

这是平行四边形的面积公式. □

**例 13.4.6.** 设  $\{v_i\}_{i=1}^n$  为  $\mathbb{R}^n$  中的向量, 求单形

$$S(v_1, \dots, v_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i v_i \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0 \ (1 \leq i \leq n), \ x_1 + \dots + x_n \leq 1 \right\}$$

的体积.

**解.** 与上例类似, 考虑线性映射  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $A(e_i) = v_i$ , 则

$$S(v_1, \dots, v_n) = A(\Delta_n(1)),$$

其中  $\Delta_n(1)$  是标准单形. 因此由 (13.3) 式以及前面的例子得

$$v(S(v_1, \dots, v_n)) = |\det A| v(\Delta_n(1)) = \frac{1}{n!} |\det A|.$$

**例 13.4.7.** 设  $r > 0$ , 求椭球

$$E_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx \leq r^2\}$$

的体积.

**解.** 我们可以改写  $E_r$  为

$$E_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 \leq 2r^2\},$$

考虑线性变换  $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ :

$$A(x, y, z) = (x+y, y+z, z+x),$$

则  $A(E_r)$  是半径为  $\sqrt{2}r$  的三维球, 故

$$v(E_r) = |\det A|^{-1} \frac{4}{3} \pi (\sqrt{2}r)^3 = \frac{4}{3} \sqrt{2} \pi r^3.$$

### §13.4.2 一般的变量替换

现在我们考虑比仿射线性变换更一般的映射, 看看可求体积的集合在这些映射下如何变化. 设  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  为 Lipschitz 映射, 即存在常数  $L$ , 使得

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq L \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

我们有

**引理 13.4.4.** 设  $\varphi$  为如上的 Lipschitz 映射,  $A \subset \mathbb{R}^n$  为可求体积的集合. 如果  $\varphi(A)$  可求体积, 则

$$v(\varphi(A)) \leq L^n \cdot v(A).$$

特别地,  $\varphi$  将零体积集映为零体积集.

**证明.** 根据覆盖引理 13.4.2, 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在覆盖  $A$  的  $n$  维球体  $\{B^j\}$ , 使得

$$\sum_j v(B^j) < v(A) + \varepsilon.$$

设  $B^j$  以  $x_j$  为中心, 以  $r_j$  为半径, 则由

$$|\varphi(x) - \varphi(x_j)| \leq L\|x - x_j\| \leq Lr_j, \quad \forall x \in B^j$$

知,  $\varphi(B^j)$  包含在以  $\varphi(x_j)$  为中心, 以  $Lr_j$  为半径的  $n$  维球中. 因为  $\varphi(A) \subset \bigcup_j \varphi(B^j)$ , 故有

$$v(\varphi(A)) \leq \sum_j \omega_n (Lr_j)^n = L^n \sum_j v(B^j) < L^n \cdot v(A) + L^n \varepsilon,$$

由  $\varepsilon$  的任意性即知  $v(\varphi(A)) \leq L^n \cdot v(A)$ . 特别地, 从上式还可以看出, 如果  $A$  为零体积集, 则  $\varphi(A)$  也是零体积集.  $\square$

**注.** 从证明可以看出, 对于局部的 Lipschitz 映射也有类似的结果.

连续可微的映射是一类自然的 (局部) Lipschitz 映射. 为此, 设  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  为连续可微映射, 则  $\varphi$  将零体积集映为零体积集. 如果  $\varphi$  在  $x_0$  处非退化, 则根据逆映射定理,  $\varphi$  在  $x_0$  附近可逆, 且逆映射也是连续可微的. 特别地,  $\varphi$  将  $x_0$  附近的内点映为内点, 因此将  $x_0$  附近的可求体积的集合映为可求体积的集合.

我们来看体积在映射  $\varphi$  的作用下如何变化. 记  $L(x) = \varphi(x_0) + J\varphi(x_0)(x - x_0)$  为仿射线性变换,  $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - L(x)$ , 则  $J(\tilde{\varphi})(x_0) = 0$ . 根据连续可微性, 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得

$$\|J(\tilde{\varphi})(x)\| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in B_\delta(x_0).$$

由拟微分中值定理, 有

$$\|\tilde{\varphi}(x) - \tilde{\varphi}(y)\| \leq \|J(\tilde{\varphi})(\xi)\| \cdot \|x - y\| \leq \varepsilon \|x - y\|, \quad \forall x, y \in B_\delta(x_0).$$

我们可以假设  $\varphi$  在  $B_\delta(x_0)$  上可逆, 其逆映射记为  $\varphi^{-1}$ . 上式表明,

$$\|\varphi \circ L^{-1}(x) - \varphi \circ L^{-1}(y)\| \leq (1 + \|L^{-1}\|\varepsilon)\|x - y\|, \quad \forall x, y \in L(B_\delta(x_0)),$$

其中  $L^{-1}$  是  $L$  的逆映射, 其范数为矩阵范数. 同理也有

$$\|L \circ \varphi^{-1}(x) - L \circ \varphi^{-1}(y)\| \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{\|L\|}\right)\|x - y\|, \quad \forall x, y \in \varphi(B_\delta(x_0)).$$

设  $A \subset B_\delta(x_0)$  为可求体积的集合, 则由引理 13.4.4 得

$$\begin{aligned} v(\varphi(A)) &= v(\varphi \circ L^{-1}(L(A))) \leq (1 + \varepsilon \|L^{-1}\|)^n v(L(A)) \\ &= (1 + \varepsilon \|L^{-1}\|)^n |\det J\varphi(x_0)| v(A), \end{aligned}$$

同理,

$$|\det J\varphi(x_0)| v(A) = v(L(A)) = v(L \circ \varphi^{-1}(\varphi(A))) \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{\|L\| - \varepsilon}\right)^n v(\varphi(A)),$$

总之可以得到下面的估计 (适当调整  $\varepsilon$ ):

$$|v(\varphi(A)) - |\det J\varphi(x_0)| \cdot v(A)| \leq \varepsilon \cdot v(A). \quad (13.4)$$

由此得到 (13.3) 式的如下非线性推广

**引理 13.4.5.** 设  $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  为  $C^1$  映射, 如果  $\varphi$  为单射, 且  $J\varphi$  非退化, 则对可求体积的有界集合  $A$  ( $\bar{A} \subset \Omega$ ),  $\varphi(A)$  也是可求体积的, 且

$$v(\varphi(A)) = \int_A |\det J\varphi|.$$

**证明.** 利用 (13.4) 即可, 略. □

**定理 13.4.6** (重积分的变量替换). 设  $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  为  $C^1$  单射, 且  $J\varphi$  非退化. 设  $A$  为可求体积的有界集合,  $\bar{A} \subset \Omega$ ,  $f: \varphi(A) \rightarrow \mathbb{R}$  为连续函数, 则

$$\int_{\varphi(A)} f = \int_A f \circ \varphi |\det J\varphi|. \quad (13.5)$$

**证明.** 由题设以及逆映射定理知  $\varphi: \Omega \rightarrow \varphi(\Omega)$  为可逆的连续可微映射, 其逆映射也是连续可微的. 因此  $\partial\varphi(A) \subset \varphi(\partial A)$ , 因为  $\partial A \subset \Omega$  是零体积集, 故  $\varphi(\partial A)$  也是零体积集, 从而  $\varphi(A)$  是可求体积的有界集合.

根据覆盖引理, 为了简单起见, 不妨设  $A$  是一个矩形. 任给  $A$  的分割  $\pi = \{A_{ij}\}$ , 由引理 13.4.5 以及积分中值定理, 有

$$\begin{aligned} \int_A f \circ \varphi |\det J\varphi| &= \sum_{ij} \int_{A_{ij}} f \circ \varphi |\det J\varphi| \\ &= \sum_{ij} f \circ \varphi(\xi_{ij}) \int_{A_{ij}} |\det J\varphi| \\ &= \sum_{ij} f \circ \varphi(\xi_{ij}) v(\varphi(A_{ij})) \\ &= \int_{\varphi(A)} f + \sum_{ij} \int_{\varphi(A_{ij})} [f(\varphi(\xi_{ij})) - f]. \end{aligned}$$

根据  $f$  在  $\varphi(A)$  上的 (一致) 连续性, 当  $\|\pi\| \rightarrow 0$  时上式最后一项趋于零, 从而 (13.5) 得证.  $\square$

注. 当  $f$  在  $\varphi(A)$  上 Riemann 可积时定理也成立, 读者可与一元函数积分的变量替换公式相比较.

例 13.4.8. 设  $A$  是由  $x = 0$ ,  $y = 0$  以及  $x + y = 1$  围成的区域, 计算积分

$$I = \int_A e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy.$$

解. 积分区域是一个三角形, 被积函数在  $A - \{(0, 0)\}$  上连续, 在  $A$  上有界. 我们用线性变换简化被积函数, 令  $x - y = u$ ,  $x + y = v$ , 解出

$$x = \frac{1}{2}(u + v), \quad y = \frac{1}{2}(v - u),$$

$(x, y)$  关于  $(u, v)$  的 Jacobi 行列式为

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.$$

在这个线性变换下, 被积区域变为如下三角形区域

$$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u + v \geq 0, v - u \geq 0, v \leq 1\}.$$

因此

$$\begin{aligned} I &= \int_D e^{\frac{u}{v}} \cdot \left| \frac{1}{2} \right| du dv = \frac{1}{2} \int_0^1 dv \int_{-v}^v e^{\frac{u}{v}} du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 v(e - e^{-1}) dv = \frac{1}{4}(e - e^{-1}). \end{aligned}$$

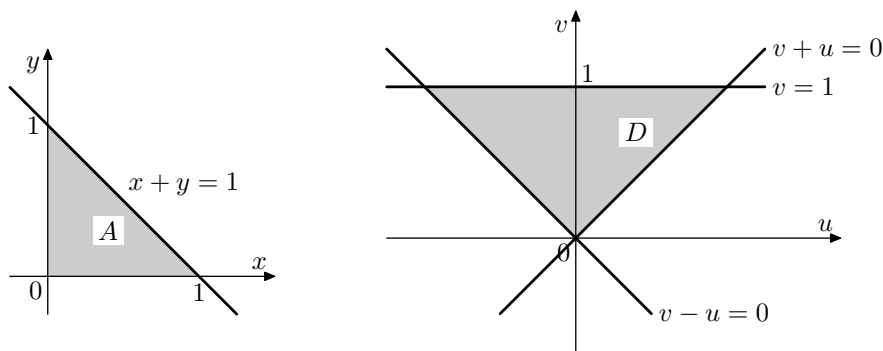


图 13.14 线性变换

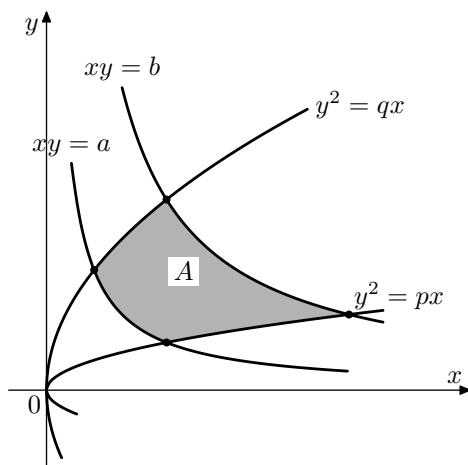


图 13.15 曲边四边形

**例 13.4.9.** 设  $0 < p < q$ ,  $0 < a < b$ . 抛物线  $y^2 = px$ ,  $y^2 = qx$  以及双曲线  $xy = a$ ,  $xy = b$  围成的区域记为  $A$ . 计算积分

$$I = \int_A xy \, dx dy.$$

**解.** 积分区域是一个曲边的四边形, 为了简化, 我们令  $y^2/x = u$ ,  $xy = v$ , 则  $(u, v)$  关于  $(x, y)$  的 Jacobi 行列式为

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} -y^2/x^2 & 2y/x \\ y & x \end{vmatrix} = -3y^2/x = -3u,$$

因此  $(x, y)$  关于  $(u, v)$  的 Jacobi 行列式为  $-(3u)^{-1}$ . 在这个变换下, 积分区域变为矩形  $[p, q] \times [a, b]$ , 因此

$$I = \int_p^q du \int_a^b v |-(3u)^{-1}| dv = \frac{1}{6} (b^2 - a^2) \ln \frac{q}{p}.$$

### §13.4.3 极坐标变换

我们知道, 在平面  $\mathbb{R}^2$  上有直角坐标  $(x, y)$  和极坐标  $(r, \theta)$ , 其变换关系为

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

这个变换称为极坐标变换, 其 Jacobi 行列式为

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r.$$

这个变换将  $(r, \theta)$  平面上的矩形  $[0, R] \times [0, 2\pi]$  变为  $(x, y)$  平面上的圆  $x^2 + y^2 \leq R^2$ . 不过, 这个变换不是一一的, 且在  $r = 0$  处退化. 尽管如此, 由于此变换在

$(0, +\infty) \times (0, 2\pi)$  上是一一的且非退化, 因此将定理 13.4.6 的证明略作改动即知, 积分的变量替换公式对这个变换仍然成立.

**例 13.4.10.** 在圆  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$  上计算积分

$$I = \int_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

**解.** 这个积分用直角坐标是不好计算的. 我们用极坐标变换, 则有

$$I = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\theta = 2\pi \int_0^R e^{-r^2} r dr = \pi(1 - e^{-R^2}).$$

**例 13.4.11.** 球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$  被柱面  $x^2 + y^2 = ax$  所截, 求截出部分的体积.

**解.** 根据截出图形的对称性, 只要考虑第一象限部分  $(0, 0, a)$  的体积即可, 这一部分的体积是函数  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  在半圆

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0, x^2 + y^2 \leq ax\}$$

上的积分, 因此体积  $V$  可以用极坐标变换  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  计算如下

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} \sqrt{a^2 - r^2} r dr \\ &= \frac{4}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \theta) d\theta = \frac{4}{3} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) a^3. \end{aligned}$$

有时, 伸缩变换和极坐标变换可以结合起来使用.

**例 13.4.12.** 求椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a, b > 0$ ) 所包围的面积.

**解.** 作广义极坐标变换

$$x = ar \cos \theta, \quad y = br \sin \theta, \quad r \in [0, 1], \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

其 Jacobi 行列式为

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} a \cos \theta & -ar \sin \theta \\ b \sin \theta & br \cos \theta \end{vmatrix} = abr,$$

因此所求面积为

$$\int_0^1 dr \int_0^{2\pi} abr d\theta = \pi ab.$$

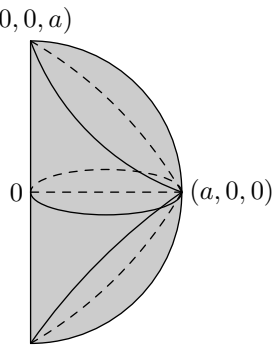


图 13.16 球体与柱面

下面考虑  $\mathbb{R}^3$  中的一些特殊的坐标变换. 首先有如下的柱面坐标变换:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z,$$

其 Jacobi 行列式也是  $r$ .

**例 13.4.13.** 设  $D$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  与抛物面  $x^2 + y^2 = 3z$  所围成的区域. 计算积分

$$I = \int_D z \, dx \, dy \, dz.$$

**解.** 用柱面坐标变换, 区域  $D$  变为

$$A = \{(r, \theta, z) \mid r^2 + z^2 \leq 4, \quad r^2 \leq 3z\},$$

$A$  在  $(r, \theta)$  平面上的投影为区域  $\{0 \leq r \leq \sqrt{3}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ . 固定  $(r, \theta)$ ,  $z$  的变化范围为区间  $[\frac{1}{3}r^2, \sqrt{4-r^2}]$ , 因此所求积分为

$$I = \int_A r z \, dr \, d\theta \, dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} r \, dr \int_{\frac{1}{3}r^2}^{\sqrt{4-r^2}} z \, dz = \frac{13}{4}\pi.$$

与极坐标变换类似,  $\mathbb{R}^3$  中也有所谓的球面坐标变换:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta, \quad r \geq 0, \quad \theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

这个变换的 Jacobi 行列式为

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta.$$

球面坐标和伸缩变换结合起来称为广义球面坐标变换.

**例 13.4.14.** 设  $D$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  和锥面  $\sqrt{x^2 + y^2} = z$  围成的区域, 计算积分

$$I = \int_D (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz.$$

**解.** 用球面坐标变换, 区域  $D$  变为

$$A = \{(r, \theta, \varphi) \mid 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{1}{4}\pi\},$$

因此

$$I = \int_A r^2 \cdot |r^2 \sin \theta| \, dr \, d\theta \, d\varphi = \int_0^R r^4 \, dr \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi}{5}(2 - \sqrt{2})R^5.$$

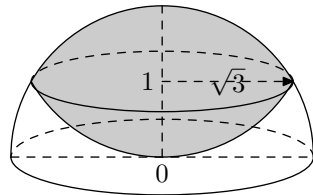


图 13.17 球体与抛物面

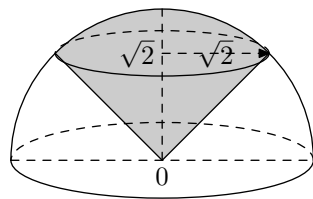


图 13.18 球体与锥面

**例 13.4.15.** 计算椭球  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$  ( $a, b, c > 0$ ) 的体积.

**解.** 用广义球面坐标变换:

$$x = ar \sin \theta \cos \varphi, \quad y = br \sin \theta \sin \varphi, \quad z = cr \cos \theta,$$

此变换的 Jacobi 行列式为  $abcr^2 \sin \theta$ , 积分区域变为

$$\{(r, \theta, \varphi) \mid r \in [0, 1], \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]\},$$

因此椭球体积为

$$V = \int_0^1 dr \int_0^\pi abcr^2 \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4}{3} \pi abc.$$

这几个利用极坐标或球面坐标计算的例子与前面的计算结果是一致的.

一般地, 在  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 3$ ) 中也有球面坐标变换

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \theta_1, \\ x_2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2, \\ x_3 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3, \\ \dots\dots\dots \\ x_{n-1} = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1}, \\ x_n = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1}, \end{cases}$$

此变换将矩形

$$0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \theta_1, \dots, \theta_{n-2} \leq \pi, \quad 0 \leq \theta_{n-1} \leq 2\pi,$$

变为半径为  $R$  的  $n$  维 (闭) 球. 利用归纳法可以算出此变换的 Jacobi 行列式为

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})} = r^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2}.$$

如果用球面坐标计算  $n$  维单位球的体积, 则有

$$\omega_n = \int_0^1 r^{n-1} dr \int_{A_n} \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2} d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_{n-1},$$

其中

$$A_n = \{(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) \mid 0 \leq \theta_1, \dots, \theta_{n-2} \leq \pi, \quad 0 \leq \theta_{n-1} \leq 2\pi\},$$

因此有

$$\int_{A_n} \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2} d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_{n-1} = n\omega_n, \quad (13.6)$$

这个等式在用球面坐标计算时可以利用. 以后我们将知道  $n\omega_n$  是  $n-1$  维球面的面积.



例 13.4.16. 在四维球体  $B: x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \leq 1$  内计算函数  $x^2$  的积分.

解. 根据对称性, 有

$$\int_B x^2 dx dy dz dw = \frac{1}{4} \int_B (x^2 + y^2 + z^2 + w^2) dx dy dz dw,$$

再利用四维的球面坐标以及 (13.6) 式, 得

$$\int_B x^2 dx dy dz dw = \frac{1}{4} \int_0^1 r^5 4\omega_4 dr = \frac{1}{6} \omega_4 = \frac{1}{12} \pi^2.$$

### 习题 13.4

1. 证明伸缩变换将可求体积的有界集合变为可求体积的有界集合.
2. 试说明, 定义  $\mathbb{R}^n$  中的零测集时, 可以用  $n$  维开球或闭球代替矩形.
3. 设  $A$  为可求体积的有界集合. 如果  $v(A) > 0$ , 则存在内部互不相交的一列  $n$  维球  $\{B_i\}$ , 使得

$$v(A) = \sum_{i \geq 1} v(B_i).$$

4. 设  $I$  为矩形,  $\varepsilon > 0$ , 如果  $D$  为  $I$  中的子集, 且  $D$  中任意两点的距离不小于  $\varepsilon$ , 则  $D$  中只有有限多个元素, 并估计元素个数的上界. (考虑以  $D$  中点为中心的小球, 估算体积.)
5. 求椭圆

$$(a_1x + b_1y + c_1)^2 + (a_2x + b_2y + c_2)^2 = 1$$

所包围的面积, 其中  $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ .

6. 设  $0 < p < q$ ,  $0 < a < b$ , 求直线  $x + y = p$ ,  $x + y = q$  和  $y = ax$ ,  $y = bx$  所围区域的面积.
7. 计算积分  $\int_{\Delta_n(a)} x_1 x_2 \cdots x_n dx_1 dx_2 \cdots dx_n$ , 其中  $\Delta_n(a)$  为  $n$  维单形.
8. 计算下列区域的面积或体积 ( $a > 0$ ):

$$(1) \{|x| + |y| \leq a\}; \quad (2) \{|x| + |y| + |z| \leq a\}, \quad (3) \{|x_1| + \cdots + |x_n| \leq a\}.$$

9. 设  $0 < p < q$ ,  $0 < a < b$ , 求抛物线  $y^2 = px$ ,  $y^2 = qx$  和  $x^2 = ay$ ,  $x^2 = by$  所围区域的面积.

10. 计算下列积分:

- (1)  $\int_A (x-y)dxdy$ ,  $A$  由曲线  $y^2 = 2x$ ,  $x+y=4$ ,  $x+y=12$  围成;
- (2)  $\int_A (x^2+y^2)dxdy$ ,  $A$  由曲线  $x^2-y^2=1$ ,  $x^2-y^2=2$ ,  $xy=1$ ,  $xy=2$  围成;
- (3)  $\int_A (x-y^2)dxdy$ ,  $A$  由曲线  $y=2$ ,  $y^2-y-x=0$ ,  $y^2+2y-x=0$  围成.
- (4) 曲线  $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ ,  $x=0$ ,  $y=0$  所围成区域的面积;

11. 计算下列积分

- (1)  $\int_A (x^2+y^2)dxdy$ ,  $A = \{(x-a)^2+y^2 \leq a^2\}$ ;
- (2)  $\int_A (x^2+y^2)dxdydz$ ,  $A$  由  $x^2+y^2=2z$  与  $z=2$  围成;
- (3)  $\int_A \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} dxdy$ ,  $A = \{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ ;
- (4)  $\int_A (x+y)dxdy$ ,  $A = \{x^2+y^2 \leq x+y\}$ ;
- (5) 曲线  $(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})^2 = \frac{xy}{c^2}$  所围成的面积.

12. 求下列曲面所围区域的体积;

- (1)  $(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2})^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ ;
- (2)  $(x^2+y^2+z^2)^2 = az$ ,  $a > 0$ ;
- (3)  $x^2+z^2=a^2$ ,  $|x|+|y|=a$ ;
- (4)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z}{c} = 1$ ,  $z=0$ .

13. 计算下列积分:

- (1)  $\int_A \sqrt{x^2+y^2+z^2} dxdydz$ ,  $A = \{x^2+y^2+z^2 \leq a^2\}$ ;
- (2)  $\int_A (x^2+y^2) dxdydz$ ,  $A = \{r^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$ ;
- (3)  $\int_A \sqrt{1 - (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2})} dxdydz$ ,  $A = \{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$ .

14. 设  $f(u)$  为连续函数, 证明

$$\iint_{|x|+|y|\leq 1} f(x+y)dxdy = \int_{-1}^1 f(u)du.$$

15. 设  $f(u)$  为连续函数, 证明

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(ax+by) dx dy = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2} f(ku) du,$$

其中  $k = \sqrt{a^2+b^2}$ .

16. 设  $f(u)$  连续,  $a, b, c$  为常数, 证明

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} f(ax+by+cz) dx dy dz = \pi \int_{-1}^1 (1-u^2) f(ku) du,$$

其中  $k = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ .

17. (\*) 设  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  为  $C^1$  映射, 证明  $\varphi$  将可求体积的有界集合映为可求体积的有界集合.

### §13.5 重积分的应用和推广

我们在前面几节所考虑的重积分有两个局限: 一是积分区域要是可求体积 (面积) 的有界集合, 二是被积函数要是有限的. 现在我们看看怎样放宽这两个限制条件.

先考虑无界区域上的积分. 假设  $A$  是  $\mathbb{R}^n$  中的 (无界) 集合, 如果对于每个矩形  $[-k, k]^n$  ( $k \geq 1$ ),  $A \cap [-k, k]^n$  都是可求体积的, 且极限  $\lim_{k \rightarrow +\infty} v(A \cap [-k, k]^n)$  存在 (有限), 则称  $A$  是广义可求体积的, 其体积定义为

$$v(A) = \lim_{k \rightarrow +\infty} v(A \cap [-k, k]^n).$$

如果  $A$  本身就是可求体积的有界集合, 则它也是广义可求体积的, 体积的定义和前面并无矛盾.

**例 13.5.1.** 求平面区域  $A = \{(x, y) \mid |y| \leq \frac{1}{1+x^2}\}$  的面积.

**解.** 显然,  $A \cap [-k, k]^2$  可求面积, 且根据对称性, 面积为

$$v(A \cap [-k, k]^2) = 2 \int_{-k}^k \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \arctan x \Big|_{-k}^k = 4 \arctan k,$$

因此

$$v(A) = \lim_{k \rightarrow +\infty} v(A \cap [-k, k]^2) = \lim_{k \rightarrow +\infty} 4 \arctan k = 2\pi.$$

这说明  $A$  是广义可求面积的. □

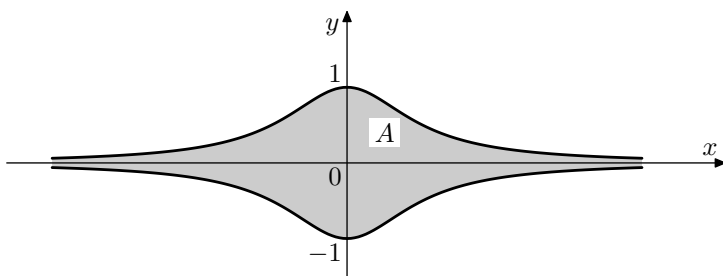


图 13.19 无界区域的面积

注意到  $v(A \cap [-k, k]^n)$  关于  $k$  是单调递增的, 因此有

**命题 13.5.1.**  $A$  广义可求体积当且仅当  $A \cap [-k, k]^n$  可求体积且它们的体积有上界.

我们再注意到, 如果将定义中的矩形  $[-k, k]^n$  换成半径为  $k$  的球体  $B_k(0)$ , 则结论不变. 事实上, 由等式

$$A \cap B_k(0) = (A \cap [-k, k]^n) \cap B_k(0)$$

以及可求体积的有界集合之交仍可求体积知, 如果  $A \cap [-k, k]^n$  都是可求体积的, 则  $A \cap B_k(0)$  也都是可求体积的, 再根据

$$A \cap \left[ \frac{k}{\sqrt{n}}, \frac{k}{\sqrt{n}} \right]^n \subset A \cap B_k(0) \subset A \cap [-k, k]^n$$

以及数列极限的夹逼原理知

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} v(A \cap B_k(0)) = \lim_{k \rightarrow +\infty} v(A \cap [-k, k]^n).$$

反之, 如果  $A \cap B_k(0)$  都是可求体积的, 则  $A \cap [-k, k]^n$  也都是可求体积的, 且二者极限相等.

我们可以将矩形或半径越来越大的球体推广为更一般的可求体积区域.

**定义 13.5.1 (穷竭).** 设  $\{\Omega_i\}$  为  $\mathbb{R}^n$  中一系列可求体积的有界开区域, 满足条件

$$(1) \bar{\Omega}_i \subset \Omega_{i+1}, \quad \forall i \geq 1; \quad (2) \bigcup_{i \geq 1} \Omega_i = \mathbb{R}^n,$$

则称  $\{\Omega_i\}$  为  $\mathbb{R}^n$  的一个穷竭.

开矩形  $\{(-k, k)^n\}$  和开球体  $\{B_k(0)\}$  都是  $\mathbb{R}^n$  的穷竭. 在具体的积分计算中, 往往可以适当选取穷竭以简化计算, 见后面的例子. 在穷竭的定义中当然也可以考虑一般的有界区域, 此时要求  $\bar{\Omega}_i$  含于  $\Omega_{i+1}$  的内点集中.

现在下面的命题就比较明显了.

**命题 13.5.2.** 设  $\{\Omega_i\}$  为  $\mathbb{R}^n$  的一个穷竭, 则  $A$  广义可求体积当且仅当  $\{A \cap \Omega_i\}$  是一列体积有上界的可求体积集, 且

$$v(A) = \lim_{i \rightarrow \infty} v(A \cap \Omega_i).$$

类似地, 我们可以把重积分的定义推广到无界集合上. 设  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  是集合  $A \subset \mathbb{R}^n$  上定义的非负函数. 如果对每一个矩形  $[-k, k]^n$ ,  $A \cap [-k, k]^n$  都是可求体积的,  $f$  在  $A \cap [-k, k]^n$  上可积, 且极限

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{A \cap [-k, k]^n} f$$

存在 (有限), 则称  $f$  在  $A$  上广义可积或广义积分收敛, 其 (广义) 积分记为

$$\int_A f = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{A \cap [-k, k]^n} f.$$

注意, 此时  $A$  不一定是广义可求体积的 (体积可能为无穷大). 如果上式右边的极限为  $+\infty$ , 则称  $f$  的广义积分在  $A$  上发散. 下面的命题也是可以立即得到的.

**命题 13.5.3.** 设  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  为非负函数, 则

(1)  $f$  在  $A$  上广义可积当且仅当积分  $\int_{A \cap [-k, k]^n} f$  关于  $k$  有上界;

(2) 设  $\{\Omega_i\}$  为  $\mathbb{R}^n$  的一个穷竭, 则  $f$  在  $A$  上广义可积当且仅当  $f$  在  $A \cap \Omega_i$  上可积, 且积分有上界, 此时

$$\int_A f = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{A \cap \Omega_i} f.$$

对于一般的函数  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ , 记

$$f^+ = \max\{f, 0\}, \quad f^- = \max\{-f, 0\},$$

则  $f = f^+ - f^-$ .  $f^+, f^-$  都是非负函数, 当  $f^+, f^-$  在  $A$  上广义可积时, 我们称  $f$  在  $A$  上广义可积, 积分定义为

$$\int_A f = \int_A f^+ - \int_A f^-.$$

注意到  $|f| = f^+ + f^-$ , 因此  $f$  在  $A$  上广义可积时,  $|f|$  在  $A$  上也广义可积, 这和一元函数的广义积分是不同的! 之所以出现这种差别还是因为被积区域在一般维数时可能非常复杂 (因此对被积函数的要求较高).

和普通的重积分一样, 广义重积分也具有线性性, 积分区域的可加性, 保序性以及积分中值定理等, 我们不重复叙述.

下面我们计算几个广义重积分的例子.

**例 13.5.2.** 计算函数  $e^{-(x^2+y^2)}$  在  $\mathbb{R}^2$  上的积分.

**解.** 在圆  $B_R = \{x^2 + y^2 \leq R^2\}$  上, 根据前一节极坐标变换的例子, 我们曾经算出

$$\int_{B_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \pi(1 - e^{-R^2}),$$

因此

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{B_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \pi(1 - e^{-R^2}) = \pi.$$

如果我们用矩形区域作穷竭, 则有

$$\pi = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{[-R, R]^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[ \int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right]^2,$$

这就重新得到了概率积分:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}, \text{ 或 } \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

**例 13.5.3.** 计算函数  $e^{-(x_1^2 + \cdots + x_n^2)}$  在  $\mathbb{R}^n$  上的积分.

**解.** 利用矩形作穷竭以及重积分化累次积分, 得

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2 + \cdots + x_n^2)} dx_1 \cdots dx_n &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{[-R, R]^n} e^{-(x_1^2 + \cdots + x_n^2)} dx_1 \cdots dx_n \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[ \int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right]^n = \pi^{\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

如果我们用球  $B_R(0)$  作穷竭, 利用球面坐标以及前节 (13.6) 式可得

$$\pi^{\frac{n}{2}} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R e^{-r^2} r^{n-1} (n\omega_n) dr,$$

如果在上式中作变量替换  $r = \sqrt{t}$ , 并记

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad (x > 0),$$

则得到了  $n$  维单位球体积  $\omega_n$  的另一种表示

$$\omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}. \quad (13.7)$$

这里的  $\Gamma(x)$  是我们在第十六章中将要进一步讨论的 Gamma 函数.

广义积分的变量替换公式在一定条件下也是成立的, 我们仅举例说明.

**例 13.5.4.** 设  $P$  为  $n$  阶正定对称方阵, 计算函数  $e^{-xPx^T}$  在  $\mathbb{R}^n$  上的积分.

**解.** 因为  $P$  为正定对称方阵, 故存在正交方阵  $O$ , 使得

$$P = O \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) O^T, \quad \lambda_i > 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

利用正交变换  $y = xO$ , 积分化为

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-xPx^T} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(\lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2)},$$

再利用伸缩变换  $t_i = \sqrt{\lambda_i} y_i$  以及上例, 积分为

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-xPx^T} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(t_1^2 + \dots + t_n^2)} (\lambda_1 \dots \lambda_n)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det P}}.$$

对于一般的函数, 如何判断其广义积分是收敛还是发散的? 根据命题 13.5.3, 我们有如下比较判别法.

**定理 13.5.4.** 设  $g(x)$  为  $A$  上非负广义可积函数,  $f$  在每一个  $A \cap [-k, k]^n$  上可积, 且当  $\|x\|$  充分大时,  $|f(x)| \leq g(x)$ , 则  $f(x)$  在  $A$  上广义可积.

显然, 定理中的矩形  $[-k, k]^n$  可以换成球体  $B_k(0)$ . 记  $r = \|x\|$ , 考虑函数  $r^{-p}$  在区域  $\{r_0 \leq r \leq R\}$  ( $r_0 > 0$ ) 上的积分, 利用球面坐标以及前节 (13.6) 式可得

$$\int_{r_0 \leq r \leq R} r^{-p} = \int_{r_0}^R r^{n-1-p} (n\omega_n) dr = \frac{1}{n-p} (R^{n-p} - r_0^{n-p}) (n\omega_n),$$

因此当  $p > n$  时,  $r^{-p}$  在  $\{r \geq r_0\}$  上广义可积. 根据比较定理, 可得

**推论 13.5.5.** 设  $f$  在每一个  $A \cap B_k(0)$  上可积. 如果  $p > n$  为常数, 且当  $\|x\|$  充分大时, 成立

$$|f(x)| \leq \|x\|^{-p},$$

则  $f$  在  $A$  上广义可积.

类似地可以得到判断广义积分发散的条件的, 我们留给读者完成.

广义重积分化累次积分的问题我们将在第十六章中讨论. 下面研究无界函数的积分. 设  $A$  为  $\mathbb{R}^n$  中可求体积的有界集合,  $p \in A$ . 给定非负函数  $f: A - p \rightarrow \mathbb{R}$ , 如果对于任意  $\varepsilon > 0$ ,  $f$  在  $A - B_\varepsilon(p)$  上可积, 且极限

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{A - B_\varepsilon(p)} f$$

存在 (有限), 则称  $f$  在  $A$  上的瑕积分收敛, 记为

$$\int_A f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{A - B_\varepsilon(p)} f,$$

否则就称瑕积分发散. 当  $f$  在整个  $A$  上可积时,  $f$  在  $A$  上的瑕积分收敛且两个积分相等.

如果  $f$  是一般的函数, 则考虑  $f^+$  和  $f^-$ , 当  $f^+$  和  $f^-$  在  $A$  上的瑕积分都收敛时, 称  $f$  在  $A$  上的瑕积分收敛, 且定义

$$\int_A f = \int_A f^+ - \int_A f^-.$$

如同广义积分的讨论那样, 瑕积分定义中的球体  $B_\varepsilon(p)$  可以换成包含  $p$  的其它可求体积的区域, 例如直径趋于零的矩形. 下面的结果当然也成立.

**命题 13.5.6.** 设  $f: A - p \rightarrow \mathbb{R}$  为非负函数, 如果  $f$  在  $A - B_\varepsilon(p)$  上均可积, 且积分

$$\int_{A-B_\varepsilon(p)} f$$

关于  $\varepsilon$  有界, 则  $f$  在  $A$  上的瑕积分收敛; 反之亦然.

**例 13.5.5.** 研究函数  $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$  在单位圆  $B_1(0)$  上的积分.

**解.** 原点是一个瑕点, 当  $0 < \varepsilon < 1$  时, 利用极坐标变换, 有

$$\begin{aligned} \int_{B_1(0)-B_\varepsilon(0)} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \int_\varepsilon^1 \frac{r}{\sqrt{r^2}} dr \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 2\pi(1-\varepsilon), \end{aligned}$$

因此瑕积分存在且等于  $2\pi$ .

类似于这个例子, 如果我们研究函数  $\|x\|^p$  在  $n$  维球  $B_1(0)$  上的积分, 利用球面坐标不难看到, 当  $p > -n$  时, 瑕积分收敛, 当  $p \leq -n$  时瑕积分发散. 由此可以得到瑕积分的比较判别法, 我们不详述了.

在瑕积分的定义中, 如果  $f$  在  $p$  附近无界, 则称  $p$  为  $f$  的一个瑕点. 我们也可以考虑不只一个瑕点的情形, 甚至某个子集上的点都是  $f$  的瑕点的情形.

例如, 设  $A$  为可求体积的有界集合,  $S \subset A$ ,  $f$  是定义在  $A - S$  上的非负函数, 如果存在一列包含  $S$  的可求体积的集合  $\Delta_i$ , 使得  $v(\Delta_i) \rightarrow 0$ , 且极限

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{A-\Delta_i} f$$

存在 (有限), 则称  $f$  在  $A$  上的瑕积分收敛, 并记

$$\int_A f = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{A-\Delta_i} f.$$

下面的例子中, 被积函数的瑕点不是孤立点, 但积分仍然有意义.



**例 13.5.6.** 研究函数  $\frac{y}{\sqrt{x}}$  在  $[0, 1] \times [0, 1]$  上的积分.

**解.**  $\{0\} \times [0, 1]$  是函数  $\frac{y}{\sqrt{x}}$  的瑕点集, 令

$$D_\varepsilon = [\varepsilon, 1] \times [0, 1],$$

则

$$\int_{D_\varepsilon} \frac{y}{\sqrt{x}} dx dy = \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \int_0^1 y dy = 1 - \sqrt{\varepsilon},$$

因此  $\frac{y}{\sqrt{x}}$  在  $[0, 1] \times [0, 1]$  上的瑕积分收敛于 1. □

对于最一般的区域和最一般的函数, 我们可能会碰到积分区域无界, 且函数有很多瑕点的情形, 这时就要灵活运用以上知识了. 不过, Riemann 积分能够处理的情形仍然相当有限, 在后续课程中由 Lebesgue 积分来部分地弥补了这一不足.

最后我们举几个重积分在物理中应用的例子.

(1) 物体的质量. 设  $A$  为空间物体, 其密度函数为  $\rho(x, y, z)$ , 则它的质量  $m$  为

$$m = \int_A \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

类似地, 如果物体是密度函数为  $\rho(x, y)$  的平面薄板, 则质量可以用二重积分来计算.

(2) 物体的重心. 仍设  $A$  为空间物体, 其密度函数为  $\rho(x, y, z)$ , 则它的质量中心  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  坐标为

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \int_A x \rho(x, y, z), \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \int_A y \rho(x, y, z), \quad \bar{z} = \frac{1}{m} \int_A z \rho(x, y, z).$$

(3) 转动惯量. 物体  $A$  关于  $x$  轴,  $y$  轴,  $z$  轴的转动惯量分别为

$$I_x = \int_A (y^2 + z^2) \rho(x, y, z), \quad I_y = \int_A (x^2 + z^2) \rho(x, y, z), \quad I_z = \int_A (x^2 + y^2) \rho(x, y, z).$$

一般地, 如果  $l$  为空间直线,  $(x, y, z)$  到  $l$  的距离记为  $r(x, y, z)$ , 则物体关于  $l$  的转动惯量为

$$I_l = \int_A r^2(x, y, z) \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

(4) 万有引力. 设  $A$  为如上空间物体,  $B$  为位于  $(x_0, y_0, z_0)$  处质量为  $m_0$  的质点, 则由 Newton 万有引力定律,  $A$  对  $B$  所产生的引力  $F$  为

$$\vec{F} = G m_0 \int_A \frac{\rho(x, y, z)}{r^3} \vec{r} dx dy dz,$$

其中,  $G$  为万有引力常数,

$$\vec{r} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0), \quad r = \|\vec{r}\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

**例 13.5.7.** 有一半径为  $R$  的球体, 设其密度  $\rho$  为常数, 求其引力场.

**解.** 所谓引力场就是在每一点  $p$  处单位质量的质点所受的引力. 设  $p$  点与球心距离为  $l$ . 不妨设球心在原点,  $p$  点在  $z$  轴上, 其坐标为  $(0, 0, l)$ . 于是  $p$  处单位质量的质点所受引力为

$$\vec{F}(p) = G \int_{B_R} \frac{\rho \cdot (x, y, z - l)}{[x^2 + y^2 + (z - l)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

容易看出,  $\vec{F}(p)$  的  $x, y$  分量为零. 它的  $z$  分量  $F(p)_z$  用球面坐标计算如下:

$$F(p)_z = G\rho \int_0^R dr \int_0^\pi \frac{r^2(r \cos \theta - l) \sin \theta}{(r^2 + l^2 - 2rl \cos \theta)^{3/2}} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi G\rho \int_0^R r^2 \varphi(r) dr,$$

其中

$$\varphi(r) = \int_0^\pi \frac{(r \cos \theta - l) \sin \theta}{(r^2 + l^2 - 2rl \cos \theta)^{3/2}} d\theta,$$

对上述积分作换元  $t = (r^2 + l^2 - 2rl \cos \theta)^{1/2}$ , 得

$$\varphi(r) = \frac{1}{2l^2 r} \int_{|r-l|}^{r+l} \left( \frac{r^2 - l^2}{t^2} - 1 \right) dt = \frac{1}{l^2} \left[ \frac{r-l}{|r-l|} - 1 \right],$$

当  $r \geq l$  时  $\varphi(r) = 0$ ; 当  $r < l$  时  $\varphi(r) = -2l^{-2}$ . 因此, 当  $l \geq R$  时

$$F(p)_z = 2\pi G\rho \int_0^R r^2 (-2l^{-2}) dr = -\frac{4}{3}\pi G\rho R^3 l^{-2};$$

当  $l \leq R$  时

$$F(p)_z = 2\pi G\rho \int_0^l r^2 (-2l^{-2}) dr = -\frac{4}{3}\pi G\rho l.$$

如果注意到半径为  $r$  的球质量为  $\frac{4}{3}\pi\rho r^3$ , 则计算的结果就表明, 当质点位于球外时, 它所受的引力就如同球体的质量完全集中在球心时所受的引力那样; 当质点位于球内时, 位于质点以外的外层球壳对质点的引力抵消了.

### 习题 13.5

1. 设  $A$  是广义可求体积的集合, 则其边界  $\partial A$  为零测集.
2. 设  $A$  是可求体积的有界集合,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  为有界函数. 如果对于任意  $\varepsilon > 0$ ,  $f$  在  $A - B_\varepsilon(p)$  上可积, 则  $f$  在  $A$  上可积, 且

$$\int_A f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{A - B_\varepsilon(p)} f.$$

3. 设平面集合  $A$  含有区域 (在极坐标下)  $\{\alpha \leq \theta \leq \beta, r \geq r_0\}$ , 如果函数  $f(x, y)$  在  $A$  上满足不等式  $f(x, y) \geq cr^p$ , 其中  $c$  为正常数,  $p \geq -2$ , 则  $f(x, y)$  在  $A$  上的广义积分发散.

4. 如果  $\mathbb{R}^n$  上的函数  $f(x)$  在  $\{\|x\| \geq r_0\}$  上满足不等式

$$f(x) \geq c\|x\|^p,$$

则当  $p \geq -n$  时  $f(x)$  在  $\mathbb{R}^n$  上的广义积分发散.

5. 如果  $\mathbb{R}^n$  上的函数  $f(x)$  在  $\{\|x\| \leq r_0\}$  上满足不等式

$$f(x) \geq \|x\|^p,$$

则当  $p \leq -n$  时  $f(x)$  在  $\mathbb{R}^n$  上的瑕积分发散.

6. 讨论下列积分的敛散性:

- (1)  $\int_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)};$
- (2)  $\int_A \frac{dxdy}{|x|^p+|y|^q}, A = \{|x|+|y| \geq 1\};$
- (3)  $\int_A \frac{\ln(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^p}, A = \{x^2+y^2+z^2 \leq 1\};$
- (4)  $\int_A \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, A = \{x^2+y^2 \leq 1\};$
- (5)  $\int_A \frac{dxdy}{x^p y^q}, A = \{xy \geq 1, x \geq 1\}.$

7. 计算下列积分

$$(1) \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \ln(x^2+y^2) dxdy; \quad (2) \iint_{x \geq 0, y \geq 0} \frac{dxdy}{(1+x+y)^3}; \quad (3) \iint_{x \geq y \geq 0} e^{-(x+y)} dxdy.$$

8. 设  $A$  为  $n$  阶正定对称方阵,  $b \in \mathbb{R}^n$ , 计算积分

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-xAx^T+b \cdot x^T}.$$

9. 设有半径为  $R$  的球体, 球心位置为  $(0, 0, R)$ , 密度函数为  $\rho(x) = k\|x\|^{-2}$ , 求其重心的位置.
10. 设一质量均匀的物体由抛物面  $z = x^2 + y^2$  和平面  $z = 1$  围成, 求其重心位置.
11. 求质量均匀的球体  $\{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$  关于三个坐标轴的转动惯量.
12. 一圆锥与半球相接围成质量均匀的球锥, 设球的半径为  $R$ , 锥的顶角为  $2\alpha$ , 计算球锥对其顶点的引力.

## 第十四章 曲线积分与曲面积分

本章讨论欧氏空间  $\mathbb{R}^n$  中曲线以及曲面上的积分理论, 包括曲线的长度, 曲面的面积, 以及曲线曲面上函数和向量值函数的积分, 并讨论这些积分之间的联系.

### §14.1 第一型曲线积分

我们从曲线的长度开始. 在第七章第一节中, 对于平面曲线  $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ , 如果  $x(t), y(t)$  是关于  $t$  的连续可微函数, 则利用折线逼近曲线的办法, 我们定义了  $\sigma$  的长度为

$$L(\sigma) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

现在考虑一般的情形. 映射  $\sigma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$  称为一条参数曲线, 我们仍然用折线逼近曲线的办法定义  $\sigma$  的长度. 为此, 任取  $[\alpha, \beta]$  的分割

$$\pi: \alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = \beta,$$

相继用直线段连接曲线上的分点  $\sigma(t_{i-1})$  与  $\sigma(t_i)$  ( $1 \leq i \leq m$ ), 得到的折线的长度为

$$L(\sigma; \pi) = \sum_{i=1}^m \|\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})\|.$$

如果这些折线的长度有上界, 即

$$\sup_{\pi} \sum_{i=1}^m \|\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})\| < +\infty,$$

则称  $\sigma$  是可求长曲线, 其长度定义为

$$L(\sigma) = \sup_{\pi} \sum_{i=1}^m \|\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})\|.$$

利用三角不等式我们知道当区间  $[\alpha, \beta]$  的分割加细时, 折线的长度单调递增. 如果  $\sigma(t)$  的每一个分量均为连续可微函数, 则由第七章第一节的推导知  $\sigma$  是可求长的, 且长度可以表示为积分

$$L(\sigma) = \int_{\alpha}^{\beta} \|\sigma'(t)\| dt.$$

注. 如果曲线不连续, 则我们这里给出的曲线长度定义和直观上的长度观念不是一回事. 例如, 考虑这样的曲线: 当  $t = 0$  时  $(x(0), y(0)) = (0, 0)$ ; 当  $0 < t \leq 1$  时,  $(x(t), y(t)) = (t, 1)$ . 按我们的定义, 此曲线长度为 2!

从定义可以得到可求长曲线的下列性质:



图 14.1 折线逼近

- 如果  $\sigma$  为可求长曲线, 则对任意  $[\gamma, \delta] \subset [\alpha, \beta]$ ,  $\sigma|_{[\gamma, \delta]}$  也是可求长的;
- 如果  $\sigma$  为可求长曲线, 则对任意  $\gamma \in [\alpha, \beta]$ , 有

$$L(\sigma) = L(\sigma|_{[\alpha, \gamma]}) + L(\sigma|_{[\gamma, \beta]}).$$

这是曲线长度的可加性, 其证明仍然是利用三角不等式.

为了导出曲线可求长的充分必要条件, 我们引入有界变差函数的概念.

**定义 14.1.1** (有界变差函数). 设  $f$  为定义在  $[\alpha, \beta]$  上的函数. 任给分割

$$\pi: \alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = \beta,$$

记

$$v(f; \pi) = \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})|,$$

如果  $\sup_{\pi} v(f; \pi)$  有限, 则称  $f$  为  $[\alpha, \beta]$  上的有界变差函数, 它在  $[\alpha, \beta]$  上的全变差记为

$$\bigvee_{\alpha}^{\beta}(f) = \sup_{\pi} v(f; \pi).$$

下列函数都是有界变差函数:

- 单调函数. 如果  $f$  为  $[\alpha, \beta]$  上的单调函数, 例如单调递增, 则对任意的分割  $\pi$ , 有

$$v(f; \pi) = \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^m (f(t_i) - f(t_{i-1})) = f(\beta) - f(\alpha),$$

这说明

$$\bigvee_{\alpha}^{\beta}(f) = |f(\beta) - f(\alpha)|.$$

- Lipschitz 函数. 设  $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ , 则

$$v(f; \pi) = \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^m L(t_i - t_{i-1}) = L(\beta - \alpha),$$

因而  $f$  是有界变差函数.

- 连续可微函数. 根据微分中值定理可以知道, 闭区间上的连续可微函数都是 Lipschitz 函数, 因而是有界变差函数.

- 如果  $g(x)$  为  $[\alpha, \beta]$  上的 Riemann 可积函数, 则

$$f(x) = \int_{\alpha}^x g(t)dt, \quad x \in [\alpha, \beta]$$

是 Lipschitz 函数, 因此也是有界变差函数.

可以证明, 有界变差函数必为两个单调递增函数的差. 关于有界变差函数的进一步讨论请参见本章附录 (即最后一节).

**定理 14.1.1 (Jordan).** 曲线  $\sigma(t)$  可求长当且仅当它的每一个分量均为有界变差函数.

**证明.** 设  $\sigma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  可求长, 则任给  $[\alpha, \beta]$  的分割  $\pi$ , 有

$$v(x_i; \pi) = \sum_{j=1}^m |x_i(t_j) - x_i(t_{j-1})| \leq \sum_{j=1}^m \|\sigma(t_j) - \sigma(t_{j-1})\| \leq L(\sigma),$$

这说明  $x_i(t)$  为有界变差函数.

反之, 如果每一个  $x_i(t)$  都是有界变差函数, 则

$$\begin{aligned} L(\sigma; \pi) &= \sum_{j=1}^m \|\sigma(t_j) - \sigma(t_{j-1})\| \\ &\leq \sum_{j=1}^m (|x_1(t_j) - x_1(t_{j-1})| + \dots + |x_n(t_j) - x_n(t_{j-1})|) \\ &= \sum_{i=1}^n v(x_i; \pi) \leq \sum_{i=1}^n \bigvee_{\alpha}^{\beta} (x_i). \end{aligned}$$

因此  $\sigma(t)$  是可求长的. □

以下总是假设曲线  $\sigma$  是可求长的. 对  $t \in [\alpha, \beta]$ , 定义

$$s(t) = L(\sigma|_{[\alpha, t]}),$$

则  $s(t)$  为单调递增函数, 称为  $\sigma(t)$  的弧长函数, 并且

$$s(t_2) - s(t_1) = L(\sigma|_{[t_1, t_2]}), \quad t_1 \leq t_2.$$

因此, 如果  $t_2 > t_1$ ,  $s(t_2) = s(t_1)$ , 则  $\sigma(t)$  在  $[t_1, t_2]$  上取常值. 如果  $\sigma(t)$  不在任何区间上取常值, 则  $s(t)$  为严格单调递增函数.

当  $\sigma(t)$  为可求长的连续曲线时,  $s(t)$  也是连续函数 (见本章附录). 当  $\sigma(t)$  不在任何区间上取常值时,  $s(t)$  是参数  $t$  的连续的严格单调递增函数, 从而可逆, 其逆记为  $t = t(s)$ :

$$t(s) : [0, L(\sigma)] \rightarrow [\alpha, \beta].$$

这时,  $\sigma(t) = \sigma(t(s))$  又可以看成关于  $s$  的参数曲线, 我们将  $s$  称为弧长参数.

当  $\sigma(t)$  为连续可微曲线, 且  $\|\sigma'(t)\|$  在任何区间上不恒为零 (例如, 处处非零) 时, 上一段的讨论对  $\sigma(t)$  完全适用, 此时

$$s'(t) = \|\sigma'(t)\| \quad \text{或} \quad ds = \|\sigma'(t)\| dt.$$

现在我们考虑可求长曲线上有界函数的积分. 设  $f$  是定义在  $\sigma$  上的有界函数, 即对任意  $\sigma(t)$ ,  $f(\sigma(t))$  是定义好的实数. 任给  $[\alpha, \beta]$  的分割  $\pi$ , 取  $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$  ( $1 \leq i \leq m$ ), 考虑和

$$\sum_{i=1}^m f(\sigma(\xi_i)) \Delta s_i,$$

其中  $\Delta s_i = s(t_i) - s(t_{i-1})$ . 如果极限

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m f(\sigma(\xi_i)) \Delta s_i$$

存在且与  $\{\xi_i\}$  的选取无关, 则称此极限为  $f$  在  $\sigma$  上的**第一型曲线积分**, 记为

$$\int_{\sigma} f ds = \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m f(\sigma(\xi_i)) \Delta s_i.$$

当  $f = 1$  时, 第一型曲线积分也就是曲线的长度.

第一型曲线积分的物理意义可如下理解: 已知某线状物质的密度函数  $\rho$ , 则物质的质量就是  $\rho$  的曲线积分.

当曲线  $\sigma$  的弧长参数存在时, 第一型曲线积分可以转化为通常的 Riemann 积分:

$$\int_{\sigma} f ds = \int_0^{L(\sigma)} f(\sigma(s)) ds;$$

如果  $\sigma(t)$  为 (分段) 连续可微曲线, 则  $f$  在  $\sigma$  上的第一型曲线积分可以写为 (例如  $f$  连续时):

$$\int_{\sigma} f ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt.$$

一般地, 第一型曲线积分是所谓 Riemann-Stieltjes 积分的一种特殊情形, 请参看本章最后一节.

**例 14.1.1.** 设曲线  $\sigma$  是椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  在第一象限内的部分, 计算积分  $I = \int_{\sigma} xy ds$ .

**解.**  $\sigma$  的参数表示为

$$\sigma(t) = (a \cos t, b \sin t), \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

因此

$$\|\sigma'(t)\| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t},$$

积分为

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos t \cdot b \sin t \cdot \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 - a^2}{2} \cos 2t} dt \\ &= \frac{ab}{4} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 - a^2}{2} u} du \\ &= \frac{ab}{3} \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}. \end{aligned}$$

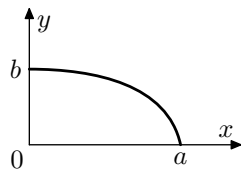


图 14.2 椭圆

**例 14.1.2.** 设  $\sigma$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  被平面  $x + z = a$  所截出的圆, 计算积分  $\int_{\sigma} xz ds$ .

**解.** 先求  $\sigma$  的方程: 以  $z = a - x$  代入球面方程得

$$x^2 + y^2 + (a - x)^2 = a^2,$$

整理后成为

$$(x - \frac{a}{2})^2 + \frac{1}{2}y^2 = (\frac{1}{2}a)^2,$$

用参数表示为

$$x(t) = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos t, \quad y(t) = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin t, \quad z(t) = \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \cos t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

因此

$$\begin{aligned} \|\sigma'(t)\| &= \sqrt{\left(-\frac{a}{2} \sin t\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \cos t\right)^2 + \left(\frac{a}{2} \sin t\right)^2} \\ &= \frac{a}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

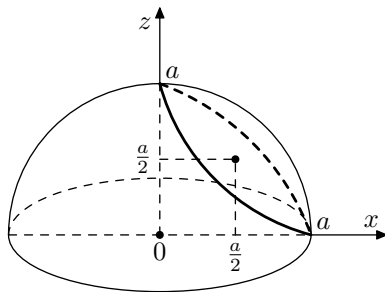


图 14.3 截面圆



从而有

$$\begin{aligned}\int_{\sigma} xz ds &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{2}\right)^2 \sin^2 t \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) dt \\ &= \frac{\pi a^3}{4\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

### 习题 14.1

1. 设  $\sigma$  为参数曲线, 如果极限  $\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} L(\sigma; \pi)$  存在且有限, 则  $\sigma$  为可求长曲线.
2. 设  $\sigma$  为可求长的连续曲线, 则

$$L(\sigma) = \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} L(\sigma; \pi).$$

3. 证明曲线长度的可加性.
4. 用定义证明, 如果可求长的曲线长度为零, 则必定是常值的.
5. 计算下列空间曲线的弧长:

$$(1) \ x(t) = t, \ y(t) = t^2, \ z(t) = t^3, \ t \in [0, 1];$$

$$(2) \ x + y + z = a \ (|a| < \sqrt{3}), \ x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

6. 计算下列曲线积分:

$$(1) \ \int_{\sigma} y ds, \text{ 其中 } \sigma \text{ 是抛物线 } y^2 = 2px \text{ 从 } (0, 0) \text{ 到 } (2p, 2p) \text{ 的部分};$$

$$(2) \ \int_{\sigma} y ds, \text{ 其中 } \sigma \text{ 是椭圆 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ 在 } x \text{ 轴上方的部分};$$

$$(3) \ \int_{\sigma} x^2 ds, \text{ 其中 } \sigma \text{ 是圆周 } x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \ x + y + z = 0;$$

$$(4) \ \int_{\sigma} (x + y) ds, \text{ 其中 } \sigma \text{ 是顶点为 } (0, 0), (1, 0), (0, 1) \text{ 的三角形}.$$

7. 形状为椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  的物质在  $(x, y)$  处的密度为  $\rho(x, y) = |y|$ , 求其质量.
8. (\*) 定义平面曲线  $\sigma(x) = (x, y)$  为

$$y = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x}, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

证明  $\sigma$  不是可求长曲线.

## §14.2 第二型曲线积分

现在我们考虑这样一个物理问题: 设质点在力场  $F$  中沿一条曲线  $\sigma$  运动, 求力场  $F$  对该质点所做的功. 我们可以将这个问题转化为曲线上的一个积分问题.

为此, 设  $\sigma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$  为一条参数曲线,  $f$  是定义在  $\sigma$  上的取值在  $\mathbb{R}^n$  中的一个向量值函数, 其分量记为  $f_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ). 任取  $[\alpha, \beta]$  的一个分割

$$\pi: \alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = \beta,$$

考虑和

$$\sum_{j=1}^m f_i(\sigma(\xi_j))(x_i(t_j) - x_i(t_{j-1})), \quad (\xi_j \in [t_{j-1}, t_j]) \quad (14.1)$$

如果极限

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^m f_i(\sigma(\xi_j))(x_i(t_j) - x_i(t_{j-1}))$$

存在且与  $\{\xi_j\}$  的选取无关, 则称此极限为  $f_i dx_i$  沿曲线  $\sigma$  的**第二型曲线积分**, 记为

$$\int_{\sigma} f_i dx_i = \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^m f_i(\sigma(\xi_j))(x_i(t_j) - x_i(t_{j-1})).$$

如果每一个  $f_i dx_i$  沿  $\sigma$  的第二型曲线积分都存在, 则记

$$\int_{\sigma} f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n = \int_{\sigma} f_1 dx_1 + \cdots + \int_{\sigma} f_n dx_n,$$

这个积分称为形式和  $f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$  沿  $\sigma$  的第二型曲线积分, 在不引起混淆的情况下也称为  $f$  沿  $\sigma$  的第二型曲线积分.

初看起来第二型曲线积分似乎和第一型曲线积分并无本质不同. 但这两类积分有一个重要的区别, 这个区别和曲线的方向有关. 为了说明这一点, 我们考虑曲线的重新参数化. 设  $\phi: [\gamma, \delta] \rightarrow [\alpha, \beta]$  为严格单调的可逆连续映射, 则复合映射  $\sigma \circ \phi: [\gamma, \delta] \rightarrow \mathbb{R}^n$  也是一条参数曲线, 它和  $\sigma$  的像完全相同, 这两条参数曲线只是选取了不同的参数而已. 如果  $\phi$  是严格单调递增的, 则称这两个参数是同向的; 如果  $\phi$  是严格单调递减的, 则称这两个参数是反向的 (不同向).

从 (14.1) 不难看出, 对于同向的两个参数, 第二曲线积分的值不变; 而对于反向的两个参数, 第二型曲线积分的值正好相差一个符号! 这和第一型曲线积分是不同的, 比如曲线的长度就不依赖于参数的选取.

因此, 为了使第二型曲线积分有意义, 我们总是要给曲线指定一个方向, 这个方向是由某个参数决定的. 给定了方向的曲线称为有向曲线. 如果参数反向, 则新的有向曲线记为  $-\sigma$ , 这时有

$$\int_{-\sigma} f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n = - \int_{\sigma} f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n.$$

对于可求长曲线来说, 第二型曲线积分也是 Riemann-Stieltjes 积分的特殊情形. 对于 (分段) 连续可微曲线, 第二型曲线积分可以转化为 Riemann 积分:

$$\int_{\sigma} f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n = \sum_{i=1}^n \int_{\alpha}^{\beta} f_i(\sigma(t)) x'_i(t) dt.$$

另一方面, 如果  $\sigma$  为连续可微曲线,  $s$  是其弧长参数, 则

$$\|\sigma'(s)\| = \|\sigma'(t)\| \cdot (s'(t))^{-1} = 1.$$

如果记  $\sigma'(s) = (\cos \alpha_1, \cdots, \cos \alpha_n)$ , 则第二型曲线积分可以写为

$$\int_{\sigma} f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n = \int_0^{L(\sigma)} f(\sigma(s)) \cdot \sigma'(s) ds = \sum_{i=1}^n \int_0^{L(\sigma)} f_i(\sigma(s)) \cos \alpha_i ds,$$

即第二型曲线积分转化成了第一型的曲线积分.

**例 14.2.1.** Riemann 积分作为第二型的曲线积分.

设  $f$  为  $[a, b]$  上的可积函数, 则定积分  $\int_a^b f(x) dx$  就是  $f(x) dx$  沿区间  $[a, b]$  的第二型曲线积分, 其中区间看成一条曲线, 它的方向是参数  $x$  给出的, 即  $x$  轴的正向. 我们之所以规定

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

就是因为  $f(x) dx$  沿  $[a, b]$  的相反方向的第二型曲线积分要变一个符号. □

**例 14.2.2.** 环路积分.

如果  $\sigma$  为一条闭曲线 (环路), 即  $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$ , 则选定了方向以后, 不论从曲线上哪一点出发, 沿此闭曲线的第二型曲线积分的值不变, 通常我们将这样的积分记为

$$\oint_{\sigma} f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n.$$

单位圆周  $S^1$  就是平面上的一条闭曲线, 如果用参数方程

$$\sigma(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

表示, 则  $S^1$  的方向就是所谓逆时针方向. □

例 14.2.3. 计算第二型曲线积分

$$I = \oint_C \frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy,$$

其中  $C$  为圆周  $x^2 + y^2 = a^2$ , 方向为逆时针方向.

解. 按照给定的方向取  $C$  的参数方程为

$$x(t) = a \cos t, \quad y(t) = a \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

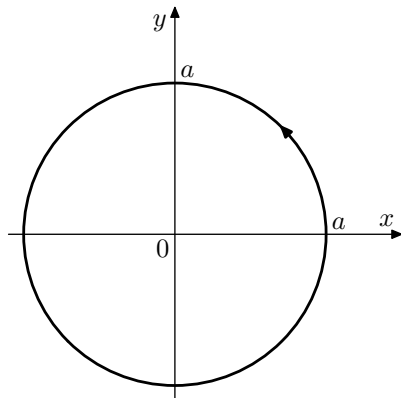


图 14.4 逆时针圆

此时有

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2} [a \sin t (a \cos t)' - a \cos t (a \sin t)'] dt = -2\pi.$$

例 14.2.4. 计算第二型曲线积分

$$I = \oint_C (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz,$$

其中  $C$  是圆周  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $y = x \tan \alpha$  ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ), 从  $x$  的正向看去,  $C$  的方向是逆时针的.

解. 根据方向取  $C$  的参数方程为

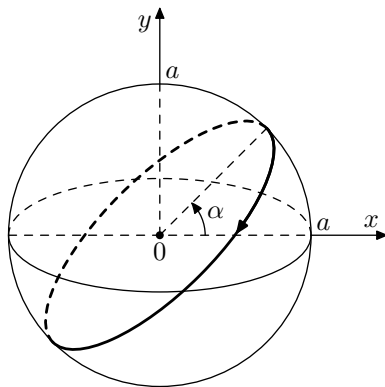


图 14.5 球面圆

$$x(\theta) = a \cos \theta \cos \alpha, \quad y(\theta) = a \cos \theta \sin \alpha, \quad z(\theta) = a \sin \theta,$$

其中  $\theta \in [0, 2\pi]$ . 于是积分为

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} (a \cos \theta \sin \alpha - a \sin \theta) (-a \sin \theta \cos \alpha) d\theta + (a \sin \theta - a \cos \theta \cos \alpha) \\ &\quad \times (-a \sin \theta \sin \alpha) d\theta + (a \cos \theta \cos \alpha - a \cos \theta \sin \alpha) a \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} a^2 (\cos \alpha - \sin \alpha) d\theta = 2\pi a^2 (\cos \alpha - \sin \alpha). \end{aligned}$$

**例 14.2.5.** 考虑位于原点处的电荷  $q$  产生的静电场, 计算单位正电荷沿连续可微曲线  $\sigma$  从点  $A = \sigma(\alpha)$  到点  $B = \sigma(\beta)$  电场所作的功  $W$ .

**解.** 这是一个第二型的曲线积分问题. 根据库仑定律,  $(x, y, z)$  处的单位正电荷在静电场中所受的力为

$$\vec{F} = q \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{q \cdot (x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

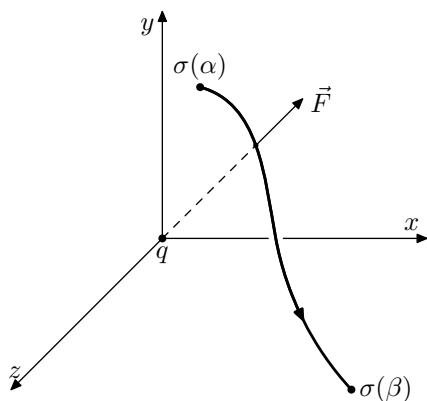


图 14.6 电场做功

因此  $\vec{F}$  沿  $\sigma$  所作的功为

$$\begin{aligned} W &= \int_{\sigma} \frac{qx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dx + \frac{qy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dy + \frac{qz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dz \\ &= q \int_{\alpha}^{\beta} \frac{xx' + yy' + zz'}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dt \\ &= \frac{q}{2} \int_{r(\alpha)}^{r(\beta)} \frac{dr^2}{r^3} = q \int_{r(\alpha)}^{r(\beta)} \frac{dr}{r^2} \\ &= q \left[ \frac{1}{r(\alpha)} - \frac{1}{r(\beta)} \right]. \end{aligned}$$

这说明, 静电场所作的功只与单位电荷的起始位置和终点位置有关, 与具体运动路径无关.  $\square$

### 习题 14.2

1. 计算下列积分:

- (1)  $\int_C xdx + ydy + zdz$ ,  $C$  是从  $(1, 1, 1)$  到  $(2, 3, 4)$  的直线段;
- (2)  $\int_C (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$ ,  $C$  是以  $(1, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(1, 1)$  为顶点的正方形, 逆时针方向;
- (3)  $\oint_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$ ,  $C$  是圆  $x^2 + y^2 = a^2$ , 逆时针方向;
- (4)  $\int_C (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$ ,  $C$  是抛物线  $y = x^2$  从  $(-1, 1)$  到  $(1, 1)$  的一段.
- (5)  $\oint_C (x+y)dx + (x-y)dy$ ,  $C$  是椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , 逆时针方向.

## 2. 计算积分

$$\int_C (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz,$$

其中  $C$  为椭圆  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x + z = 1$ , 从  $x$  的正向看去,  $C$  沿顺时针方向.

3. 设  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  在曲线  $\sigma$  上连续, 证明

$$\left| \int_{\sigma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \right| \leq L(\sigma)M,$$

其中  $M = \sup_{\sigma} \sqrt{P^2 + Q^2}$ .

4. 设  $C$  为圆周  $x^2 + y^2 = R^2$ , 方向为逆时针. 利用上一题估计积分

$$I_R = \oint_C \frac{ydx - xdy}{(x^2 + xy + y^2)^2},$$

并证明  $\lim_{R \rightarrow +\infty} I_R = 0$ .

5. 计算质量为  $m$  的质点在重力场的作用下沿曲线  $\sigma$  从点  $A = \sigma(\alpha)$  到点  $B = \sigma(\beta)$  所作的功  $W$ .6. 证明, 如果  $\sigma \circ \phi$  是可求长曲线  $\sigma$  的重新参数化, 则它们的长度相等.

## §14.3 第一型曲面积分

我们从曲面的面积开始. 设  $m \leq n$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  为  $\mathbb{R}^m$  中的开集.  $C^1$  映射  $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  称为  $\mathbb{R}^n$  中的一个参数曲面. 我们想要定义参数曲面的面积, 先从线性映射开始. 设  $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  为线性映射,  $I \subset \mathbb{R}^m$  为矩形. 如果  $\varphi$  是退化的 (秩小于  $m$ ), 则  $\varphi(\mathbb{R}^m)$  包含在一个维数小于  $m$  的子向量空间中, 我们自然定义  $\varphi(I)$  的  $m$  维体积为零; 如果  $\varphi$  非退化, 则  $\varphi(\mathbb{R}^m)$  维数为  $m$ ,  $\varphi(I)$  为  $m$  维欧氏空间中的可求体积集, 我们来计算它的  $m$  维体积. 以下为了区分不同维数的体积, 我们将  $m$  维体积称为面积, 并用记号  $\sigma$  来表示它.

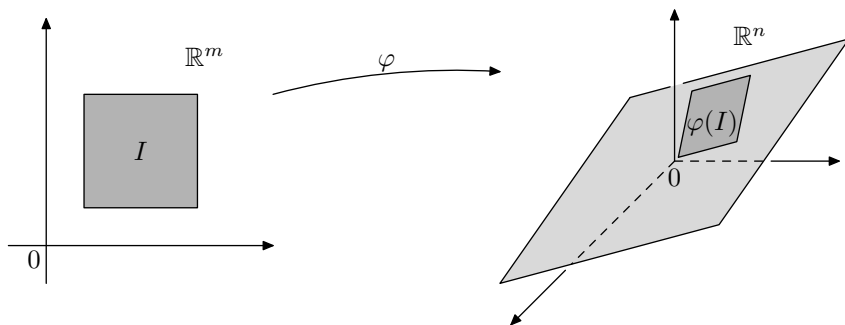


图 14.7 矩形在线性映射下的像

不妨设  $I = [0, 1]^m$ . 记  $v_j = \varphi(e_j) = (a_{1j}, \cdots, a_{nj})$ , 其中  $\{e_j\}_{j=1}^m$  为  $\mathbb{R}^m$  的一组标准基. 则

$$\varphi(I) = \left\{ \sum_{j=1}^m x_j v_j \mid 0 \leq x_j \leq 1, j = 1, \cdots, m \right\}.$$

记  $n \times m$  型的矩阵  $A = (a_{ij})$ . 如果当  $i > m$  时  $a_{ij} \equiv 0$ , 即

$$\varphi(\mathbb{R}^m) \subset \mathbb{R}^m \times \{0\} = \{(x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n\},$$

则根据第十三章第四节的计算, 特别是 (13.3) 式,  $\varphi(I)$  的面积可表示为

$$\sigma(\varphi(I)) = |\det(a_{ij})_{m \times m}| \sigma(I) = \sqrt{\det[(a_{ij})_{n \times m}^T (a_{ij})_{n \times m}]} \sigma(I).$$

一般的情形, 我们总可以选择  $\mathbb{R}^n$  中的一个正交变换  $O$ , 使得  $O(\varphi(\mathbb{R}^m)) \subset \mathbb{R}^m \times \{0\}$ , 因为正交变换保持面积和体积等不变, 故有

$$\begin{aligned} \sigma(\varphi(I)) &= \sigma(O(\varphi(I))) = \sqrt{\det[O(a_{ij})_{n \times m}]^T [O(a_{ij})_{n \times m}]} \sigma(I) \\ &= \sqrt{\det[(a_{ij})_{n \times m}^T (a_{ij})_{n \times m}]} \sigma(I). \end{aligned}$$

一般地, 如果  $\Omega$  为  $\mathbb{R}^m$  中可求面积 (体积) 集, 则  $\varphi(\Omega)$  为  $\mathbb{R}^n$  中一个  $m$  维平面中的可求面积集, 且

$$\sigma(\varphi(\Omega)) = \sqrt{\det(A^T \cdot A)} \sigma(\Omega), \quad (14.2)$$

其中  $A = (a_{ij})_{n \times m}$ . 这是 (13.3) 式的推广.

**例 14.3.1.** 设  $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$  为  $\mathbb{R}^3$  中的两个线性无关的向量, 求  $v_1, v_2$  张成的平行四边形的面积.

**解.** 欲求面积记为  $\sigma(v_1, v_2)$ . 根据 (14.2) 式, 有

$$\sigma(v_1, v_2) = \sqrt{\det(A^T \cdot A)},$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix},$$

因此

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 \\ v_1 \cdot v_2 & v_2 \cdot v_2 \end{pmatrix},$$

$\sigma(v_1, v_2)$  可以表示为

$$\sigma(v_1, v_2) = \sqrt{(v_1 \cdot v_1)(v_2 \cdot v_2) - (v_1 \cdot v_2)^2}. \quad (14.3)$$

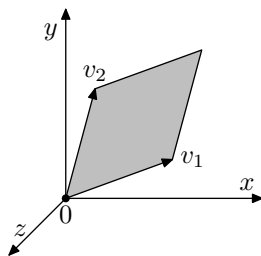


图 14.8 平行四边形

如果利用  $\mathbb{R}^3$  中向量的叉乘运算, 上式还可以表示为

$$\sigma(v_1, v_2) = \|v_1 \times v_2\|.$$

这个公式和解析几何中得到的公式是一致的.  $\square$

现在考虑一般的参数曲面  $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , 假设  $\varphi$  是  $C^1$  映射. 取  $x_0 \in \Omega$ , 设  $J\varphi(x_0)$  非退化 (秩为  $m$ ), 定义  $L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  为

$$L(x) = \varphi(x_0) + J\varphi(x_0)(x - x_0), \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

记  $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow L(\mathbb{R}^m)$  为正交投影, 则映射

$$\pi \circ \varphi - L: \Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^m),$$

满足条件  $J(\pi \circ \varphi - L)(x_0) = 0$ . 根据第十三章第四节的讨论可知, 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 当  $A$  为包含在  $x_0$  的  $\delta$  邻域内的可求面积集时, 有

$$|\sigma(\pi(\varphi(A))) - \sigma(L(A))| < \varepsilon \cdot \sigma(A),$$

即 (由 (14.2) 式)

$$|\sigma(\pi(\varphi(A))) - \sqrt{\det[(J\varphi)^T(x_0) \cdot J\varphi(x_0)]} \sigma(A)| < \varepsilon \cdot \sigma(A), \quad (14.4)$$

这是 (13.4) 式的推广. 如果将  $\varphi(A)$  的“面积”近似地用它在  $x_0$  处参数曲面的切空间  $L(\mathbb{R}^m)$  上的投影  $\pi(\varphi(A))$  的面积代替时, 我们就得到了参数曲面面积的如下积分定义:

**定义 14.3.1** (面积公式). 设  $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  为非退化的  $C^1$  映射,  $\Omega$  为  $\mathbb{R}^m$  中可求面积的集合, 则  $\varphi(\Omega)$  的面积定义为

$$\sigma(\varphi(\Omega)) = \int_{\Omega} \sqrt{\det[(J\varphi)^T \cdot J\varphi]}. \quad (14.5)$$

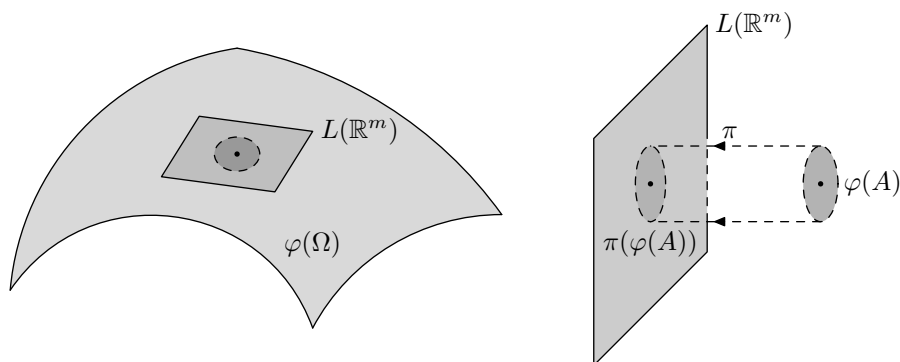


图 14.9 参数曲面面积的定义



注. (1) 如果  $\varphi(\mathbb{R}^m) \subset \mathbb{R}^m \times \{0\}$ , 则公式 (14.5) 变成了引理 13.4.5 中的等式; 如果  $m = 1$ , 则 (14.5) 就是连续可微曲线的弧长公式.

(2) 与曲线一样, 曲面有不同参数化的问题. 如果  $\phi: \Omega' \rightarrow \Omega$  是  $C^1$  的可逆映射, 则  $\varphi \circ \phi: \Omega' \rightarrow \mathbb{R}^m$  也是参数曲面, 它们的面积用 (14.5) 式定义出来是一致的 (习题).

(3) 利用线性代数中关于乘积矩阵的行列式的 Binet-Cauchy 定理, 如果  $\varphi$  的分量表示为

$$\varphi(u) = (\varphi_1(u_1, \dots, u_m), \dots, \varphi_n(u_1, \dots, u_m)),$$

则

$$\det[(J\varphi)^T \cdot J\varphi] = \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m \leq n} \left[ \det \left( \frac{\partial \varphi_{k_i}}{\partial u_j} \right)_{m \times m} \right]^2, \quad (14.6)$$

例如, 当  $m = n - 1$  时, 面积公式可写为

$$\sigma(\varphi(\Omega)) = \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}, \varphi_{i+1}, \dots, \varphi_n)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_{n-1})} \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (14.7)$$

**例 14.3.2.**  $\mathbb{R}^3$  中参数曲面的面积公式.

设  $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  ( $(u, v) \in D$ ) 为参数曲面, 则由 (14.5) 式以及前一例题, 其面积为

$$\sigma = \int_D \|r_u \times r_v\| du dv = \int_D \sqrt{EG - F^2} du dv, \quad (14.8)$$

其中

$$E = r_u \cdot r_u = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \quad G = r_v \cdot r_v = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2,$$

$$F = r_u \cdot r_v = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v.$$

特别地, 当曲面由方程

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D$$

给出时,  $r_x = (1, 0, f_x)$ ,  $r_y = (0, 1, f_y)$ , 因此

$$EG - F^2 = (1 + f_x^2)(1 + f_y^2) - (f_x f_y)^2 = 1 + f_x^2 + f_y^2,$$

曲面的面积公式成为

$$\sigma = \int_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy. \quad (14.9)$$

**例 14.3.3.** 求球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  的面积.

解. 二维球面的参数表示为

$$x = a \sin \varphi \cos \theta, \quad y = a \sin \varphi \sin \theta, \quad z = a \cos \varphi, \quad \varphi \in [0, \pi], \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

此时

$$r_\varphi = (a \cos \varphi \cos \theta, a \cos \varphi \sin \theta, -a \sin \varphi), \quad r_\theta = (-a \sin \varphi \sin \theta, a \sin \varphi \cos \theta, 0),$$

因此

$$EG - F^2 = a^4 \sin^2 \varphi,$$

从而球面面积为

$$\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi a^2 \sin \varphi d\varphi = 4\pi a^2.$$

例 14.3.4. 设  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  为连续可微函数,  $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ . 则  $\text{graph}(f)$  为  $\mathbb{R}^n$  中的超曲面, 其面积公式为

$$\sigma = \int_D \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}, \quad (14.10)$$

其中  $\nabla f = (f_{x_1}, \dots, f_{x_{n-1}})$  是  $f$  的梯度.

这是 (14.9) 的推广.  $\text{graph}(f)$  的参数表示为

$$\varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1})),$$

则

$$(J\varphi)^T \cdot J\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & f_{x_1} \\ 0 & 1 & \cdots & f_{x_2} \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & f_{x_{n-1}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ f_{x_1} & f_{x_2} & \cdots & f_{x_{n-1}} \end{pmatrix} = I_{n-1} + (\nabla f)^T \cdot \nabla f.$$

根据矩阵行列式的计算技巧, 有

$$\begin{aligned} \det[(J\varphi)^T \cdot J\varphi] &= \det[I_{n-1} + (\nabla f)^T \cdot \nabla f] \\ &= 1 + \nabla f \cdot (\nabla f)^T = 1 + \|\nabla f\|^2, \end{aligned}$$

由 (14.5) 即得

$$\sigma = \int_D \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}.$$

这是公式 (14.7) 的特殊情形.

例 14.3.5. 求  $\{x_1 + \cdots + x_n = a, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$  的面积, 其中  $a > 0$ .

解. 利用以前的记号, 记

$$\Delta_{n-1}(a) = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid x_1 + \cdots + x_{n-1} \leq a, x_i \geq 0, 1 \leq i \leq n-1\},$$

则所考虑的曲面有参数表示

$$\varphi: \Delta_{n-1}(a) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varphi(x) = (x, f(x)),$$

其中  $f(x) = a - x_1 - \cdots - x_{n-1}$ . 由 (14.10) 得

$$\sigma = \int_{\Delta_{n-1}(a)} \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2} = \int_{\Delta_{n-1}(a)} \sqrt{n},$$

再根据第十三章中单形的体积公式得

$$\sigma = \sqrt{n} \sigma(\Delta_{n-1}(a)) = \frac{\sqrt{n}}{(n-1)!} a^{n-1}.$$

**例 14.3.6.** 求球面  $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = a^2$  的面积.

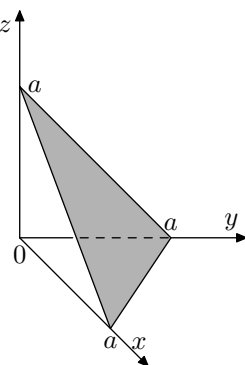


图 14.10 单形的面

**解.** 根据对称性, 只要计算上半球面的面积即可. 上半球面的方程为

$$w = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2,$$

此时,

$$1 + \|\nabla w\|^2 = 1 + (-x/w)^2 + (-y/w)^2 + (-z/w)^2 = (a/w)^2,$$

根据 (14.10) 式有

$$\sigma = 2 \int_{x^2+y^2+z^2 \leq a^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}} dx dy dz,$$

利用  $\mathbb{R}^3$  中的球面坐标, 有

$$\sigma = 2 \int_0^a \frac{ar^2}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 8\pi \int_0^a \frac{ar^2}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr,$$

在上式中利用变量代换  $r = a \sin t$ , 最后得

$$\sigma = 8\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3 \sin^2 t dt = 2\pi^2 a^3.$$

这个例题还可以用  $\mathbb{R}^4$  中的球面坐标来做, 这样可以避免  $w = 0$  的问题.  $\square$

值得指出的是, 我们在定义参数曲面的面积时要求曲面是  $C^1$  的, 这主要是要用到曲面的切平面. 我们将曲面上无穷小区域的面积近似地看成它在切平面上的投影的面积, 求和再取极限以后定义为曲面的面积. 这和曲线的长度的定义似乎有些不同. 曲线的长度可以用折线段的长度去逼近. 那么, 能否象曲线那样, 通过在曲面上取分割, 然后用以分点为顶点的多边形 (比如三角形) 的面积和去逼近曲面的面积呢? Schwarz 曾经举过一个例子 (圆柱面) 说明这样的定义是行不通的. 对于一般的曲面, 定义面积需要引入 Hausdorff 测度的概念, 进一步的讨论超出了本课程的范围, 有兴趣的读者可以参看几何测度论的著作.

有了曲面面积的定义, 我们可以讨论曲面上有界函数的积分, 为了简单起见, 只考虑连续函数的情形.

**定义 14.3.2** (第一型曲面积分). 设  $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  为  $C^1$  的参数曲面,  $f$  是定义在此曲面  $\Sigma$  上的连续函数, 则  $f$  在  $\Sigma$  上的曲面积分定义为

$$\int_{\Sigma} f d\sigma = \int_{\Omega} f \sqrt{\det[(J\varphi)^T \cdot J\varphi]}.$$

第一型曲面积分的物理含义: 分布在表面上的某种物质, 如果其密度函数为  $\rho$ , 则  $\rho$  在表面上的积分就是物质的质量.

**例 14.3.7.** 计算曲面积分  $\int_{\Sigma} \frac{1}{z} d\sigma$ , 其中  $\Sigma$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  被平面  $z = h$  所截下的顶部, 此处  $0 < h < a$ .

**解.**  $\Sigma$  的方程为

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq a^2 - h^2.$$

因此

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \frac{1}{z} d\sigma &= \int_{x^2+y^2 \leq a^2-h^2} \frac{1}{z} \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\ &= \int_{x^2+y^2 \leq a^2-h^2} \frac{a}{a^2-x^2-y^2} dx dy \\ &= \int_0^{\sqrt{a^2-h^2}} \frac{ar}{a^2-r^2} dr \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 2\pi a \ln\left(\frac{a}{h}\right). \end{aligned}$$

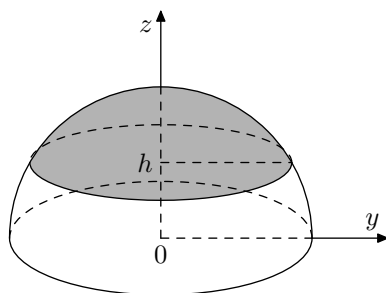


图 14.11 球帽

**例 14.3.8.** 设抛物面  $z = 2 - (x^2 + y^2)$ ,  $z \geq 0$  上分布着密度为  $\rho(x, y) = x^2 + y^2$  的物质, 求该物质的质量.

**解.** 该物质的质量  $m$  为  $\rho(x, y) = x^2 + y^2$  在表面上的积分, 即

$$\begin{aligned} m &= \int_{x^2+y^2 \leq 2} (x^2 + y^2) \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\ &= \int_{x^2+y^2 \leq 2} (x^2 + y^2) \sqrt{1+4(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \sqrt{1+4r^2} r dr \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{149}{30} \pi. \end{aligned}$$

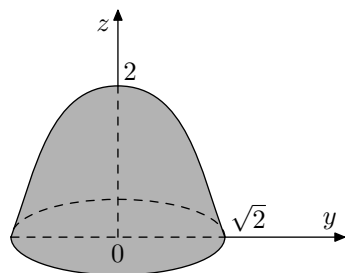


图 14.12 抛物面

## 习题 14.3

1. 用重积分的变量替换公式证明, 参数曲面的面积与参数的选取无关.
2. 求  $z = axy$  包含在圆柱  $x^2 + y^2 = a^2$  内的面积.
3. 求锥面  $z^2 = x^2 + y^2$  被柱面  $x^2 + y^2 - 2ax = 0$  在  $z \geq 0$  的部分截下的面积.
4. 计算球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  被柱面  $x^2 + y^2 = ax$  所截下的面积.
5. 计算曲面  $|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| = a$  的面积.
6. 计算  $n$  维球面  $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = a^2$  的面积.
7. 重新研究第七章第一节中几种曲面的面积公式, 它们和本节中的定义一致吗?
8. 计算下列曲面积分:
  - (1)  $\int_{\Sigma} (x + y + z) d\sigma$ ,  $\Sigma$  为  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $z \geq 0$ ;
  - (2)  $\int_{\Sigma} \frac{d\sigma}{(1 + x + y)^2}$ ,  $\Sigma$  为  $x + y + z = 1$ ,  $x, y, z \geq 0$ ;
  - (3)  $\int_{\Sigma} \sqrt{x^2/a^4 + y^2/b^4 + z^2/c^4} d\sigma$ ,  $\Sigma$  为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ;
  - (4)  $\int_{\Sigma} xyz d\sigma$ ,  $\Sigma$  为  $z = x^2 + y^2$ ,  $z \leq 1$ .
9. 设球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  上分布着密度为  $\rho$  的均匀物质, 求该物质的引力场.
10. 用  $S^2$  表示球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . 当  $f$  连续时, 证明

$$\int_{S^2} f(ax + by + cz) d\sigma = 2\pi \int_{-1}^1 f(u\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}) du.$$

## §14.4 第二型曲面积分

如同在曲线上一样, 在曲面上也存在着第二种类型的积分, 这种积分涉及到“方向”的概念. 参数曲线的方向是由其参数决定的, 参数曲面也是如此. 设  $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  为参数曲面, 如果  $\psi: \Omega' \rightarrow \Omega$  为  $C^1$  的可逆映射, 则  $\varphi \circ \psi$  也是参数曲面, 它是  $\varphi$  的重新参数化. 如果  $\det J\psi$  恒为正, 则称  $\varphi$  和  $\varphi \circ \psi$  是同向的; 如果  $\det J\psi$  恒为负, 则称  $\varphi$  和  $\varphi \circ \psi$  是反向的.

**例 14.4.1.**  $\mathbb{R}^n$  上的定向.

$\mathbb{R}^n$  上的标准直角坐标决定的定向称为标准定向 (正向).  
可逆映射

$$f(x_1, \dots, x_n) = (-x_1, x_2, \dots, x_n)$$

的 Jacobi 行列式为  $-1$ , 它决定的定向和标准定向相反.

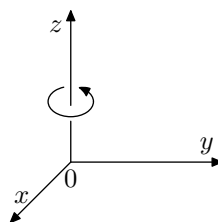


图 14.13 定向

在  $\mathbb{R}^n$  上只有两个定向, 即如果  $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  为可逆  $C^1$  映射, 则  $\psi$  要么和标准定向同向, 要么和标准定向反向. 这是因为, 如果  $\psi$  为  $C^1$  可逆映射, 则  $\det J\psi$  是  $\mathbb{R}^n$  上处处非零的连续函数, 由连续函数的介值定理即知  $\det J\psi$  要么恒正, 要么恒负. 类似的结果对于连通的曲面也成立.

**例 14.4.2.** 超曲面的定向.

先考虑  $\mathbb{R}^3$  中的参数曲面  $r: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , 其方程记为

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in \Omega.$$

我们知道, 在  $r(u, v)$  处  $r_u = (x_u, y_u, z_u)$  和  $r_v = (x_v, y_v, z_v)$  是切向量, 而

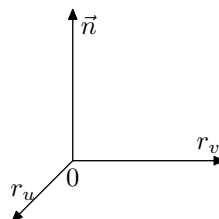


图 14.14 曲面的定向

$$r_u \times r_v = (y_u z_v - z_u y_v, z_u x_v - x_u z_v, x_u y_v - y_u x_v) = \left( \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right)$$

是法向量. 如果  $(u, v) = \varphi(s, t)$  是曲面的重新参数化, 则

$$r_s \times r_t = (r_u \times r_v) \cdot \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} = (r_u \times r_v) \cdot \det J\varphi,$$

这说明, 参数  $(u, v)$  和  $(s, t)$  同向 (反向) 时, 它们决定的法向量同向 (反向). 因此,  $\mathbb{R}^3$  中曲面的定向也可以用其单位法向量  $\vec{n}$  表示, 其中

$$\vec{n} = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|}.$$

同向的参数给出相同的单位法向量, 反向的参数给出相反的单位法向量.

记

$$\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma),$$

其中  $\alpha, \beta, \gamma$  分别是  $\vec{n}$  与三个坐标轴的夹角. 当  $\cos \gamma \geq 0$ , 即  $\vec{n}$  和  $z$  轴的夹角不超过  $\pi/2$  时, 单位法向量所决定的方向称为参数曲面的上侧方向; 反之, 单位法向量所决定的方向称为参数曲面的下侧方向. 对于封闭的曲面, 指向曲面所围区域外部的单位法向量所决定的方向称为参数曲面的外侧方向, 指向曲面所围区域内部的单位法向量所决定的方向称为参数曲面的内侧方向.

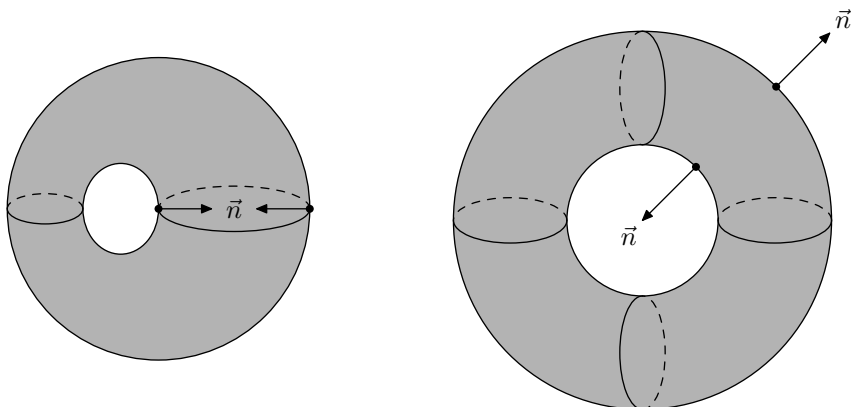


图 14.15 内法向和外法向

上面的讨论可完全类似地推广到  $\mathbb{R}^n$  中的超曲面上. 设超曲面的方程为

$$r(u_1, \dots, u_{n-1}) = (x_1(u_1, \dots, u_{n-1}), \dots, x_n(u_1, \dots, u_{n-1})),$$

则其法向量为  $\vec{N}(u) = (N_1, \dots, N_n)$ , 其中

$$N_i(u) = (-1)^{i-1} \frac{\partial(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_{n-1})}.$$

如果  $u = \varphi(v)$  为超曲面的重新参数化, 则法向量之间满足关系

$$\vec{N}(v) = \vec{N}(u) \cdot \det J\varphi,$$

因此同向的参数给出同向的法向量, 反向的参数给出反向的法向量.

有了参数曲面的定向, 我们可以定义第二型的曲面积分了. 为了简单起见, 先考虑  $\mathbb{R}^3$  中的曲面.

**定义 14.4.1** (第二型曲面积分). 设  $\Sigma$  为  $\mathbb{R}^3$  中的曲面, 其参数表示为

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in \Omega.$$

对于定义在  $\Sigma$  上的连续向量值函数  $(P, Q, R)$ , 定义其曲面积为

$$I = \int_{\Omega} P \cdot \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} du dv + \int_{\Omega} Q \cdot \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} du dv + \int_{\Omega} R \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv,$$

也记为

$$I = \int_{\Sigma} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy.$$

注. (1) 利用前面的记号, 第二型曲面积分可以写为

$$\int_{\Sigma} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \int_{\Omega} (P, Q, R) \cdot (r_u \times r_v) du dv,$$

再由第一型曲面积分的定义, 上式还可以写为

$$\int_{\Sigma} Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy = \int_{\Sigma} (P, Q, R) \cdot \vec{n} d\sigma,$$

即取定了方向后第二型曲面积分可以转化为第一型曲面积分.

(2) 需要注意的是,  $(P, Q, R)$  的第二型曲面积分在两个同向的参数下其值不变, 在反向的两个参数下其值正好相差一个符号. 即, 用  $-\Sigma$  表示反向曲面时有

$$\int_{-\Sigma} Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy = - \int_{\Sigma} Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy.$$

(3) 完全类似地,  $\mathbb{R}^n$  中的超面上的第二型曲面积分可以定义为

$$\int_{\Sigma} P_1 dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n + \cdots + P_n dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1} = \int_{\Omega} (P_1, \cdots, P_n) \cdot \vec{N}(u) du_1 \cdots du_{n-1}.$$

对于一般的  $m$  维参数曲面也可以定义第二型的曲面积分, 我们将在下一章中作进一步的讨论.

第二型曲面积分的物理含义: 设空间中有流速为  $\vec{v} = (P, Q, R)$  的流体, 求单位时间内通过曲面  $\Sigma$  的流体的流量. 用通常的“微元法”计算流量如下: 任取  $\Sigma$  的一小片, 其面积记为  $\Delta\sigma$ , 经过这一小片的流体速度为  $\vec{v}$ , 曲面的单位法向量为  $\vec{n}$ , 则单位时间内通过这一小片曲面的流体的流量为  $\vec{v} \cdot \vec{n} \Delta\sigma$ . 于是单位时间内经过  $\Sigma$  的流量为积分

$$\int_{\Sigma} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma,$$

因此求流量的问题就是面上的第二型积分的问题. 从这个例子也可以看出第二型的曲面积分是依赖于方向的.

#### 例 14.4.3. 计算积分

$$\int_{\Sigma} xyz dx \wedge dy,$$

其中  $\Sigma$  是四分之一球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0$ , 方向为外侧.

**解.** 将曲面分成两部分, 即

$$\Sigma_1: z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, (x, y) \in \Omega = \{x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

和

$$\Sigma_2: z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}, (x, y) \in \Omega = \{x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

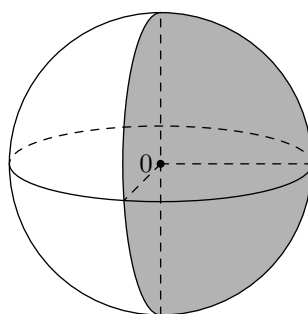


图 14.16 球面外侧



在曲面上, 参数  $(x, y)$  决定的法向量为  $(-z_x, -z_y, 1)$ , 因此, 这个参数在  $\Sigma_1$  上决定的方向就是外侧方向, 在  $\Sigma_2$  上决定的方向是内侧方向. 按照定义, 有

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma} xyz \, dx \wedge dy &= \int_{\Sigma_1} xyz \, dx \wedge dy + \int_{\Sigma_2} xyz \, dx \wedge dy \\ &= \int_{\Omega} xy \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx \, dy - \int_{\Omega} xy (-\sqrt{1-x^2-y^2}) \, dx \, dy \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^3 \sin \theta \cos \theta \sqrt{1-r^2} \, dr \\ &= \frac{2}{15}.\end{aligned}$$

**例 14.4.4.** 计算积分

$$I = \int_{\Sigma} x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy,$$

其中  $\Sigma$  为球面  $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ , 方向为外侧.

**解.** 取球面坐标

$$x = a + R \sin \varphi \cos \theta, \quad y = b + R \sin \varphi \sin \theta, \quad z = c + R \cos \varphi, \quad \varphi \in [0, \pi], \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

计算表明

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(\varphi, \theta)} = R^2 \sin^2 \varphi \cos \theta, \quad \frac{\partial(z, x)}{\partial(\varphi, \theta)} = R^2 \sin^2 \varphi \sin \theta, \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(\varphi, \theta)} = R^2 \cos \varphi \sin \varphi,$$

因此  $(\varphi, \theta)$  决定的法向量是外侧的, 由定义, 有

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (a + R \sin \varphi \cos \theta)^2 R^2 \sin^2 \varphi \cos \theta \, d\varphi \, d\theta + \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (c + R \cos \varphi)^2 R^2 \cos \varphi \\ &\quad \times \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta + \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (b + R \sin \varphi \sin \theta)^2 R^2 \sin^2 \varphi \sin \theta \, d\varphi \, d\theta \\ &= \frac{8\pi}{3} (a + b + c) R^3.\end{aligned}$$

**注.** 事实上, 球面的单位外法向量为  $R^{-1} \cdot (x-a, y-b, z-c)$ , 利用这一点可以将球面上的第二型积分化为第一型积分, 请读者自行验算.

**例 14.4.5.** 计算积分

$$I = \int_{\Sigma} xyzw \, dx \wedge dy \wedge dz,$$

其中  $\Sigma$  为四维单形

$$x + y + z + w \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0, \quad w \geq 0$$

的边界, 方向为外侧.

解.  $\Sigma$  为  $\mathbb{R}^4$  中的超曲面, 它由五个部分组成, 其中四部分分别位于坐标平面上, 在这四部分上被积函数均为零. 第五部分为

$$\Sigma': w = 1 - x - y - z, \quad (x, y, z) \in \Omega = \{x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\},$$

其法向量为  $(-w_x, -w_y, -w_z, 1) = (1, 1, 1, 1)$ , 这是外侧方向, 因此

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Sigma'} xyzw \, dx \wedge dy \wedge dz \\ &= \int_{\Omega} xyz(1 - x - y - z) \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_{\{y+z \leq 1, y, z \geq 0\}} yz \int_0^{1-y-z} x \, dx \, dy \, dz - 3 \int_{\{y+z \leq 1, y, z \geq 0\}} yz \int_0^{1-y-z} x^2 \, dx \, dy \, dz \\ &= \frac{1}{2} \int_{\{y+z \leq 1, y, z \geq 0\}} yz(1 - y - z)^2 \, dy \, dz - \int_{\{y+z \leq 1, y, z \geq 0\}} yz(1 - y - z)^3 \, dy \, dz \\ &= \frac{1}{7!}. \end{aligned}$$

在计算的过程中我们用到了  $x, y, z$  的对称性. □

#### 习题 14.4

1. 用多重积分的变量替换公式证明, 第二型曲面积分在两个同向的参数下其值不变, 在反向的两个参数下其值正好相差一个符号.

2. 计算积分

$$I = \int_{\Sigma} x \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + z \, dx \wedge dy,$$

其中  $\Sigma$  为球面  $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$  的外侧.

3. 计算积分

$$I = \int_{\Sigma} yz \, dy \wedge dz + zx \, dz \wedge dx + xy \, dx \wedge dy,$$

其中  $\Sigma$  是柱面  $x^2 + y^2 = a^2$  的外侧.

4. 计算积分

$$I = \int_{\Sigma} x^3 \, dy \wedge dz,$$

其中  $\Sigma$  是上半椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, z \geq 0$  的上侧.

5. 计算积分

$$I = \int_{\Sigma} yz \, dy \wedge dz + zx \, dz \wedge dx + xy \, dx \wedge dy,$$

其中  $\Sigma$  是四面体  $x + y + z \leq a, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$  的外侧.

## 6. 计算积分

$$I = \int_{\Sigma} x^3 dy \wedge dz + y^3 dz \wedge dx + z^3 dx \wedge dy,$$

其中  $\Sigma$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  的内侧.

## 7. 计算积分

$$I = \int_{\Sigma} x dy \wedge dz \wedge dw,$$

其中  $\Sigma$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = a^2$  的外侧.

## 8. 计算积分

$$I = \int_{\Sigma} x dy \wedge dz \wedge dw,$$

其中  $\Sigma$  是曲面  $|x| + |y| + |z| + |w| = a$  的外侧.

## §14.5 几类积分之间的联系

我们知道, Newton-Leibniz 公式是微积分的一个核心定理. 对于一元函数来说, Newton-Leibniz 公式有两种表现形式:

- 如果  $f(x)$  为  $[a, b]$  上的连续函数, 则  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  为  $[a, b]$  上的可微函数, 且

$$F'(x) = f(x), \quad \text{或} \quad \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x);$$

- 设  $f$  在  $[a, b]$  上连续可微, 则

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a), \quad \text{或} \quad \int_a^b df = f \Big|_a^b.$$

我们现在想把这些公式推广到多元函数. 在这一节我们只考虑几个特殊的情形, 一般的情形将在下一章中讨论.

## §14.5.1 余面积公式



本小节内容可以作为选读材料.

设  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  为  $C^1$  函数, 且  $\|\nabla f\| \neq 0$ . 取区间  $[a, b] \subset f(\mathbb{R}^n)$ , 则当  $t \in [a, b]$  时,  $f^{-1}(t)$  为  $\mathbb{R}^n$  中的超曲面. 事实上, 任取  $x^0 \in f^{-1}(t)$ , 因为  $\|\nabla f(x^0)\| \neq 0$ , 不妨设  $\frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) \neq 0$ . 根据隐函数定理, 方程

$$f(x_1, \dots, x_n) - t = 0 \tag{14.11}$$

存在  $C^1$  的 (局部) 解

$$x_n = \varphi_t(x_1, \dots, x_{n-1}), \quad (x_1, \dots, x_{n-1}) \in D \subset \mathbb{R}^{n-1}. \quad (14.12)$$

即在  $x^0$  附近  $f^{-1}(t)$  是参数曲面. 根据隐函数定理, 上式中的  $\varphi_t$  关于  $t$  也是  $C^1$  的. 在 (14.11) 中对  $t$  求导, 得

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t} - 1 = 0,$$

即

$$\frac{\partial x_n}{\partial t} = \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^{-1}.$$

考虑变量替换  $\Phi: D \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

$$\Phi(x_1, \dots, x_{n-1}, t) = (x_1, \dots, x_{n-1}, \varphi_t(x_1, \dots, x_{n-1})),$$

易见其 Jacobi 行列式为

$$\det J\Phi = \frac{\partial \varphi_t}{\partial t} = \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^{-1}.$$

如果记  $\Omega = \Phi(D \times [a, b])$ , 根据多重积分的变量替换公式就有

$$v(\Omega) = \int_{D \times [a, b]} \left| \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^{-1} \right| dx_1 \cdots dx_{n-1} dt = \int_a^b dt \int_D \left| \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^{-1} \right| dx_1 \cdots dx_{n-1}. \quad (14.13)$$

另一方面, 我们考虑水平集  $f^{-1}(t)$  上的第一型曲面积分. 根据隐函数定理, (14.12) 中的参数方程满足条件

$$\frac{\partial \varphi_t}{\partial x_i} = -\frac{\partial f}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^{-1}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

因此

$$1 + \|\nabla \varphi_t\|^2 = \|\nabla f\|^2 \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^{-2}.$$

根据 (14.10) 和第一型曲面积分的定义得

$$\int_{f^{-1}(t) \cap \Omega} \frac{d\sigma}{\|\nabla f\|} = \int_D \frac{1}{\|\nabla f\|} \sqrt{1 + \|\nabla \varphi_t\|^2} dx_1 \cdots dx_{n-1} = \int_D \left| \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^{-1} \right| dx_1 \cdots dx_{n-1},$$

因此 (14.13) 可改写为

$$v(\Omega) = \int_a^b dt \int_{f^{-1}(t) \cap \Omega} \frac{1}{\|\nabla f\|} d\sigma. \quad (14.14)$$

这个公式称为余面积公式(co-area formula). 类似的推导可以得到这个公式的一般情形, 它可以看成重积分“投影法”的一般形式.

**定理 14.5.1** (余面积公式). 设  $f$  条件如上. 如果  $g$  为  $f^{-1}([a, b])$  上的连续函数, 则

$$\int_{f^{-1}([a, b])} g(x) dx_1 \cdots dx_n = \int_a^b dt \int_{f^{-1}(t)} \frac{g}{\|\nabla f\|} d\sigma.$$

这个公式将多重积分和第一型曲面积分联系起来了. 我们看几个例子.

**例 14.5.1.**  $f$  为坐标函数  $f(x) = x_n$ .

当  $f(x) = x_n$  时,  $\|\nabla f\| = 1$ . 设  $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ , 则余面积公式成为

$$\int_{D \times [a, b]} g(x) dx_1 \cdots dx_n = \int_a^b dx_n \int_D g(x) dx_1 \cdots dx_{n-1},$$

这也就是多重积分化累次积分的公式.

**例 14.5.2.** 球体的体积和球面的面积之间的关系.

考虑函数  $f(x) = r = \|x\|$ , 当  $x \neq 0$  时  $\|\nabla r\| = 1$ , 根据余面积公式就得到

$$v(B_R) = v(f^{-1}[0, R]) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v(f^{-1}[\varepsilon, R]) = \int_0^R \sigma(S_t) dt, \quad (14.15)$$

其中,  $B_R$  是半径为  $R$  的球体  $\{\|x\| \leq R\}$ ,  $S_t$  是半径为  $t$  的球面  $\{\|x\| = t\}$ . 特别地, 在 (14.15) 中关于  $R$  求导, 得

$$\sigma(S_R) = \frac{d}{dR} v(B_R),$$

我们已经知道球体的体积公式  $v(B_R) = \omega_n R^n$ , 因此从上式可立即得到球面的面积公式

$$\sigma(S_R) = n\omega_n R^{n-1}.$$

例如,  $n = 2$  时半径为  $R$  的圆盘的面积为  $\pi R^2$ , 从而半径为  $R$  的圆周的周长为  $(\pi R^2)' = 2\pi R$ ;  $n = 3$  时, 半径为  $R$  的球体体积为  $(4/3)\pi R^3$ , 因此半径为  $R$  的球面的面积为  $((4/3)\pi R^3)' = 4\pi R^2$ .

需要说明的是, 如果函数  $f$  有有限个临界点 (驻点), 则在广义积分的意义下, 余面积公式也成立. 当  $m \leq n$  时, 对于满足一定条件的映射  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , 也有更一般的余面积公式.  $\square$

### §14.5.2 Green 公式

考虑平面  $\mathbb{R}^2$  上的有界闭域  $\Omega$ , 假定其边界由有限条  $C^1$  曲线组成.  $\mathbb{R}^2$  上的标准定向限制在  $\Omega$  上就得到  $\Omega$  的定向.  $\Omega$  的边界  $\partial\Omega$  有所谓的诱导定向. 这个诱导定向定义如下: 设  $(x(t), y(t))$  为  $\partial\Omega$  的一段参数曲线, 则  $(x'(t), y'(t))$  为切向量,

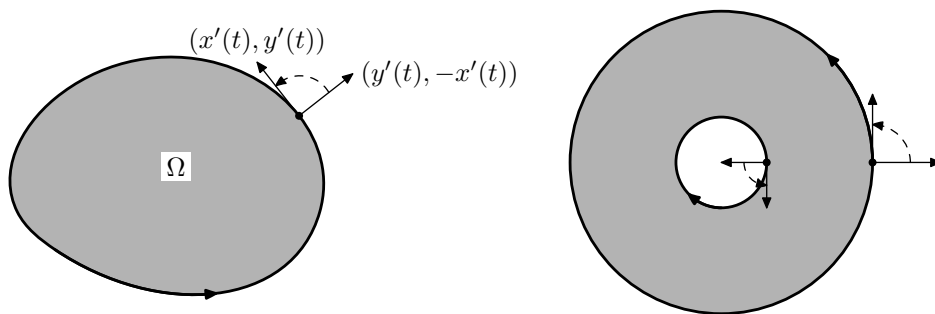


图 14.17 诱导定向

$(y'(t), -x'(t))$  为法向量. 如果  $(y'(t), -x'(t))$  为相对于区域  $\Omega$  的外法向量, 则参数  $t$  决定的边界方向称为诱导定向. 直观上看, 从外法向到切向的旋转方向是逆时针的, 这种确定边界定向的方法又称为“右手法则”.

**例 14.5.3.** 环形区域的边界定向.

设  $b > a > 0$ , 平面区域  $\{a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$  是半径为  $b$  的大圆盘内挖去一个半径为  $a$  的小圆盘形成的环形区域. 它的边界由圆周  $\{x^2 + y^2 = b^2\}$  和  $\{x^2 + y^2 = a^2\}$  组成. 按照诱导定向的定义, 在大圆  $\{x^2 + y^2 = b^2\}$  上, 方向是逆时针的; 而在小圆  $\{x^2 + y^2 = a^2\}$  上, 方向应是顺时针的.  $\square$

下面的重要结果将二重积分和第二型曲线积分联系起来了, 这个结果通常称为 Green 公式.

**定理 14.5.2 (Green).** 设  $\Omega$  为平面有界区域, 其边界由有限条  $C^1$  曲线组成, 边界的定向为诱导定向. 如果  $P, Q$  为  $\Omega$  上的连续可微函数, 则

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial \Omega} P dx + Q dy.$$

我们只证明这个定理的一个特殊情形, 一般的情形可以借助下一章的单位分解定理转化为这种特殊情形. 先做一些预备工作.

设  $\varphi: D \rightarrow \Omega$  为  $C^2$  的可逆映射, 记为

$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v)), \quad (u, v) \in D.$$

它可以看成  $\mathbb{R}^2$  内的一个坐标变换. 假设  $\varphi$  是保持定向的, 且  $\varphi(\partial D) = \partial \Omega$ . 我们考察在这个坐标变换下二重积分和第二型曲线积分如何变化. 为此设  $\varphi$  将曲线  $\gamma(t) = (u(t), v(t))$  映为曲线  $\sigma(t) \subset \partial \Omega$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$ . 按照第二型曲线积分的定义, 有

$$\int_{\sigma} P dx + Q dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(\sigma(t))x'(t) + Q(\sigma(t))y'(t)] dt.$$

根据复合求导的链规则, 有

$$\begin{aligned} P(\sigma(t))x'(t) + Q(\sigma(t))y'(t) &= P \cdot (x_u \cdot u'(t) + x_v \cdot v'(t)) + Q \cdot (y_u \cdot u'(t) + y_v \cdot v'(t)) \\ &= (P \cdot x_u + Q \cdot y_u)u'(t) + (P \cdot x_v + Q \cdot y_v)v'(t). \end{aligned}$$

如果记

$$\tilde{P} = P \cdot x_u + Q \cdot y_u, \quad \tilde{Q} = P \cdot x_v + Q \cdot y_v,$$

则上面的计算表明

$$\int_{\gamma} \tilde{P}du + \tilde{Q}dv = \int_{\sigma} Pdx + Qdy,$$

用到整个区域边界上就得到

$$\int_{\partial D} \tilde{P}du + \tilde{Q}dv = \int_{\partial \Omega} Pdx + Qdy, \quad (14.16)$$

这是第二型曲线积分在坐标变换下的变换公式.

同理, 根据复合求导的链规则, 有

$$\frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\partial P}{\partial x} \cdot x_u + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot y_u, \quad \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial P}{\partial x} \cdot x_v + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot y_v,$$

由此得到

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x_u y_v - y_u x_v) = \frac{\partial P}{\partial v} x_u - \frac{\partial P}{\partial u} x_v,$$

同理可得

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x_u y_v - y_u x_v) = \frac{\partial Q}{\partial u} y_v - \frac{\partial Q}{\partial v} y_u,$$

因此有

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} &= \left( \frac{\partial P}{\partial u} x_v + \frac{\partial Q}{\partial u} y_v \right) - \left( \frac{\partial P}{\partial v} x_u + \frac{\partial Q}{\partial v} y_u \right) \\ &= \frac{\partial(Px_v + Qy_v)}{\partial u} - \frac{\partial(Px_u + Qy_u)}{\partial v} \\ &= \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial u} - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial v}. \end{aligned}$$

当  $\varphi$  保持定向时,  $x_u y_v - y_u x_v > 0$ , 根据重积分的变量代换公式就有

$$\int_D \left( \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial u} - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial v} \right) du dv = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (14.17)$$

将 (14.16) 和 (14.17) 结合起来我们就发现, 要说明 Green 公式在  $\Omega$  上成立, 只要说明它在  $D$  上成立即可, 反之亦然.

因此, 证明 Green 公式的想法就是将一般的区域变为较为简单的区域, 然后在较为简单的区域上考虑问题. 为此仍设  $\sigma(t) = (x(t), y(t))$  为  $\partial \Omega$  的一段  $C^2$  参数曲线,  $t \in [\alpha, \beta]$ . 设  $t_0 \in (\alpha, \beta)$ , 且  $x'(t_0) \neq 0$ . 通过适当的平移变换以及保定向的正交

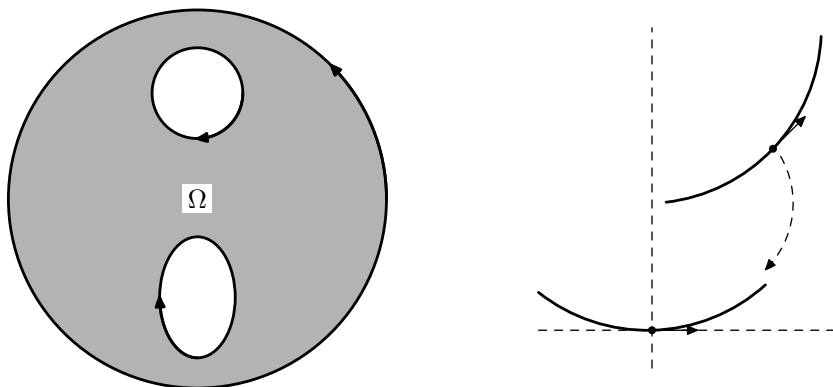


图 14.18 区域和它的边界

变换, 不妨设  $(x(t_0), y(t_0)) = (0, 0)$ ,  $(x'(t_0), y'(t_0)) = (1, 0)$ . 因为  $x'(t_0) > 0$ , 由反函数定理, 在  $t = t_0$  附近  $t$  可以表示为  $x$  的函数, 从而曲线  $\sigma(t)$  可以用参数  $x$  表示, 即  $\sigma$  可以表示为  $\sigma(x) = (x, \phi(x))$ ,  $x \in [-a, a]$ . 这个过程就是将曲线重新参数化, 使得  $\sigma$  表示为函数  $\phi(x)$  的图像. 由于  $\phi(0) = 0$ , 存在  $0 < \varepsilon < a/2$ , 使得

$$|\phi(x)| < a/2, \quad \forall x \in [-\varepsilon, \varepsilon].$$

现在我们再作一个假设: 设  $P, Q$  在  $B_\varepsilon(0)$  之外恒为零. 这样, 我们就只需在简单区域  $\Omega \cap B_\varepsilon(0)$  中考虑 Green 公式即可. 由于  $(1, 0)$  是原点处的切向, 按照右手法则,  $(0, -1)$  应是原点处的单位外法向, 因此区域位于  $\phi(x)$  图像的上方.

为了简化区域, 进一步考虑坐标变换

$$\varphi(x, y) = (x, y - \phi(x)), \quad (x, y) \in [-a, a] \times [-a, a].$$

这是保持定向的坐标变换,  $\varphi(x, \phi(x)) = (x, 0)$ , 即  $\varphi$  将  $\sigma$  变为了  $x$  轴, 且

$$\varphi(\Omega \cap B_\varepsilon(0)) \subset [-a, a] \times [-a, a].$$

由于边界诱导定向要求法向量  $(0, -1)$  方向向外, 因此  $\varphi(B_\varepsilon(0) \cap \Omega)$  实际上包含于上半平面.

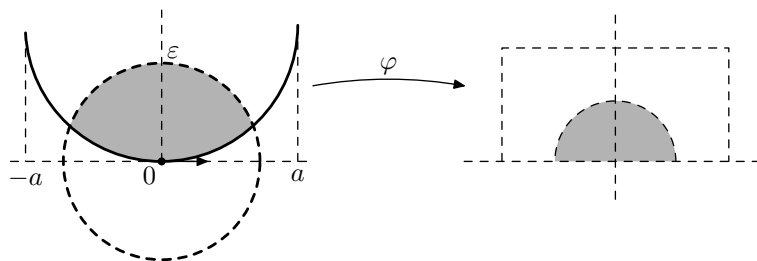


图 14.19 区域变换



由于  $P, Q$  在  $B_\varepsilon(0)$  之外恒为零, 我们现在只要在矩形  $[-a, a] \times [0, a]$  上证明 Green 公式就可以了. 矩形  $I = [-a, a] \times [0, a]$  由四条边组成, 其中  $(x, 0)$  ( $x \in [-a, a]$ ) 代表原来的曲线  $\sigma$ , 而  $P, Q$  在其余三条边附近均为零. 因此

$$\int_{\partial I} Pdx + Qdy = \int_{-a}^a P(x, 0)dx,$$

且

$$\begin{aligned} \int_I \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy &= \int_0^a dy \int_{-a}^a \frac{\partial Q}{\partial x} dx - \int_{-a}^a dx \int_0^a \frac{\partial P}{\partial y} dy \\ &= \int_0^a [Q(a, y) - Q(-a, y)] dy - \int_{-a}^a [P(x, a) - P(x, 0)] dx \\ &= \int_{-a}^a P(x, 0) dx, \end{aligned}$$

这说明 Green 公式在  $I$  上成立.  $\square$

注. 在证明过程中, 我们假设了边界是  $C^2$  曲线, 这个条件可以减弱为  $C^1$ . 更一般地, 利用光滑逼近可以证明, 当区域边界由有限条可求长连续曲线组成时, Green 公式仍然成立. 特别地, 当边界由分段  $C^1$  曲线组成时, Green 公式成立.

#### 例 14.5.4. 简单闭曲线所围区域的面积.

设  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  ( $t \in [\alpha, \beta]$ ) 为  $\mathbb{R}^2$  上分段连续可微的简单闭曲线, 它围成的区域记为  $\Omega$ . 在 Green 公式中取  $P(x, y) = -y$ ,  $Q(x, y) = x$ , 则得到如下面积公式

$$\begin{aligned} \sigma(\Omega) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \frac{1}{2} \int_{\Omega} Pdx + Qdy \\ &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [x(t)y'(t) - x'(t)y(t)] dt, \end{aligned} \quad (14.18)$$

其中, 参数  $t$  选取的方向是逆时针的.

作为例子, 考虑椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  所围成的面积. 椭圆的参数方程为

$$x(t) = a \cos t, \quad y(t) = b \sin t, \quad t \in [0, 2\pi],$$

于是其面积为

$$\sigma = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t \cdot b \cos t + a \sin t \cdot b \sin t) dt = \pi ab.$$

**例 14.5.5.** 计算积分

$$I = \int_C x^2 y dx - xy^2 dy,$$

其中  $C$  是上半圆  $x^2 + y^2 = a^2, y \geq 0$ , 逆时针方向.

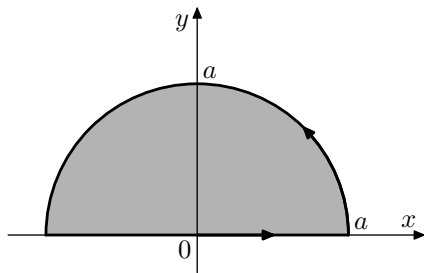


图 14.20 上半圆

**解.** 考虑上半圆的边界, 它由  $C$  以及  $(x, 0)$  ( $x \in [-a, a]$ ) 组成, 在上半圆区域上用 Green 公式, 得

$$I = \int_{\{x^2+y^2 \leq a^2, y \geq 0\}} (-x^2 - y^2) dx dy = - \int_0^\pi d\theta \int_0^a r^3 dr = -\frac{\pi}{4} a^4.$$

**例 14.5.6.** 设  $\Omega$  为包含原点的有界区域, 其边界为  $C^1$  曲线, 方向为诱导定向. 计算积分

$$I = \int_{\partial\Omega} \frac{-y dx}{x^2 + y^2} + \frac{x dy}{x^2 + y^2}.$$

**解.** 取中心为原点的小圆  $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$ , 使得  $B_\varepsilon(0) \subset \Omega$ . 小圆上的定向规定为逆时针方向 (从而与诱导定向相反), 在区域  $\Omega - B_\varepsilon(0)$  中利用 Green 公式, 得

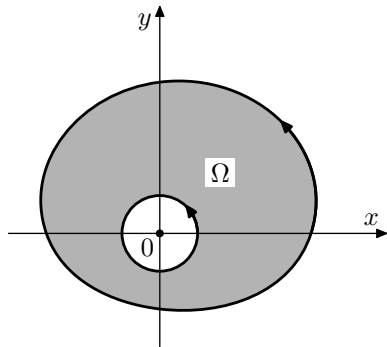


图 14.21 有界区域

$$\begin{aligned} I &= \int_{x^2+y^2=\varepsilon^2} \left( \frac{-y dx}{x^2 + y^2} + \frac{x dy}{x^2 + y^2} \right) \\ &\quad + \int_{\Omega - B_\varepsilon(0)} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \right] dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi. \end{aligned}$$

**例 14.5.7.** 平面的分部积分公式.

在 Green 公式的条件下, 如果  $v$  为  $C^1$  函数, 则由

$$\frac{\partial(Qv)}{\partial x} - \frac{\partial(Pv)}{\partial y} = \left[ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] v + \left[ Q \frac{\partial v}{\partial x} - P \frac{\partial v}{\partial y} \right]$$

可得

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] v dx dy = \int_{\partial\Omega} v (P dx + Q dy) - \int_{\Omega} \left[ Q \frac{\partial v}{\partial x} - P \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy, \quad (14.19)$$

这可以看成平面上的分部积分公式. 对于  $C^2$  函数  $u$ , 如果记

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \nabla u = (u_x, u_y) = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

以  $P = -u_y, Q = u_x$  代入 (14.19) 得

$$\int_{\Omega} v \Delta u \, dx dy = \int_{\partial\Omega} v(-u_y dx + u_x dy) - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx dy, \quad (14.20)$$

利用单位外法向量  $\vec{n}$ , 弧长参数  $s$  以及等式

$$\vec{n} ds = (y'(t), -x'(t)) dt$$

可以将 (14.20) 改写为

$$\int_{\Omega} v \Delta u \, dx dy = \int_{\partial\Omega} v(\nabla u \cdot \vec{n}) ds - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx dy, \quad (14.21)$$

或用方向导数继续改写为

$$\int_{\Omega} v \Delta u \, dx dy = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx dy, \quad (14.22)$$

如果  $v$  也是  $C^2$  函数, 则在上式中交换  $u, v$  的位置, 然后两式相减可得

$$\int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) \, dx dy = \int_{\partial\Omega} \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds. \quad (14.23)$$

这些都是很有用的公式.

### §14.5.3 Gauss 公式

设  $\Omega$  为  $\mathbb{R}^3$  中的有界区域, 其边界  $\partial\Omega$  为  $C^1$  曲面. 边界定向为诱导定向, 即外侧方向. 与平面上的 Green 公式类似, 下面的 Gauss 公式将三重积分与第二型曲面积分联系起来了.

**定理 14.5.3 (Gauss).** 设  $\Omega$  为  $\mathbb{R}^3$  中的有界区域, 其边界由有限个  $C^1$  曲面组成, 曲面的定向为诱导定向. 如果  $P, Q, R$  为  $\Omega$  上的连续可微函数, 则

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \int_{\partial\Omega} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy.$$

和 Green 公式一样, 我们证明一个特殊情形: 在某个边界点的一个小邻域之外  $P, Q$  和  $R$  均恒为零. 证明的思路也是类似的, 先说明 Gauss 公式在坐标变换下具有不变性, 然后利用坐标变换将问题变为矩形区域内的 Gauss 公式.

为此, 设  $\varphi: \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$  为  $C^2$  的保定向坐标变换, 记为

$$\varphi(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)), \quad (u, v, w) \in \tilde{\Omega}.$$

令

$$\begin{aligned}\tilde{P} &= P \frac{\partial(y, z)}{\partial(v, w)} + Q \frac{\partial(z, x)}{\partial(v, w)} + R \frac{\partial(x, y)}{\partial(v, w)}, \\ \tilde{Q} &= P \frac{\partial(y, z)}{\partial(w, u)} + Q \frac{\partial(z, x)}{\partial(w, u)} + R \frac{\partial(x, y)}{\partial(w, u)}, \\ \tilde{R} &= P \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + Q \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + R \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}.\end{aligned}$$

利用复合求导的链规则以及第二型曲面积分的定义不难得到

$$\int_{\partial\tilde{\Omega}} \tilde{P} dv \wedge dw + \tilde{Q} dw \wedge du + \tilde{R} du \wedge dv = \int_{\partial\Omega} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy. \quad (14.24)$$

这是坐标变换下第二型曲面积分的变换公式. 为了得到重积分的变换公式, 注意到

$$(P_u, P_v, P_w) = (P_x, P_y, P_z) \cdot \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix},$$

根据逆矩阵的表达式可以解得

$$\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = P_u \frac{\partial(y, z)}{\partial(v, w)} + P_v \frac{\partial(y, z)}{\partial(w, u)} + P_w \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)},$$

同理可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} &= Q_u \frac{\partial(z, x)}{\partial(v, w)} + Q_v \frac{\partial(z, x)}{\partial(w, u)} + Q_w \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \\ \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} &= R_u \frac{\partial(x, y)}{\partial(v, w)} + R_v \frac{\partial(x, y)}{\partial(w, u)} + R_w \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)},\end{aligned}$$

直接的计算表明

$$\frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial(y, z)}{\partial(v, w)} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial(y, z)}{\partial(w, u)} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right) = 0,$$

在上式中将  $(y, z)$  换成  $(z, x)$  或  $(x, y)$  也成立. 利用这些等式不难得到

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial u} + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial v} + \frac{\partial \tilde{R}}{\partial w} = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)},$$

如果  $\varphi$  是保持定向的坐标变换, 则由重积分的变量代换公式及上式就得到

$$\int_{\tilde{\Omega}} \left( \frac{\partial \tilde{P}}{\partial u} + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial v} + \frac{\partial \tilde{R}}{\partial w} \right) du dv dw = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz. \quad (14.25)$$

结合 (14.24) 式, 我们就知道要说明 Gauss 公式在  $\Omega$  上成立, 只要说明它在  $\tilde{\Omega}$  上成立即可, 反之亦然.

通过平移以及适当的保定向的正交变换, 我们可以假设  $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ ,  $P, Q, R$  在  $B_\varepsilon(0)$  外恒为零, 且  $\partial\Omega \cap B_\varepsilon(0)$  为  $C^1$  函数  $\phi(x, y)$  的图像, 其中  $\phi(0, 0) =$

$0, \nabla\phi(0,0) = (0,0)$ . 此时, 在原点  $(0,0,0)$  处的单位外法向是  $(0,0,1)$ , 因此区域  $\Omega \cap B_\varepsilon(0)$  位于图像的下方.

与 Green 公式的证明类似, 通过适当的保定向的坐标变换, 我们将该区域变为矩形区域  $I = [-a,a]^2 \times [-a,0]$  的一部分, 在这个变换下边界  $\partial\Omega \cap B_\varepsilon(0)$  变为  $[-a,a]^2 \times \{0\}$  的一部分, 而  $P, Q, R$  在经过变换后在矩形  $[-a,a]^2 \times [-a,0]$  的其它几个边界附近恒为零. 我们只要在这个矩形区域上验证 Gauss 公式成立就行了. 经过这些预备以后我们得到

$$\int_{\partial I} Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy = \int_{[-a,a]^2} R(x,y,0)dxdy,$$

以及

$$\begin{aligned} & \int_I \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz \\ &= \int_{-a}^a dy \int_{-a}^0 dz \int_{-a}^a \frac{\partial P}{\partial x} dx + \int_{-a}^a dx \int_{-a}^0 dz \int_{-a}^a \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \int_{-a}^a dx \int_{-a}^a dy \int_{-a}^0 \frac{\partial R}{\partial z} dz \\ &= \int_{-a}^a dy \int_{-a}^0 [P(a,y,z) - P(-a,y,z)]dz + \int_{-a}^a dx \int_{-a}^0 [Q(x,a,z) - Q(x,-a,z)]dz \\ &\quad + \int_{-a}^a dx \int_{-a}^a [R(x,y,0) - R(x,y,-a)]dy \\ &= \int_{-a}^a dx \int_{-a}^a R(x,y,0)dy, \end{aligned}$$

这说明 Gauss 公式在我们的假设下成立.  $\square$

注. 当区域的边界是分片  $C^1$  时 Gauss 公式仍然成立, 证明的方法也可以推广到一般的欧氏空间  $\mathbb{R}^n$  中.

#### 例 14.5.8. 曲面所围区域的体积.

设有界区域  $\Omega$  的边界为  $C^1$  曲面, 在 Gauss 公式中取  $P = x, Q = y, R = z$  就得到了体积公式

$$v(\Omega) = \frac{1}{3} \int_{\partial\Omega} xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy.$$

作为例子, 我们计算椭球  $E(a,b,c) = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$  的体积. 取广义球面坐标

$$x = a \sin \varphi \cos \theta, \quad y = b \sin \varphi \sin \theta, \quad z = c \cos \varphi, \quad \varphi \in [0, \pi], \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

这个坐标在椭球面上给出的方向是外侧的, 因此

$$\begin{aligned} v(E(a, b, c)) &= \frac{1}{3} \int_{\partial\Omega} xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy \\ &= \frac{1}{3} \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\pi} \left[ x \cdot \frac{\partial(y, z)}{\partial(\varphi, \theta)} + y \cdot \frac{\partial(z, x)}{\partial(\varphi, \theta)} + z \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(\varphi, \theta)} \right] d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\pi} [abc \sin^3 \varphi \cos^2 \theta + abc \sin^3 \varphi \sin^2 \theta + abc \cos^2 \varphi \sin \varphi] d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\pi} abc \sin \varphi d\theta = \frac{4}{3} \pi abc. \end{aligned}$$

**例 14.5.9.** 记  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , 计算积分

$$I = \int_{\partial\Omega} \frac{x}{r^3} dy \wedge dz + \frac{y}{r^3} dz \wedge dx + \frac{z}{r^3} dx \wedge dy,$$

其中  $\Omega$  是包含原点在内的有界区域, 其边界取外侧方向.

**解.** 记  $P = x/r^3$ ,  $Q = y/r^3$ ,  $R = z/r^3$ , 则易验证

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

取以原点为中心的且完全包含于  $\Omega$  的小球  $\{x^2 + y^2 + z^2 \leq \varepsilon^2\}$ , 小球面的定向取相对于小球体的外侧向, 则由 Gauss 公式以及刚才的体积公式得

$$I = \int_{x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2} \frac{x}{r^3} dy \wedge dz + \frac{y}{r^3} dz \wedge dx + \frac{z}{r^3} dx \wedge dy = \varepsilon^{-3} \cdot 3 \cdot \frac{4}{3} \pi \varepsilon^3 = 4\pi.$$

作为这个例子的一个应用, 考虑位于区域内部  $(x_0, y_0, z_0)$  处的点电荷  $q$ , 它产生的静电场为

$$\vec{E} = \frac{q}{r^3} (x - x_0, y - y_0, z - z_0), \quad r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$

则电场  $\vec{E}$  通过曲面  $\partial\Omega$  的电通量为

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot \vec{n} d\sigma &= \int_{\partial\Omega} \frac{q(x - x_0)}{r^3} dy \wedge dz + \frac{q(y - y_0)}{r^3} dz \wedge dx + \frac{q(z - z_0)}{r^3} dx \wedge dy \\ &= 4\pi q. \end{aligned}$$

**例 14.5.10.** Gauss 公式的散度形式.

以函数  $P, Q, R$  为分量的向量场记为  $\vec{X} = (P, Q, R)$ . 向量场的散度  $\operatorname{div} \vec{X}$  定义为

$$\operatorname{div} \vec{X} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

则 Gauss 公式可以写为

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{X} dx dy dz = \int_{\partial\Omega} \vec{X} \cdot \vec{n} d\sigma, \quad (14.26)$$

其中  $\vec{n}$  为边界曲面的单位外法向量.

作为一个物理应用, 考虑分布在区域  $\Omega$  内的电荷产生的电场  $\vec{E}$ , 假设电荷密度为  $\rho(x, y, z)$ , 则  $\vec{E}$  在区域边界上的电通量为 (利用上例)

$$\int_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\Omega} 4\pi\rho(x, y, z) dx dy dz,$$

利用 Gauss 公式的散度形式 (14.26) 式, 得

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \vec{E} - 4\pi\rho) dx dy dz = 0,$$

在上式中将区域缩为一点就得到电场的 Gauss 定律:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho.$$

**例 14.5.11.**  $\mathbb{R}^3$  中的分部积分公式.

设  $v$  为  $C^1$  函数, 如同 Green 公式的情形一样, 在 Gauss 公式中用  $vP$ ,  $vQ$ ,  $vR$  分别代替  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  可得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz &= \int_{\partial\Omega} v(P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy) \\ &\quad - \int_{\Omega} \left( P \frac{\partial v}{\partial x} + Q \frac{\partial v}{\partial y} + R \frac{\partial v}{\partial z} \right) dx dy dz, \end{aligned} \quad (14.27)$$

或改写为

$$\int_{\Omega} v \cdot \operatorname{div} \vec{X} dx dy dz = \int_{\partial\Omega} v \vec{X} \cdot \vec{n} d\sigma - \int_{\Omega} \vec{X} \cdot \nabla v dx dy dz, \quad (14.28)$$

其中  $\vec{n}$  为单位外法向量,  $\nabla v = (v_x, v_y, v_z)$  为  $v$  的梯度.

设  $u$  为  $C^2$  函数, 记

$$\Delta u = \operatorname{div} \nabla u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

在 (14.28) 中以  $\vec{X} = \nabla u$  代入, 有

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx dy dz = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx dy dz. \quad (14.29)$$

如果  $v$  也是  $C^2$  函数, 则在上式中交换  $u, v$  的位置然后两式相减可得

$$\int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) dx dy dz = \int_{\partial\Omega} \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\sigma. \quad (14.30)$$

上面这些公式都很有用, 特别是在研究欧氏空间中的调和函数的时候 (满足方程  $\Delta u = 0$  的函数  $u$  称为调和函数).

## §14.5.4 Stokes 公式

设  $\Sigma$  为  $\mathbb{R}^3$  中  $C^2$  的定向曲面,  $\Omega$  为  $\Sigma$  上的有界区域, 其边界为  $C^1$  曲线. 我们在边界  $\partial\Omega$  上用“右手法则”定义诱导定向如下: 边界在曲面上的外法向量与边界的切向量的叉乘得到的曲面法向量与曲面的定向给出的法向量同向. 即如果用右手从曲线外法向到切向作旋转, 则大拇指所指方向为定向曲面的法向.

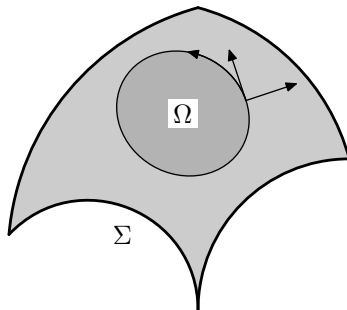


图 14.22 曲面区域

下面的 Stokes 公式将第二型曲面积分与第二型曲线积分联系起来了.

**定理 14.5.4 (Stokes).** 设  $\Sigma$  为定向曲面,  $\Omega$  为曲面上的有界区域, 其边界赋以诱导定向. 如果  $P, Q, R$  为  $\Omega$  附近的连续可微函数, 则

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy = \int_{\partial\Omega} P dx + Q dy + R dz.$$

和前面一样, 我们只证明一个特殊情形: 假定  $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  为定向曲面的  $C^2$  参数表示, 且  $\varphi(\tilde{\Omega}) = \Omega$ ,  $\tilde{\Omega}$  为  $D \subset \mathbb{R}^2$  中的有界区域. 根据诱导定向的定义,  $\partial\tilde{\Omega}$  的定向也是平面上的诱导定向.

我们来讨论在参数表示下 Stokes 公式中的两个积分如何变化. 记

$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D.$$

令

$$S = Px_u + Qy_u + Rz_u, \quad T = Px_v + Qy_v + Rz_v,$$

根据第二型曲线积分的定义不难得到

$$\int_{\partial\tilde{\Omega}} S du + T dv = \int_{\partial\Omega} P dx + Q dy + R dz. \quad (14.31)$$

从  $S, T$  的定义可推出

$$T_u - S_v = (P_u x_v - P_v x_u) + (Q_u y_v - Q_v y_u) + (R_u z_v - R_v z_u). \quad (14.32)$$

根据复合求导的链规则, 有

$$P_u = P_x x_u + P_y y_u + P_z z_u, \quad P_v = P_x x_v + P_y y_v + P_z z_v,$$

关于  $Q, R$  有完全类似的等式, 将它们代入 (14.32) 得

$$\begin{aligned} T_u - S_v &= P_y(y_u x_v - x_u y_v) + P_z(z_u x_v - x_u z_v) + Q_x(x_u y_v - y_u x_v) \\ &\quad + Q_z(z_u y_v - y_u z_v) + R_x(x_u z_v - z_u x_v) + R_y(y_u z_v - z_u y_v), \end{aligned}$$



或改写为

$$T_u - S_v = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)},$$

根据第二型曲面积分的定义可得

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Omega}} (T_u - S_v) dudv &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy, \end{aligned}$$

另一方面, 由平面上的 Green 公式得到

$$\int_{\tilde{\Omega}} (T_u - S_v) dudv = \int_{\partial\tilde{\Omega}} Sdu + Tdv,$$

将以上两式和 (14.31) 结合起来就得到了曲面 Stokes 公式的证明.  $\square$

注. 曲面是分片  $C^1$  时 Stokes 公式仍然成立.

**例 14.5.12.** Stokes 公式的旋度表示.

设  $\vec{X} = (P, Q, R)$  为向量场, 定义其旋度场为

$$\text{rot}\vec{X} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

有时也用  $\text{curl}\vec{X}$  表示旋度. 利用旋度, Stokes 公式可以改写为

$$\int_{\Omega} \text{rot}\vec{X} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\partial\Omega} \vec{X} \cdot \vec{T} ds, \quad (14.33)$$

其中  $\vec{n}$  为曲面的单位法向量,  $\vec{T}$  为曲线的单位切向量,  $s$  为弧长参数.

**例 14.5.13.** 表面上的分部积分公式.

设  $v$  为  $C^1$  函数,  $\vec{X} = (P, Q, R)$  为向量场, 由旋度的定义易得

$$\text{rot}(v\vec{X}) = v \cdot \text{rot}\vec{X} + \left(R \frac{\partial v}{\partial y} - Q \frac{\partial v}{\partial z}, P \frac{\partial v}{\partial z} - R \frac{\partial v}{\partial x}, Q \frac{\partial v}{\partial x} - P \frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

利用向量的叉乘, 上式可以改写为

$$\text{rot}(v\vec{X}) = v \cdot \text{rot}\vec{X} + \nabla v \times \vec{X},$$

代入 (14.33) 式得

$$\int_{\Omega} v(\text{rot}\vec{X} \cdot \vec{n}) d\sigma = \int_{\partial\Omega} v(\vec{X} \cdot \vec{T}) ds - \int_{\Omega} (\nabla v \times \vec{X}) \cdot \vec{n} d\sigma. \quad (14.34)$$

如果  $u$  为  $C^1$  函数, 以  $\vec{X} = \nabla u$  代入上式可得 (注意梯度的旋度为零)

$$\int_{\Omega} (\nabla v \times \nabla u) \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial s} ds, \quad (14.35)$$

其中

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \nabla u \cdot \vec{T}$$

是  $u$  沿切向的方向导数.

例 14.5.14. 计算积分

$$I = \int_{\partial\Omega} (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz,$$

其中  $\Omega$  为八分之一球面  $\{x^2+y^2+z^2=1, x, y, z \geq 0\}$ , 方向为外侧诱导定向.

解. 由 Stokes 公式得

$$I = -2 \int_{\Omega} dy \wedge dz + dz \wedge dx + dx \wedge dy.$$

由于球面的单位外法向量为  $(x, y, z)$ , 故上述第二型曲面积分可以写为第一型曲面积分:

$$I = -2 \int_{\Omega} (1, 1, 1) \cdot (x, y, z) d\sigma = -2 \int_{\Omega} (x + y + z) d\sigma,$$

根据  $x, y, z$  的对称性得

$$I = -6 \int_{\Omega} z d\sigma = -6 \int_{\{x^2+y^2 \leq 1, x, y \geq 0\}} z \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy = -\frac{3}{2}\pi.$$

注. 如果注意到积分  $\int_{\Omega} dy \wedge dz + dz \wedge dx + dx \wedge dy$  的几何意义就是八分之一球面向三个坐标平面作投影的面积之和, 则计算结果可以立即得到.

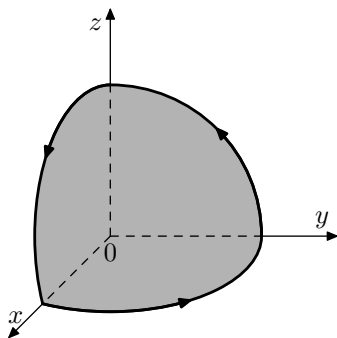


图 14.23 球面区域

### 习题 14.5

1. (\*) 利用余面积公式计算积分

$$I = \int_{\Sigma} \left( \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{-1/2} d\sigma,$$

其中  $\Sigma$  为椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

2. (\*) 利用函数  $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$  以及余面积公式计算  $n-1$  维单形

$$\{x_1 + \dots + x_n = a, x_1, \dots, x_n \geq 0\}$$

的面积.

3. 利用 Green 公式计算下列积分:

(1)  $\int_C xy^2 dx - x^2 y dy$ ,  $C$  为圆周  $x^2 + y^2 = a^2$ , 逆时针方向;

(2)  $\int_C (x+y) dx - (x-y) dy$ ,  $C$  椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , 逆时针方向;

(3)  $\int_C (x+y)^2 dx - (x^2+y^2) dy$ ,  $C$  是从  $(1,1)$  经过  $(3,2)$  到  $(2,5)$  再回到  $(1,1)$  的三角形边界;

(4)  $\int_C e^x \sin y dx + e^x \cos y dy$ ,  $C$  是上半圆周  $x^2 + y^2 = ax$  ( $y \geq 0$ ), 逆时针方向.

4. 利用 Green 公式计算下列曲线所围成的面积:

(1) 抛物线  $(x+y)^2 = ax$  ( $a > 0$ ) 和  $x$  轴;

(2) 双纽线  $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$  ( $a > 0$ );

(3)  $x^3 + y^3 = 3axy$  ( $a > 0$ ).

5. 设  $C$  为平面上的连续可微的闭曲线,  $\vec{v}$  为任意一个固定的向量, 证明

$$\int_C \vec{v} \cdot \vec{n} ds = 0,$$

其中  $\vec{n}$  为  $C$  的单位外法向量.

6. (\*) 设  $\phi(x)$  为  $[-a, a]$  上的连续可微函数, 且  $\phi(0) = \phi'(0) = 0$ . 证明, 存在  $0 < \varepsilon < a$ , 使得  $\phi(x)$  在  $[-\varepsilon, \varepsilon]$  上的图像与圆周  $\{x^2 + y^2 = \varepsilon^2\}$  正好只有两个交点. (提示: 用微分中值定理).

7. 利用 Gauss 公式计算下列积分:

(1)  $\int_{\Sigma} x^3 dy \wedge dz + y^3 dz \wedge dx + z^3 dx \wedge dy$ ,  $\Sigma$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , 方向为外侧;

(2)  $\int_{\Sigma} x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy$ ,  $\Sigma$  为矩形区域  $[0, a]^3$  的边界, 方向为外侧;

(3)  $\int_{\Sigma} (x-y) dy \wedge dz + (y-z) dz \wedge dx + (z-x) dx \wedge dy$ ,  $\Sigma$  为曲面  $z = x^2 + y^2$  ( $z \leq 1$ ), 方向向下;

8. 设  $\Omega$  为  $\mathbb{R}^3$  中的有界区域, 其边界为  $C^1$  曲面. 如果  $\vec{v}$  为任意一个固定的向量, 证明

$$\int_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = 0,$$

其中  $\vec{n}$  为  $\Omega$  的单位外法向量.

9. 设  $\Omega$  为  $\mathbb{R}^3$  中的有界区域, 其边界为  $C^1$  曲面,  $(x_0, y_0, z_0) \notin \partial\Omega$ . 记

$$\vec{r} = \left( \frac{x-x_0}{r}, \frac{y-y_0}{r}, \frac{z-z_0}{r} \right), \quad r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2},$$

证明

$$\int_{\Omega} \frac{dx dy dz}{r} = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \vec{r} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

10. 利用 Stokes 公式计算下列积分:

(1)  $\int_C ydx + zdy + xdz$ ,  $C$  是圆周  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $x + y + z = 0$ , 从  $x$  轴看上去圆的方向是逆时针的;

(2)  $\int_C y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$ ,  $C$  是圆周  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $x + y + z = a$ , 从  $x$  轴看上去圆的方向是逆时针的;

(3)  $\int_C (z-y)dx + (x-z)dy + (y-x)dz$ ,  $C$  是从  $(a, 0, 0)$  经过  $(0, a, 0)$  到  $(0, 0, a)$  再回到  $(a, 0, 0)$  的三角形边界;

11. 证明, 梯度场的旋度为零; 旋度场的散度为零.

12. 设  $v$  为  $C^1$  函数,  $\vec{X}$  为向量场, 证明

$$\operatorname{div}(v\vec{X}) = v \operatorname{div}\vec{X} + \nabla v \cdot \vec{X}, \quad \operatorname{rot}(v\vec{X}) = v \operatorname{rot}\vec{X} + \nabla v \times \vec{X}.$$

13. 如果  $u, v$  为  $C^2$  函数, 则有

$$\operatorname{div}(u\nabla v) = \nabla u \cdot \nabla v + u\Delta v, \quad \Delta(uv) = v\Delta u + u\Delta v + 2\nabla u \cdot \nabla v.$$

14. 设  $\vec{X}, \vec{Y}$  为向量场, 证明  $\operatorname{div}(\vec{X} \times \vec{Y}) = \vec{Y} \cdot \operatorname{rot}\vec{X} - \vec{X} \cdot \operatorname{rot}\vec{Y}$ .

15. 设  $\Omega$  为  $\mathbb{R}^3$  中的有界区域, 其边界为  $C^1$  曲面, 方向为外侧. 如果  $v$  为  $C^1$  函数,  $\vec{X}$  为  $C^2$  向量场, 则

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \operatorname{rot}\vec{X} dx dy dz = \int_{\partial\Omega} v(\operatorname{rot}\vec{X} \cdot \vec{n}) d\sigma.$$

16. (\*) 设  $\Omega$  为平面上的有界区域, 其边界为  $C^1$  曲线. 如果  $u$  为  $\Omega$  上的  $C^2$  函数, 且  $\Delta u = 0$ , 则对  $\Omega$  内部的任意点  $(x_0, y_0)$ , 均有

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \left[ \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{r} u - \frac{\partial u}{\partial n} \ln r \right] ds,$$

其中  $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ ,  $\vec{r} = \frac{1}{r}(x-x_0, y-y_0)$ ,  $\vec{n}$  为  $\partial\Omega$  的单位外法向量.

17. (\*) 设  $\Omega$  为  $\mathbb{R}^3$  中的有界区域, 其边界为  $C^1$  曲面. 如果  $u$  为  $\Omega$  上的  $C^2$  函数, 且  $\Delta u = 0$ , 则对  $\Omega$  内部的任意点  $(x_0, y_0, z_0)$ , 均有

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left[ \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{r^2} u + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma,$$

其中

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}, \quad \vec{r} = \frac{1}{r}(x-x_0, y-y_0, z-z_0),$$

$\vec{n}$  为  $\partial\Omega$  的单位外法向量.

## §14.6 附录: Riemann-Stieltjes 积分



在初次阅读本书时, 本节内容可以略过,  
也可以将部分内容作为选读材料.

## §14.6.1 有界变差函数

回顾一下有界变差函数的定义: 设  $f$  是定义在  $[a, b]$  上的函数, 对于区间  $[a, b]$  的任意分割

$$\pi: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

记

$$v(f; \pi) = \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|,$$

如果  $\sup_{\pi} v(f; \pi)$  有限, 则称  $f$  为  $[a, b]$  上的有界变差函数, 其全变差记为

$$\bigvee_a^b(f) = \sup_{\pi} v(f; \pi).$$

我们已经知道单调函数, Lipschitz 函数等均为有界变差函数. 此外, 有界变差函数还具有以下性质:

- 有界变差函数必为有界函数. 事实上,

$$|f(x)| \leq |f(a)| + |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq |f(a)| + \bigvee_a^b(f).$$

- 两个有界变差函数的线性组合以及乘积仍为有界变差函数.
- 设  $f, g$  为有界变差函数, 且  $|g(x)| \geq \lambda > 0$ , 则  $f/g$  也是有界变差函数.
- 设  $c \in (a, b)$ . 则  $f$  在  $[a, b]$  上为有界变差函数当且仅当  $f$  在  $[a, c]$  和  $[c, b]$  上均为有界变差函数, 此时

$$\bigvee_a^b(f) = \bigvee_a^c(f) + \bigvee_c^b(f). \quad (14.36)$$

证明如下: 设  $f$  在  $[a, b]$  上为有界变差函数, 任取区间  $[a, c]$  和  $[c, b]$  的分割  $\pi_1$  和  $\pi_2$ , 则

$$v(f|_{[a,c]}; \pi_1) + v(f|_{[c,b]}; \pi_2) = v(f; \pi_1 \cup \pi_2) \leq \bigvee_a^b(f),$$

这说明  $f$  在  $[a, c]$  和  $[c, b]$  上均为有界变差函数, 且

$$\bigvee_a^c(f) + \bigvee_c^b(f) \leq \bigvee_a^b(f). \quad (14.37)$$

反之, 如果  $f$  在  $[a, c]$  和  $[c, b]$  上均为有界变差函数, 则任取  $[a, b]$  的分割  $\pi$ , 如果  $c$  不在  $\pi$  的分点之内, 则添加  $c$  为分点, 此时  $f$  的变差和不会变小, 从而

$$v(f; \pi) \leq \bigvee_a^c(f) + \bigvee_c^b(f),$$

即  $f$  在  $[a, b]$  上也是有界变差函数, 且

$$\bigvee_a^b(f) \leq \bigvee_a^c(f) + \bigvee_c^b(f). \quad (14.38)$$

(14.37) 式和 (14.38) 式结合起来就得到了 (14.36).  $\square$

从最后这一条性质可以立即得到

**推论 14.6.1.** 设  $f$  为  $[a, b]$  上的有界变差函数, 则

$$g(x) = \bigvee_a^x(f), \quad x \in [a, b]$$

为  $[a, b]$  上的非负单调递增函数.

**证明.** 设  $x \leq y \in [a, b]$ , 则

$$g(y) - g(x) = \bigvee_a^y(f) - \bigvee_a^x(f) = \bigvee_x^y(f) \geq 0,$$

因此  $g$  为单调递增函数.  $\square$

下面的结果给出了有界变差函数的刻画.

**定理 14.6.2.**  $f$  为有界变差函数当且仅当它是两个单调递增函数之差.

**证明.** 只要证明必要性就可以了. 设  $f$  为  $[a, b]$  上的有界变差函数, 令

$$g(x) = \bigvee_a^x(f), \quad h(x) = g(x) - f(x), \quad x \in [a, b],$$

则  $f = g - h$ , 我们已经知道  $g$  单调递增, 下面说明  $h$  也是单调递增的. 任取  $x \leq y \in [a, b]$ , 则

$$\begin{aligned} h(y) - h(x) &= [g(y) - g(x)] - [f(y) - f(x)] \\ &= \bigvee_x^y(f) - [f(y) - f(x)] \geq |f(y) - f(x)| - [f(y) - f(x)] \geq 0, \end{aligned}$$

因此  $h$  也是单调递增函数.  $\square$

注. 上述等式  $f = g - h$  称为  $f$  的典范分解.

**命题 14.6.3.** 设  $f$  为  $[a, b]$  上的有界变差函数, 如果  $f$  在  $\xi$  处连续, 则

$$g(x) = \bigvee_a^x(f)$$

也在  $\xi$  处连续.

**证明.** 设  $a < \xi$ , 我们证明  $g$  在  $\xi$  处左连续, 右连续的证明是类似的. 因为  $g$  是单调递增函数, 故  $g(x)$  在  $\xi$  处的左极限  $g(\xi - 0)$  存在, 且  $g(\xi - 0) \leq g(\xi)$ . 任给  $\varepsilon > 0$ , 取  $[a, \xi]$  的分割

$$\pi: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = \xi$$

使得

$$v = \sum_{i=1}^m |f(x_i) - f(x_{i-1})| > \bigvee_a^{\xi}(f) - \varepsilon.$$

根据  $f$  在  $\xi$  处连续知, 存在  $0 < \delta < |\xi - x_{m-1}|$ , 使得当  $|x - \xi| < \delta$  时

$$|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon.$$

于是当  $x \in (\xi - \delta, \xi)$  时, 有

$$\begin{aligned} g(x) &\geq \sum_{i=1}^{m-1} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(x) - f(x_{m-1})| \\ &\geq \sum_{i=1}^{m-1} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(x) - f(x_{m-1})| + |f(\xi) - f(x)| - \varepsilon \\ &\geq \sum_{i=1}^m |f(x_i) - f(x_{i-1})| - \varepsilon \\ &> \bigvee_a^{\xi}(f) - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

这说明  $g(\xi - 0) \geq g(\xi)$ . □

从这个命题可以得到下面的推论, 我们省略证明.

**推论 14.6.4.** (1) 连续的有界变差函数可表示为两个连续单调递增函数之差;  
(2) 设  $f$  为  $[a, b]$  上的连续有界变差函数, 则

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} v(f; \pi) = \bigvee_a^b(f).$$

## §14.6.2 Riemann-Stieltjes 积分

设  $\alpha$  为  $[a, b]$  上的单调递增函数,  $f$  为  $[a, b]$  上的有界函数. 对于区间  $[a, b]$  的分割

$$\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

记

$$M_i(f) = \sup_{[x_i, x_{i-1}]} f, \quad m_i(f) = \inf_{[x_i, x_{i-1}]} f, \quad \Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}),$$

令

$$U(f, \alpha; \pi) = \sum_{i=1}^n M_i(f) \Delta\alpha_i, \quad L(f, \alpha; \pi) = \sum_{i=1}^n m_i(f) \Delta\alpha_i,$$

$U(f, \alpha; \pi)$  和  $L(f, \alpha; \pi)$  分别称为  $f$  关于  $\alpha$  以及分割  $\pi$  的 Darboux 上和与 Darboux 下和, 简称上和与下和. 记

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \inf_{\pi} U(f, \alpha; \pi), \quad \int_{-a}^b f(x) d\alpha(x) = \sup_{\pi} L(f, \alpha; \pi),$$

分别称为  $f$  关于  $\alpha$  的上积分与下积分, 有时也记为  $\bar{I}(f, \alpha)$  与  $I(f, \alpha)$ . 如果上积分与下积分相等, 就称  $f$  关于  $\alpha$  是 **Riemann-Stieltjes 可积**的, 其积分记为

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \inf_{\pi} U(f, \alpha; \pi) = \sup_{\pi} L(f, \alpha; \pi),$$

为了简单起见, 我们也称  $f$  关于  $\alpha$  可积 (RS 可积), 记为  $f \in R(\alpha)$ .

显然, 当  $\alpha(x) = x$  时,  $f$  关于  $\alpha$  可积就是指  $f$  在  $[a, b]$  上 Riemann 可积, 因此 Riemann-Stieltjes 积分是 Riemann 积分的推广, 下面的许多讨论和 Riemann 积分的讨论是完全类似的 (也有不同之处), 在相似的地方我们将省略证明.

为了得到 RS 可积的充要条件, 我们再引入关于区间分割加细的概念. 设  $\pi, \pi'$  为  $[a, b]$  的分割, 如果  $\pi$  的分点均为  $\pi'$  的分点, 则称  $\pi'$  是  $\pi$  的加细, 记为  $\pi' \geq \pi$  或  $\pi \leq \pi'$ . 与 Riemann 积分的讨论类似, 我们有

- 对于任意分割  $\pi$ , 均有  $L(f, \alpha; \pi) \leq U(f, \alpha; \pi)$ , 即下和不超过上和;
- 如果  $\pi' \geq \pi$ , 则上和不减, 下和不增, 即

$$U(f, \alpha; \pi') \leq U(f, \alpha; \pi), \quad L(f, \alpha; \pi') \geq L(f, \alpha; \pi);$$

- 如果  $\pi_1, \pi_2$  是任意两个分割, 则

$$L(f, \alpha; \pi_1) \leq U(f, \alpha; \pi_2),$$

这只要考虑  $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$  以及利用上两条性质即可;



- $\underline{I}(f, \alpha) \leq \bar{I}(f, \alpha)$ , 即下积分不超过上积分.

和 Riemann 积分类似, 对于分割  $\pi$ , 取  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  ( $1 \leq i \leq n$ ), 定义  $f$  关于  $\alpha$  和分割  $\pi$  以及  $\{\xi_i\}$  的 Riemann-Stieltjes 和为

$$S(f, \alpha; \pi, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta \alpha_i.$$

**定理 14.6.5.** 设  $\alpha$  为  $[a, b]$  上的单调递增函数,  $f$  为有界函数, 则下列条件等价:

- (1)  $f \in R(\alpha)$ , 即  $f$  关于  $\alpha$  是 Riemann-Stieltjes 可积的;
- (2) 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在分割  $\pi$ , 使得

$$U(f, \alpha; \pi) - L(f, \alpha; \pi) < \varepsilon;$$

- (3) 存在实数  $I$ , 使得任给  $\varepsilon > 0$ , 存在分割  $\pi_\varepsilon$ , 当分割  $\pi \geq \pi_\varepsilon$  时

$$|S(f, \alpha; \pi, \xi) - I| < \varepsilon, \quad \forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

**证明.** 证明与 Riemann 积分的情形完全类似, 略. □

**注.** 需要注意的是, 在 Riemann 积分的情形, 当  $f$  在  $[a, b]$  上 Riemann 可积时

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} S(f; \pi, \xi) = \int_a^b f(x) dx,$$

而这个定理中的 (3) 关于分割的要求的是  $\pi \geq \pi_\varepsilon$ , 对于 Riemann-Stieltjes 积分这两个条件并不等价. 例如, 考虑下面的例子:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1/2], \\ 2, & x \in (1/2, 1], \end{cases} \quad \alpha(x) = \begin{cases} 3, & x \in [0, 1/2], \\ 4, & x \in [1/2, 1], \end{cases}$$

不难验证  $f \in R(\alpha)$ , 但极限  $\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} S(f, \alpha; \pi, \xi)$  不存在.

下面的两个结果给出了一些可积函数类.

**定理 14.6.6.** 如果  $\alpha$  为  $[a, b]$  上的单调递增函数,  $f$  为  $[a, b]$  上的连续函数, 则  $f \in R(\alpha)$ , 且

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} S(f; \pi, \xi) = \int_a^b f(x) d\alpha(x).$$

**证明.** 利用闭区间上连续函数的一致连续性以及定理 14.6.5 即可, 略. □

**定理 14.6.7.** 如果  $\alpha$  为  $[a, b]$  上的单调递增连续函数,  $f$  为  $[a, b]$  上的单调函数, 则  $f \in R(\alpha)$ .

**证明.** 不妨设  $f$  是单调递增的. 对正整数  $n$ , 取  $[a, b]$  的分割  $\pi$ , 使得

$$\Delta\alpha_i = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

根据  $\alpha$  的连续性, 这是可以做到的. 对于分割  $\pi$ , 有

$$\begin{aligned} U(f, \alpha; \pi) - L(f, \alpha; \pi) &= \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] \\ &= \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} [f(b) - f(a)], \end{aligned}$$

取充分大的  $n$ , 由定理 14.6.5 的 (2) 即知  $f$  关于  $\alpha$  是可积的. □

下面是 Riemann-Stieltjes 积分的一些性质:

- 设  $f_1, f_2 \in R(\alpha)$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , 则  $c_1 f_1 + c_2 f_2 \in R(\alpha)$ , 且

$$\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2) d\alpha(x) = c_1 \int_a^b f_1(x) d\alpha(x) + c_2 \int_a^b f_2(x) d\alpha(x).$$

- 设  $c \in (a, b)$ , 则  $f$  在  $[a, b]$  上关于  $\alpha$  可积当且仅当  $f$  在  $[a, c]$  和  $[c, b]$  上均是可积的, 且此时有

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^c f(x) d\alpha(x) + \int_c^b f(x) d\alpha(x).$$

如果我们约定

$$\int_a^a f(x) d\alpha(x) = 0, \quad \int_b^a f(x) d\alpha(x) = - \int_a^b f(x) d\alpha(x),$$

则前式对于闭区间中的任意三点均成立.

- 如果  $f_1, f_2 \in R(\alpha)$ , 且  $f_1 \leq f_2$ , 则

$$\int_a^b f_1(x) d\alpha(x) \leq \int_a^b f_2(x) d\alpha(x).$$

- 如果  $f \in R(\alpha)$ , 则  $|f| \in R(\alpha)$ , 且

$$\left| \int_a^b f(x) d\alpha(x) \right| \leq \int_a^b |f(x)| d\alpha(x).$$

- 如果  $f_1, f_2 \in R(\alpha)$ , 则  $f_1 \cdot f_2 \in R(\alpha)$ .
- 如果  $f_1, f_2 \in R(\alpha)$ , 且  $|f_2| \geq \lambda > 0$ , 则  $f_1/f_2 \in R(\alpha)$ .
- 如果  $f \in R(\alpha)$ ,  $\phi$  在包含  $f([a, b])$  的区间上连续, 则  $\phi(f) \in R(\alpha)$ .

- 设  $\alpha_1, \alpha_2$  均为单调递增函数, 且  $f \in R(\alpha_1), f \in R(\alpha_2)$ , 则对正实数  $c_1$  与  $c_2$ , 有  $f \in R(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2)$ , 且

$$\int_a^b f(x) d[c_1\alpha_1(x) + c_2\alpha_2(x)] = c_1 \int_a^b f(x) d\alpha_1(x) + c_2 \int_a^b f(x) d\alpha_2(x).$$

**定理 14.6.8** (积分第一中值公式). 设  $\alpha$  为  $[a, b]$  上的单调递增函数,  $f$  为  $[a, b]$  上的连续函数, 则存在  $\xi \in [a, b]$ , 使得

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = f(\xi)[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

**证明.** 如果  $\alpha(b) = \alpha(a)$ , 则  $\alpha$  为常值函数, 定理结论显然成立. 下设  $\alpha(b) - \alpha(a) > 0$ . 因为  $f$  为连续函数, 它在  $[a, b]$  上达到最小值  $m$  以及最大值  $M$ . 由上下和的定义, 有

$$m[\alpha(b) - \alpha(a)] \leq L(f, \alpha; \pi) \leq \int_a^b f(x) d\alpha(x) \leq U(f, \alpha; \pi) \leq M[\alpha(b) - \alpha(a)],$$

这说明

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) d\alpha(x)}{\alpha(b) - \alpha(a)} \leq M,$$

由连续函数的介值定理, 存在  $\xi \in [a, b]$ , 使得

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x) d\alpha(x)}{\alpha(b) - \alpha(a)},$$

结论得证. □

到现在为止, 我们假设了 Riemann-Stieltjes 积分中的  $\alpha$  是单调递增函数, 下面我们推广到有界变差函数的情形. 设  $\alpha$  为  $[a, b]$  上的有界变差函数,  $\alpha = \beta - \gamma$  为其典范分解. 如果有界函数  $f$  关于  $\beta$  和  $\gamma$  都是可积的, 则称  $f$  关于  $\alpha$  是 Riemann-Stieltjes 可积的, 记为  $f \in R(\alpha)$ ,  $f$  关于  $\alpha$  的积分定义为

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^b f(x) d\beta(x) - \int_a^b f(x) d\gamma(x).$$

根据前面的结果, 我们可以得到下面的结论:

- 如果  $f$  为连续函数,  $\alpha$  为有界变差函数, 则  $f \in R(\alpha)$ ;
- 如果  $f$  为有界变差函数,  $\alpha$  为连续的有界变差函数, 则  $f \in R(\alpha)$ .

**命题 14.6.9.** 设  $\alpha$  是有界变差函数, 如果  $f$  关于  $\alpha$  可积, 则

$$\left| \int_a^b f(x) d\alpha(x) \right| \leq \int_a^b |f(x)| d\beta(x),$$

其中  $\beta(x)$  是  $\alpha$  的变差函数.

**证明.** 如果  $f$  关于  $\alpha$  可积, 则  $f$  关于  $\beta$  以及  $\gamma = \beta - \alpha$  可积, 从而  $|f|$  关于  $\beta$  可积. 记

$$p = \frac{1}{2}(\alpha + \beta), \quad q = \frac{1}{2}(\beta - \alpha),$$

则  $p, q$  均为单调递增函数, 且  $f, |f|$  关于  $p, q$  均可积, 于是

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) d\alpha(x) \right| &\leq \left| \int_a^b f(x) dp(x) \right| + \left| \int_a^b f(x) dq(x) \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x)| dp(x) + \int_a^b |f(x)| dq(x) \\ &= \int_a^b |f(x)| d\beta(x). \end{aligned}$$

证明过程中用到了单调递增函数的 Riemann-Stieltjes 积分的性质.  $\square$

**定理 14.6.10.** 设  $\alpha$  为  $[a, b]$  上的有界变差函数,  $f$  为有界函数. 则下列几条等价:

- (1)  $f \in R(\alpha)$ ;
- (2) 存在常数  $I$ , 使得任给  $\varepsilon > 0$ , 存在分割  $\pi_\varepsilon$ , 当  $\pi \geq \pi_\varepsilon$  时

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) [\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] - I \right| < \varepsilon, \quad \forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

- (3)  $f \in R(\beta)$ , 其中

$$\beta(x) = \bigvee_a^x(\alpha), \quad x \in [a, b].$$

**证明.** (1)  $\implies$  (2). 设  $\alpha = \beta - \gamma$  为  $\alpha$  的典范分解, 由定义,  $f \in R(\beta)$  和  $f \in R(\gamma)$  均成立, 由定理 14.6.5 容易知道 (2) 成立, 且此时

$$I = \int_a^b f(x) d\alpha(x).$$

(2)  $\implies$  (3) 设条件成立, 则对  $\pi \geq \pi_\varepsilon$ , 当  $\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) \geq 0$  时, 选取  $\xi_i, \xi'_i \in [x_{i-1}, x_i]$  使得

$$f(\xi_i) - f(\xi'_i) > M_i(f) - m_i(f) - \varepsilon;$$

否则选取  $\xi_i, \xi'_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , 使得

$$f(\xi'_i) - f(\xi_i) > M_i(f) - m_i(f) - \varepsilon.$$

此时有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n [M_i(f) - m_i(f)] |\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})| &\leq \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) - f(\xi'_i)] [\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] \\ &\quad + \varepsilon \sum_{i=1}^n |\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})| \\ &\leq 2\varepsilon + \varepsilon\beta(b), \end{aligned}$$

其中

$$\beta(b) = \bigvee_a^b(\alpha).$$

我们可以选择分割  $\pi \geq \pi_\varepsilon$  使得

$$\beta(b) - \sum_{i=1}^n |\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})| < \varepsilon,$$

此时有

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n [M_i(f) - m_i(f)] [\beta(x_i) - \beta(x_{i-1})] \\ &\leq \sum_{i=1}^n [M_i(f) - m_i(f)] \{ [\beta(x_i) - \beta(x_{i-1})] - |\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})| \} \\ &\quad + 2\varepsilon + \varepsilon\beta(b) \\ &\leq 2M \sum_{i=1}^n \{ [\beta(x_i) - \beta(x_{i-1})] - |\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})| \} + 2\varepsilon + \varepsilon\beta(b) \\ &= 2M(\beta(b) - \sum_{i=1}^n |\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})|) + 2\varepsilon + \varepsilon\beta(b) \\ &\leq 2M\varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon\beta(b), \end{aligned}$$

其中  $M$  为  $|f|$  的上确界. 根据定理 14.6.5, 这说明  $f \in R(\beta)$ .

(3)  $\implies$  (1). 设  $f \in R(\beta)$ , 则任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $[a, b]$  的分割  $\pi$ , 使得

$$0 \leq U(f, \beta; \pi) - L(f, \beta; \pi) < \varepsilon.$$

记  $\gamma = \beta - \alpha$ , 则由

$$|\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})| \leq \bigvee_{x_{i-1}}^{x_i}(\alpha) = \beta(x_i) - \beta(x_{i-1})$$

知

$$\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1}) = [\beta(x_i) - \beta(x_{i-1})] - [\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] \leq 2[\beta(x_i) - \beta(x_{i-1})],$$

因此有

$$\begin{aligned} U(f, \gamma; \pi) - L(f, \gamma; \pi) &= \sum_{i=1}^n [M_i(f) - m_i(f)][\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})] \\ &\leq 2 \sum_{i=1}^n [M_i(f) - m_i(f)][\beta(x_i) - \beta(x_{i-1})] \\ &= 2[U(f, \beta; \pi) - L(f, \beta; \pi)] < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

这说明  $f \in R(\gamma)$ , 根据定义即知  $f$  关于  $\alpha$  可积.  $\square$

**推论 14.6.11.** 设  $\alpha = \beta_1 - \gamma_1$  为有界变差函数, 其中  $\beta_1, \gamma_1$  为单调递增函数. 如果  $f \in R(\beta_1), f \in R(\gamma_1)$ , 则  $f \in R(\alpha)$ , 且

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^b f(x) d\beta_1(x) - \int_a^b f(x) d\gamma_1(x).$$

**证明.** 设  $\alpha = \beta - \gamma$  为  $\alpha$  的典范分解. 任取  $x < y \in [a, b]$ , 有

$$|\alpha(y) - \alpha(x)| \leq [\beta_1(y) - \beta_1(x)] + [\gamma_1(y) - \gamma_1(x)],$$

根据这个不等式以及  $\beta$  的定义可得

$$|\beta(x_i) - \beta(x_{i-1})| = \bigvee_{x_{i-1}}^{x_i} (\alpha) \leq [\beta_1(x_i) - \beta_1(x_{i-1})] + [\gamma_1(x_i) - \gamma_1(x_{i-1})],$$

再由定理 14.6.5 以及  $f \in R(\beta_1), f \in R(\gamma_1)$  可知  $f \in R(\beta)$ , 下略.  $\square$

有了这些结果, 以上关于单调递增函数的 Riemann-Stieltjes 积分的性质就可以推广到有界变差函数, 我们不重复叙述.

**定理 14.6.12** (分部积分). 设  $f, g$  为  $[a, b]$  上的有界变差函数, 则  $f \in R(g)$  时必有  $g \in R(f)$ , 且

$$\int_a^b f(x) dg(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x) df(x).$$

**证明.** 由定理 14.6.10, 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在分割  $\pi_\varepsilon$ , 当  $\pi \geq \pi_\varepsilon$  时

$$\left| S(f, g; \pi, \xi) - \int_a^b f(x) dg(x) \right| < \varepsilon.$$

因为

$$\begin{aligned} &f(b)g(b) - f(a)g(a) - \sum_{i=1}^n g(\xi_i)[f(x_i) - f(x_{i-1})] \\ &= \sum_{i=1}^n [f(x_i)g(x_i) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})] - \sum_{i=1}^n g(\xi_i)[f(x_i) - f(x_{i-1})] \\ &= \sum_{i=1}^n f(x_i)[g(x_i) - g(\xi_i)] + \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})[g(\xi_i) - g(x_{i-1})], \end{aligned}$$

上式是  $f$  关于  $g$  在分割  $\pi' = \pi \cup \{\xi_i\}$  下的 Riemann-Stieltjes 和, 特别地, 有

$$\left| f(b)g(b) - f(a)g(a) - \sum_{i=1}^n g(\xi_i)[f(x_i) - f(x_{i-1})] - \int_a^b f(x)dg(x) \right| < \varepsilon,$$

根据定理 14.6.10,  $g \in R(f)$ , 且

$$\int_a^b g(x)df(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)dg(x),$$

这就是要证明的等式. □

**推论 14.6.13.** 设  $f, g$  为有界变差函数, 如果  $f \in R(g)$ , 则

$$\bigvee_a^x(f) \in R(g).$$

**证明.** 当  $f \in R(g)$  时,  $g \in R(f)$ , 因此

$$g \in R\left(\bigvee_a^x(f)\right),$$

根据分部积分公式,

$$\bigvee_a^x(f) \in R(g),$$

这就证明了推论. □

**定理 14.6.14** (积分第二中值公式). 设  $f$  为  $[a, b]$  上的单调函数,  $g$  为  $[a, b]$  上的连续有界变差函数, 则存在  $\xi \in [a, b]$ , 使得

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(a)[g(\xi) - g(a)] + f(b)[g(b) - g(\xi)].$$

**证明.** 根据分部积分公式, 有

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)df(x),$$

在根据积分第一中值公式, 存在  $\xi \in [a, b]$ , 使得

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - g(\xi)[f(b) - f(a)],$$

这也就是要证明的结论. □

**定理 14.6.15** (变量替换). 设  $\phi$  为  $[\alpha, \beta]$  上的连续单调递增函数, 如果  $g(x)$  为  $\phi([\alpha, \beta]) = [a, b]$  上的有界变差函数,  $f \in R(g)$ , 则  $f(\phi) \in R(g(\phi))$ , 且

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi)dg(\phi) = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)dg(x).$$

**证明.** 不妨设  $g$  是单调递增函数. 由  $f \in R(g)$  以及定理 14.6.5 知, 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $[a, b]$  的分割  $\pi_\varepsilon$ , 使得当  $\pi \geq \pi_\varepsilon$  时

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\eta_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})] - \int_a^b f(x)dg(x) \right| < \varepsilon.$$

设  $\{x_i\}$  为  $\pi_\varepsilon$  的分点, 作  $[\alpha, \beta]$  的分割如下: 取  $t_0 = \alpha$ . 当  $i \geq 1$  时, 取  $t_i \in [\alpha, \beta]$  使得  $t_i$  是满足条件  $\phi(t_i) = x_i$  的最大数, 因为  $\phi$  是连续的, 因此这是可以取到的, 且

$$\pi'_\varepsilon: \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$$

是  $[\alpha, \beta]$  的一个分割. 当  $\pi' \geq \pi'_\varepsilon$  时,  $\pi'$  的分点在  $\phi$  下的像组成了  $[a, b]$  的分割 (可能有重复的点), 且这个分割是  $\pi_\varepsilon$  的加细, 因此, 如果记

$$\pi': \alpha = t'_0 < t'_1 < \cdots < t'_n = \beta,$$

则

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\phi(\xi'_i))[g(\phi(t'_i)) - g(\phi(t'_{i-1}))] - \int_a^b f(x)dg(x) \right| < \varepsilon,$$

根据定理 14.6.5, 这说明  $f(\phi) \in R(g(\phi))$ , 且

$$\int_\alpha^\beta f(\phi)dg(\phi) = \int_a^b f(x)dg(x).$$

这就证明了定理. □

**注.** 如果  $\phi$  为连续单调递减函数, 则有完全类似的结果成立.

下面讨论 Riemann 积分和 Riemann-Stieltjes 积分之间的一些联系.

**定理 14.6.16.** 设  $g(x)$  为  $[a, b]$  上的 Riemann 可积函数,  $C$  为常数. 记

$$G(x) = \int_a^x g(t)dt + C, \quad x \in [a, b].$$

如果  $f$  为  $[a, b]$  上有界函数, 则  $f \in R(G)$  当且仅当  $fg$  在  $[a, b]$  上 Riemann 可积, 且此时

$$\int_a^b f(x)dG(x) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

**证明.** 设  $fg$  在  $[a, b]$  上 Riemann 可积, 则任给  $\varepsilon$ , 存在  $\delta > 0$ , 当  $\|\pi\| < \delta$  时

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)g(x)dx \right| < \varepsilon, \quad \sum_{i=1}^n \omega_i(g)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{M+1},$$



其中  $|f| \leq M$ . 此时有

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)[G(x_i) - G(x_{i-1})] - \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \\
 &= \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)dx - \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \\
 &= \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} (g(x) - g(\xi_i))dx - \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \\
 &\leq \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)g(x)dx \right| + M \sum_{i=1}^n \omega_i(g)\Delta x_i \\
 &< 2\varepsilon,
 \end{aligned}$$

根据定理 14.6.10 知  $f \in R(G)$ , 且

$$\int_a^b f(x)dG(x) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

定理的另一半证明留作练习.  $\square$

**例 14.6.1.** 有界变差函数的 Fourier 系数估计.

设  $f$  为  $[-\pi, \pi]$  上的有界变差函数, 其 Fourier 系数为  $a_n, b_n$ . 则由此定理以及分部积分公式, 有

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) d\frac{\sin nx}{n} \\
 &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{n} df(x),
 \end{aligned}$$

由此得到如下估计

$$|a_n| \leq \frac{1}{n\pi} \bigvee_{-\pi}^{\pi}(f), \quad \forall n \geq 1.$$

同理可得

$$|b_n| \leq \frac{1}{n\pi} |f(\pi-0) - f(-\pi+0)| + \frac{1}{n\pi} \bigvee_{-\pi}^{\pi}(f), \quad \forall n \geq 1.$$

这些估计要比第十章第五节中的更精确.  $\square$

一般地, 如果  $f, g$  均在  $[a, b]$  上 Riemann 可积, 则上述定理结论成立. 结合分部积分公式中, 就得到关于 Riemann 积分的如下分部积分公式:

**推论 14.6.17** (分部积分之二). 设  $f, g$  为 Riemann 可积函数, 记

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + C, \quad G(x) = \int_a^x g(t)dt + D, \quad x \in [a, b].$$

则

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)dx.$$

我们也可以将 Riemann-Stieltjes 积分的第二中值公式改写为关于 Riemann 积分的第二中值公式, 请读者自行完成. 结合前面的变量替换则可以得到如下的 Riemann 积分的变量替换公式: 设  $\phi$  为可微单调函数, 且  $\phi'$  在  $[\alpha, \beta]$  上可积, 则当  $f$  在  $\phi([\alpha, \beta])$  上 Riemann 可积时,  $f(\phi)\phi'$  在  $[\alpha, \beta]$  上 Riemann 可积, 且

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi)\phi'(t)dt = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)dx.$$

我们还可以得到一个更一般的结果.

**定理 14.6.18** (变量替换之二). 设  $g(t)$  为  $[\alpha, \beta]$  上的 Riemann 可积函数, 记

$$G(t) = \int_{\alpha}^t g(s)ds + C, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

如果  $f(x)$  为  $G([\alpha, \beta])$  上的 Riemann 可积函数, 则  $f(G) \in R(G)$ , 且

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(G)dG = \int_{\alpha}^{\beta} f(G)g(t)dt = \int_{G(\alpha)}^{G(\beta)} f(x)dx.$$

**证明.** 任给  $\varepsilon > 0$ , 由  $g$  为 Riemann 可积函数知, 存在  $[\alpha, \beta]$  的分割

$$\pi: \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta,$$

使得

$$\sum_{\omega_i(g) \geq \varepsilon} \Delta t_i < \varepsilon.$$

我们把  $\omega_i(g) < \varepsilon$  的小区间  $[t_{i-1}, t_i]$  分成两类:

(1)  $|g(t)| \leq \varepsilon, \forall t \in [t_{i-1}, t_i]$ . 这一类区间记为  $I$  型的, 此时有

$$\sum_I |G(t_i) - G(t_{i-1})| \leq \sum_I \int_{t_{i-1}}^{t_i} |g(t)|dt \leq \varepsilon(\beta - \alpha).$$

(2) 存在  $\xi \in [t_{i-1}, t_i]$  使得  $|g(\xi)| > \varepsilon$ . 这一类区间记为  $II$  型的. 此时, 由于  $\omega_i(g) < \varepsilon$ , 故  $g(t)$  在  $[t_{i-1}, t_i]$  上要么恒正, 要么恒负. 这说明  $G(t)$  在  $[t_{i-1}, t_i]$  上是严格单调的. 根据前面变量代换公式的证明, 通过进一步地细分第二型的小区间, 可使

$$\sum_{II} \omega_i(f(G)) |G(t_i) - G(t_{i-1})| < \varepsilon$$

成立.

设  $|f|, |g| \leq M$ . 结合上面这些估计, 我们有

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^n \omega_i(f(G)) |G(t_i) - G(t_{i-1})| \\
 &= \sum_{\omega_i(g) \geq \varepsilon} \omega_i(f(G)) |G(t_i) - G(t_{i-1})| + \sum_I \omega_i(f(G)) |G(t_i) - G(t_{i-1})| \\
 &\quad + \sum_{II} \omega_i(f(G)) |G(t_i) - G(t_{i-1})| \\
 &\leq \sum_{\omega_i(g) \geq \varepsilon} 2M^2 \Delta t_i + \sum_I 2M |G(t_i) - G(t_{i-1})| + \varepsilon \\
 &\leq 2M^2 \varepsilon + 2M\varepsilon(\beta - \alpha) + \varepsilon.
 \end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{i=1}^n f(G(\eta_i)) [G(t_i) - G(t_{i-1})] - \int_{G(\alpha)}^{G(\beta)} f(x) dx \right| \\
 &= \left| \sum_{i=1}^n f(G(\eta_i)) [G(t_i) - G(t_{i-1})] - \sum_{i=1}^n \int_{G(t_{i-1})}^{G(t_i)} f(x) dx \right| \\
 &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{G(t_{i-1})}^{G(t_i)} [f(G(\eta_i)) - f(x)] dx \right| \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \omega_i(f(G)) |G(t_i) - G(t_{i-1})| \\
 &\leq 2M^2 \varepsilon + 2M\varepsilon(\beta - \alpha) + \varepsilon.
 \end{aligned}$$

对于分割  $\pi$  的加细, 上式仍然成立. 因此, 根据定理 14.6.10 知  $f(G) \in R(G)$ , 且

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(G) dG = \int_{G(\alpha)}^{G(\beta)} f(x) dx,$$

定理证毕. □

注. Riemann-Stieltjes 积分是荷兰数学家 Stieltjes 在研究连分数时引入的, 它在概率论和金融数学等领域应用十分广泛.

## 第十五章 微分形式的积分



初次阅读本书时, 本章内容可以略过,  
也可以将部分内容作为选读材料.

本章主要的任务是将前一章中的 Green 公式, Gauss 公式和曲面上的 Stokes 公式统一在一起. 为了做到这一点, 我们要引入新的研究对象, 它们是函数以及向量值函数的推广, 称为微分形式.

### §15.1 微分形式

回顾一下, 设  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  为一元函数, 如果  $f(x)$  在  $x_0$  处可微, 则  $f(x)$  在  $x_0$  附近可用线性函数  $x_0 + f'(x_0)(x - x_0)$  作近似逼近:

$$f(x) - [x_0 + f'(x_0)(x - x_0)] = o(x - x_0) \quad (x \rightarrow x_0),$$

这是微分学的出发点, 其基本思想就是将函数在一点处线性化, 得到的线性函数

$$df_{x_0} = df(x_0): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto f'(x_0)t$$

称作  $f$  在  $x_0$  的微分. 对于函数  $f(x) = x$  来说, 它本身就是线性的, 因此线性化以后仍为自身, 即  $dx(x_0)$  为恒同映射, 从而对于一般的  $f$ ,  $f$  在  $x_0$  处的微分也可以表示为

$$df_{x_0} = f'(x_0)dx(x_0).$$

上述讨论对于多元函数也适用. 设  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  为在  $x_0$  处可微的函数, 则

$$f(x) - [f(x_0) + Jf(x_0)(x - x_0)] = o(\|x - x_0\|) \quad (x \rightarrow x_0),$$

其中

$$Jf(x_0) = \nabla f(x_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right).$$

线性函数

$$df_{x_0}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad t = (t_1, \dots, t_n) \mapsto Jf(x_0)(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)t_i$$

称为  $f$  在  $x_0$  处的微分. 当  $f(x) = x_i$  是第  $i$  个坐标函数时, 其线性化是自身, 因此  $f$  在  $x_0$  处的微分又可以写为

$$df_{x_0} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)dx_1(x_0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)dx_n(x_0).$$

我们再把讨论推广到欧氏空间中的曲面上. 设  $\Sigma$  为  $\mathbb{R}^n$  中的参数曲面, 其参数表示为  $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

$$\varphi(u_1, \dots, u_m) = (x_1(u_1, \dots, u_m), \dots, x_n(u_1, \dots, u_m)).$$

设  $u^0$  为  $\Sigma$  的一个正则点,  $\varphi(u^0) = p$ . 如果  $f$  是  $\Sigma$  上定义的函数, 一个基本的问题就是: 在点  $p$  处如何对  $f$  作线性化?

线性映射当然定义在线性空间 (向量空间) 上. 因此, 第一步应该对曲面作线性化. 事实上, 在  $p$  处将  $\Sigma$  作线性化得到的线性空间就是  $\Sigma$  在  $p$  处的切空间  $T_p\Sigma$ , 它由  $p$  处与  $\Sigma$  相切的所有向量组成, 这是一个  $m$  维的线性空间, 它的一组基为

$$\varphi_{u_i}(u^0) = \left( \frac{\partial x_1}{\partial u_i}(u^0), \dots, \frac{\partial x_n}{\partial u_i}(u^0) \right), \quad i = 1, \dots, m.$$

如果  $f \circ \varphi$  在  $u^0$  处可微, 则  $f$  在  $p$  处的线性化为线性函数

$$\begin{aligned} df_p: T_p\Sigma &\rightarrow \mathbb{R} \\ X_p = \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_{u_i}(u^0) &\mapsto \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial u_i}(u^0), \end{aligned}$$

这个线性函数称为  $f$  在  $p$  处的微分, 它也可以这样定义: 设  $X_p \in T_p\Sigma$  为  $p$  处的切向量, 取  $\Sigma$  上从  $p$  出发的曲线  $\sigma(t)$ , 使得  $\sigma'(0) = X_p$ , 即  $\sigma$  的初始切向量为  $X_p$ , 则

$$df_p(X_p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\sigma(t)),$$

请读者验证这两种定义方式的等价性. 有时又记  $df_p(X_p) = X_p(f)$ , 这表示  $df_p(X_p)$  是  $f$  沿着切向  $X_p$  求导.

我们知道, 在线性代数中, 一个向量空间上的线性函数的全体也组成了向量空间, 称为对偶空间. 因此,  $f$  在  $p$  处的微分  $df_p$  可以看成切空间  $T_p\Sigma$  的对偶空间  $T_p^*\Sigma$  中的元素, 我们将  $T_p^*\Sigma$  称为  $p$  处的余切空间, 余切空间中的元素称为余切向量. 记

$$T\Sigma = \bigcup_{p \in \Sigma} T_p\Sigma, \quad T^*\Sigma = \bigcup_{p \in \Sigma} T_p^*\Sigma,$$

分别称为  $\Sigma$  的切丛和余切丛.

如果  $f$  在  $\Sigma$  上处处可微, 则我们有映射

$$df: \Sigma \rightarrow T^*\Sigma, \quad p \mapsto df_p \in T_p^*\Sigma,$$

称为  $f$  在  $\Sigma$  上的全微分. 更一般地, 如果映射  $\omega: \Sigma \rightarrow T^*\Sigma$  满足条件

$$\omega(p) \in T_p^*\Sigma, \quad \forall p \in \Sigma,$$

则称  $\omega$  为  $\Sigma$  上的 **1 次外微分形式**, 或简称 1 形式, 1 次微分形式等.  $f$  的全微分就是一个 1 形式. 由于余切空间的线性性, 1 形式之间也可以自然地定义加法和数乘运算.

1 形式有时又称为余切向量场, 这是因为 1 形式是一个在每一点  $p$  都指定  $p$  处的一个余切向量  $\omega(p)$  的映射. 在这个意义上, 它和切向量场没有本质区别: 切向量场是在每一点  $p$  都指定  $p$  处的一个切向量的映射. 进一步, 我们可以意识到 1 形式或 (切) 向量场只是向量值函数的推广: 向量值函数是在每一点  $p$  都指定一个向量的映射, 区别在于向量位于什么空间中而已.

#### 例 15.1.1. $\mathbb{R}^m$ 中的向量场和 1 形式.

将  $\mathbb{R}^m$  看成  $\mathbb{R}^n$  中的  $m$  维平面 ( $n > m$ ), 则前面的讨论完全适用. 由于欧氏空间是线性的, 其在每一点的切空间可以跟自身等同起来, 即  $T\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ . 同理,  $T^*\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^m)^*$ . 这时,  $\mathbb{R}^m$  上的向量场可以看成是  $\mathbb{R}^m$  上的向量值函数, 通常人们就是这么介绍向量场的.

设  $\omega$  为  $\mathbb{R}^m$  上的 1 形式. 任取  $p \in \mathbb{R}^m$ , 由于  $\omega(p) \in T_p^*\mathbb{R}^m$ , 而  $T_p^*\mathbb{R}^m$  的一组基为  $\{dx_1(p), \dots, dx_m(p)\}$ , 故  $\omega(p)$  可以表示为

$$\omega(p) = \sum_{i=1}^m a_i(p) dx_i(p),$$

当  $p$  变动时  $a_i(p)$  ( $1 \leq i \leq m$ ) 是关于  $p$  的函数. 因此我们也记为

$$\omega = \sum_{i=1}^m a_i dx_i.$$

如果函数  $\{a_i\}$  均为  $C^k$  的, 则称 1 形式  $\omega$  是  $C^k$  的. 例如, 当  $f$  是  $C^k$  函数时, 其全微分  $df$  是  $C^{k-1}$  的.

现在我们继续将研究对象作进一步的推广. 记  $T_p\Sigma$  的  $s$  个乘积为

$$(T_p\Sigma)^s = T_p\Sigma \times \cdots \times T_p\Sigma.$$

设  $\omega : (T_p\Sigma)^s \rightarrow \mathbb{R}$  为函数, 且

(i)  $\omega$  关于每一个分量都是线性的, 即  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  时

$$\omega(\cdots, \lambda X_i + \mu Y_i, \cdots) = \lambda \omega(\cdots, X_i, \cdots) + \mu \omega(\cdots, Y_i, \cdots), \quad \forall X_i, Y_i \in T_p^*\Sigma.$$

(ii)  $\omega$  关于任意两个分量是反称的, 即交换两个分量的位置时  $\omega$  的值相差一个符号. 用置换来表示就是

$$\omega(X_{\pi(1)}, \cdots, X_{\pi(s)}) = (-1)^\pi \omega(X_1, \cdots, X_s),$$

其中  $\pi$  是  $\{1, 2, \dots, s\}$  的任意置换, 当  $\pi$  为偶置换时  $(-1)^\pi = 1$ ; 当  $\pi$  为奇置换时  $(-1)^\pi = -1$ .

则称  $\omega$  为  $p$  处的一个  $s$  次外形式,  $p$  处的所有  $s$  次外形式构成的线性空间记为  $\bigwedge^s T_p^* \Sigma$ . 当  $s = 1$  时,  $\bigwedge^1 T_p^* \Sigma$  就是对偶空间  $T_p^* \Sigma$ .

**例 15.1.2.**  $\bigwedge^2 T_p^* \Sigma$  的结构.

根据定义,  $p$  处的 2 次外形式就是定义在切空间  $T_p \Sigma$  上的一个反称的双线性型. 给定  $\omega, \eta \in T_p^* \Sigma$ , 我们来定义一个这样的反称双线性型  $\omega \wedge \eta$ : 任取切向量  $X, Y$ , 令

$$\omega \wedge \eta(X, Y) = \omega(X)\eta(Y) - \omega(Y)\eta(X),$$

显然  $\omega \wedge \eta$  满足以上两个条件, 因此  $\omega \wedge \eta \in \bigwedge^2 T_p^* \Sigma$ . 我们还有

$$\omega \wedge \eta = -\eta \wedge \omega, \quad (\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta.$$

特别地,  $\omega \wedge \omega = 0$ . 如果取  $T_p \Sigma$  的一组基  $\{e_i\}_{i=1}^m$ , 记  $T_p^* \Sigma$  的一组相应的对偶基为  $\{e^i\}_{i=1}^m$ , 即

$$e^i \left( \sum_{j=1}^m \lambda_j e_j \right) = \lambda_i, \quad \forall \lambda_j \in \mathbb{R} \quad (1 \leq j \leq m),$$

则我们断言  $\{e^i \wedge e^j\} \ (i < j)$  为  $\bigwedge^2 T_p^* \Sigma$  的一组基. 事实上, 先说明它们是线性无关的: 如果

$$\sum_{i < j} \lambda_{ij} e^i \wedge e^j = 0,$$

则当  $i < j$  时 (其中  $\delta_l^k = 1$ , 当  $k = l$ ;  $\delta_l^k = 0$ , 当  $k \neq l$ )

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k < l} \lambda_{kl} e^k \wedge e^l(e_i, e_j) \\ &= \sum_{k < l} \lambda_{kl} [e^k(e_i)e^l(e_j) - e^k(e_j)e^l(e_i)] \\ &= \sum_{k < l} \lambda_{kl} [\delta_i^k \delta_j^l - \delta_j^k \delta_i^l] \\ &= \lambda_{ij}, \end{aligned}$$

这说明  $\{e^i \wedge e^j\} \ (i < j)$  线性无关.

其次, 任取  $\omega \in \bigwedge^2 T_p^* \Sigma$ , 记  $\lambda_{ij} = \omega(e_i, e_j)$ , 则不难验证

$$\omega = \sum_{i < j} \lambda_{ij} e^i \wedge e^j.$$

因此,  $\{e^i \wedge e^j\} \ (i < j)$  为  $\bigwedge^2 T_p^* \Sigma$  的一组基. 特别地,

$$\dim \bigwedge^2 T_p^* \Sigma = C_m^2 = \frac{1}{2}m(m-1).$$

如同余切丛那样, 令

$$\bigwedge^2 T^*\Sigma = \bigcup_{p \in \Sigma} \bigwedge^2 T_p^*\Sigma,$$

称为  $\Sigma$  上的 2 形式丛. 设映射  $\omega: \Sigma \rightarrow \bigwedge^2 T^*\Sigma$  满足条件

$$\omega(p) = \omega_p \in \bigwedge^2 T_p^*\Sigma, \quad \forall p \in \Sigma,$$

则称  $\omega$  为  $\Sigma$  上的 2 次外微分形式, 简称 2 形式或 2 次微分形式.

2 次微分形式就是在每一点  $p$  处指定一个 2 次外形式的映射. 如果  $\omega, \eta$  为  $\Sigma$  上的 1 次微分形式, 则  $\omega \wedge \eta$  可以逐点定义, 它是  $\Sigma$  上的一个 2 次微分形式.

**例 15.1.3.** 2 次微分形式和有向面积元.

设  $(x, y)$  为平面直角坐标, 则  $dx \wedge dy$  为  $\mathbb{R}^2$  上的一个 2 次微分形式. 如果  $(u, v)$  是另一坐标, 记

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v),$$

则

$$dx = x_u du + x_v dv, \quad dy = y_u du + y_v dv,$$

从而有

$$dx \wedge dy = (x_u du + x_v dv) \wedge (y_u du + y_v dv) = (x_u y_v - y_u x_v) du \wedge dv,$$

即

$$dx \wedge dy = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du \wedge dv.$$

这个等式和二重积分的变量替换公式很象, 区别在于这里的行列式没有绝对值. 因此, 我们把  $dx \wedge dy$  称为平面上关于坐标  $(x, y)$  的有向面积元, 这是 2 次微分形式的一个几何解释. 当  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  时, 下面的等式就很自然了

$$dx \wedge dy = r dr \wedge d\theta.$$

上面的这些讨论可推广到一般的  $s$  次外形式空间上. 例如, 沿用以上记号, 设  $\omega, \eta, \zeta$  为  $T_p^*\Sigma$  中的余切向量, 定义  $\omega \wedge \eta \wedge \zeta \in \bigwedge^3 T_p^*\Sigma$  如下: 设  $X, Y, Z$  为  $T_p\Sigma$  中的任意切向量, 令

$$\begin{aligned} \omega \wedge \eta \wedge \zeta(X, Y, Z) &= \omega(X)\eta(Y)\zeta(Z) - \omega(X)\eta(Z)\zeta(Y) \\ &\quad + \omega(Y)\eta(Z)\zeta(X) - \omega(Y)\eta(X)\zeta(Z) \\ &\quad + \omega(Z)\eta(X)\zeta(Y) - \omega(Z)\eta(Y)\zeta(X), \end{aligned}$$



容易验证  $\omega \wedge \eta \wedge \zeta$  的确为一个 3 次外形式, 且这个 3 次外形式关于  $\omega, \eta$  以及  $\zeta$  具有线性性和反称性.

与 2 次外形式类似,  $\{e^i \wedge e^j \wedge e^k\} (i < j < k)$  组成了  $\bigwedge^3 T_p^* \Sigma$  的一组基, 特别地, 这个空间的维数为  $C_m^3$ . 令

$$\bigwedge^3 T^* \Sigma = \bigcup_{p \in \Sigma} \bigwedge^3 T_p^* \Sigma,$$

称为  $\Sigma$  上的 3 形式丛. 设映射  $\omega: \Sigma \rightarrow \bigwedge^3 T^* \Sigma$  满足条件

$$\omega(p) = \omega_p \in \bigwedge^3 T_p^* \Sigma, \quad \forall p \in \Sigma,$$

则称  $\omega$  为  $\Sigma$  上的 3 次外微分形式, 简称 3 形式或 3 次微分形式.

3 次微分形式就是在每一点  $p$  处指定一个 3 次外形式的映射. 如果  $\omega, \eta, \zeta$  为  $\Sigma$  上的 1 次微分形式, 则  $\omega \wedge \eta \wedge \zeta$  可以逐点定义, 它是  $\Sigma$  上的一个 3 次微分形式.

**例 15.1.4.** 3 次微分形式和有向体积元.

设  $(x, y, z)$  为  $\mathbb{R}^3$  的直角坐标, 则  $dx \wedge dy \wedge dz$  为一个 3 次微分形式. 如果  $(u, v, w)$  是另一坐标, 记

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w),$$

则

$$\begin{aligned} dx &= x_u du + x_v dv + x_w dw, & dy &= y_u du + y_v dv + y_w dw, \\ dz &= z_u du + z_v dv + z_w dw. \end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned} dx \wedge dy \wedge dz &= (x_u du + x_v dv + x_w dw) \wedge (y_u du + y_v dv + y_w dw) \wedge (z_u du + z_v dv + z_w dw) \\ &= x_u du \wedge (y_v dv + y_w dw) \wedge (z_v dv + z_w dw) + x_v dv \wedge (y_u du + y_w dw) \wedge (z_u du + z_w dw) \\ &\quad + x_w dw \wedge (y_u du + y_v dv) \wedge (z_u du + z_v dv) \\ &= x_u(y_v z_w - y_w z_v) du \wedge dv \wedge dw - x_v(y_u z_w - y_w z_u) du \wedge dv \wedge dw \\ &\quad + x_w(y_u z_v - y_v z_u) du \wedge dv \wedge dw \\ &= \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} du \wedge dv \wedge dw, \end{aligned}$$

这个等式和三重积分的变量替换公式很象, 我们把  $dx \wedge dy \wedge dz$  称为有向体积元或体积形式.

**例 15.1.5.**  $\mathbb{R}^3$  中的 2 次微分形式.

设  $(x, y, z)$  为  $\mathbb{R}^3$  的直角坐标, 则  $dy \wedge dz$ ,  $dz \wedge dx$  和  $dx \wedge dy$  均为 2 次微分形式. 由于在每一点它们都构成了该点处 2 次外形式的基, 因此  $\mathbb{R}^3$  中的 2 次微分形式均可表示为

$$\omega = P(x, y, z)dy \wedge dz + Q(x, y, z)dz \wedge dx + R(x, y, z)dx \wedge dy.$$

如果系数  $P, Q, R$  为  $C^k$  函数, 则称  $\omega$  为  $C^k$  的 2 次微分形式.

对于一般的  $s$ , 设  $\omega_i$  ( $1 \leq i \leq s$ ) 为  $s$  个 1 形式, 定义  $s$  次外形式

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_s : (T_p \Sigma)^s \rightarrow \mathbb{R}$$

如下:

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_s(X_1, \cdots, X_s) = \sum_{\pi} (-1)^{\pi} \omega_1(X_{\pi(1)}) \cdots \omega_s(X_{\pi(s)}),$$

其中  $X_i$  ( $1 \leq i \leq s$ ) 为任意切向量, 上式求和是对  $\{1, \cdots, s\}$  的所有置换  $\pi$  求的.

类似于前面的讨论可知,  $\bigwedge^s T_p^* \Sigma$  的一组基为

$$\{e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_s}\}, \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_s \leq m.$$

特别地, 它的维数为  $C_m^s$ . 当  $s > m$  时,  $s$  次外形式均为零. 令

$$\bigwedge^s T^* \Sigma = \bigcup_{p \in \Sigma} \bigwedge^s T_p^* \Sigma,$$

称为  $\Sigma$  上的  $s$  形式丛. 设映射  $\omega : \Sigma \rightarrow \bigwedge^s T^* \Sigma$  满足条件

$$\omega(p) = \omega_p \in \bigwedge^s T_p^* \Sigma, \quad \forall p \in \Sigma,$$

则称  $\omega$  为  $\Sigma$  上的  $s$  次外微分形式, 简称  $s$  形式或  $s$  次微分形式.

$s$  次微分形式就是在每一点  $p$  处指定一个  $s$  次外形式的映射.

**例 15.1.6.**  $m$  次微分形式与行列式.

设  $(x_1, \cdots, x_m)$  为  $\mathbb{R}^m$  上的直角坐标, 则  $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$  为一个  $m$  次微分形式. 对于另一坐标  $u_1, \cdots, u_m$ , 记

$$x_i = x_i(u_1, \cdots, u_m), \quad i = 1, \cdots, m,$$

则

$$dx_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial x_i}{\partial u_j} du_j, \quad i = 1, \cdots, m.$$

因此

$$\begin{aligned}
 dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m &= \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial x_1}{\partial u_j} du_j \right) \wedge \cdots \wedge \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial x_m}{\partial u_j} du_j \right) \\
 &= \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_m \leq m} \frac{\partial x_1}{\partial u_{j_1}} \cdots \frac{\partial x_m}{\partial u_{j_m}} du_{j_1} \wedge \cdots \wedge du_{j_m} \\
 &= \sum_{\pi} \frac{\partial x_1}{\partial u_{\pi(1)}} \cdots \frac{\partial x_m}{\partial u_{\pi(m)}} du_{\pi(1)} \wedge \cdots \wedge du_{\pi(m)} \\
 &= \sum_{\pi} (-1)^{\pi} \frac{\partial x_1}{\partial u_{\pi(1)}} \cdots \frac{\partial x_m}{\partial u_{\pi(m)}} du_1 \wedge \cdots \wedge du_m \\
 &= \frac{\partial(x_1, \dots, x_m)}{\partial(u_1, \dots, u_m)} du_1 \wedge \cdots \wedge du_m.
 \end{aligned}$$

作为应用, 考虑线性变换  $x = A(u)$ , 即

$$x_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} u_j, \quad i = 1, \dots, m,$$

则

$$dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m = (\det A) du_1 \wedge \cdots \wedge du_m,$$

这个等式可以作为行列式的定义. 如果  $u = B(w)$  仍为线性变换, 则

$$du_1 \wedge \cdots \wedge du_m = (\det B) dw_1 \wedge \cdots \wedge dw_m,$$

这说明

$$dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m = (\det A)(\det B) dw_1 \wedge \cdots \wedge dw_m,$$

另一方面, 复合变换  $x = A(B(w))$  满足等式

$$dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m = (\det AB) dw_1 \wedge \cdots \wedge dw_m,$$

这就得到线性代数中行列式的乘积性质  $\det AB = (\det A)(\det B)$ .

一般地, 如果  $\omega$  为  $\mathbb{R}^m$  中的  $s$  次微分形式, 则它可以表示为

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_s \leq m} \omega_{i_1 \dots i_s} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_s},$$

其中系数  $\omega_{i_1 \dots i_s}$  为  $\mathbb{R}^m$  上的函数, 如果这些系数都是  $C^k$  函数, 则称  $\omega$  为  $C^k$  的  $s$  次微分形式.

设  $\omega$  为  $s$  次微分形式,  $\eta$  为  $t$  次微分形式, 则定义一个  $s+t$  次的微分形式  $\omega \wedge \eta$  如下:

$$\omega \wedge \eta = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_s \leq m} \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_t \leq m} \omega_{i_1 \dots i_s} \eta_{j_1 \dots j_t} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_s} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_t},$$

这个运算具有以下性质:

- 这个运算可以逐点定义, 即可对一点处的外形式定义;
- $\omega \wedge \eta$  关于  $\omega$  和  $\eta$  是线性的, 例如

$$(\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2) \wedge \eta = \lambda_1 \omega_1 \wedge \eta + \lambda_2 \omega_2 \wedge \eta;$$

- $\omega \wedge \eta$  关于  $\omega$  和  $\eta$  是分次可交换的, 即

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{st} \eta \wedge \omega;$$

- 运算具有结合律, 如

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \zeta = \omega \wedge (\eta \wedge \zeta),$$

因此, 上式中的括号通常可以省略.

这些运算也可以定义在曲面上. 例如, 设  $\omega$  和  $\eta$  分别是  $p$  处的  $s$  次外形式和  $t$  次外形式, 则可用下式定义  $s+t$  次外形式  $\omega \wedge \eta$ :

$$\omega \wedge \eta(X_1, \dots, X_{s+t}) = \frac{1}{s!t!} \sum_{\pi} \omega(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(s)}) \cdot \eta(X_{\pi(s+1)}, \dots, X_{\pi(s+t)}),$$

其中上式对  $\{1, \dots, s+t\}$  的所有置换  $\pi$  求和,  $X_i$  ( $1 \leq i \leq s+t$ ) 为任意切向量. 读者可验证, 在  $\mathbb{R}^m$  上这个定义和前面的定义是一致的.

现在考虑重要的拉回运算. 先对曲面上函数的微分作个推广. 设  $f: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$  是曲面之间的可微映射 (在参数表示下可微),  $f(p) = q$ . 对于  $p$  处的一个切向量  $X_p$ , 取  $\Sigma_1$  上从  $p$  处出发的曲线  $\sigma(t)$ , 使得  $\sigma'(0) = X_p$ , 则令

$$df_p(X_p) = (f \circ \sigma)'(0) \in T_q \Sigma_2,$$

这样得到的线性映射

$$df_p: T_p \Sigma_1 \rightarrow T_p \Sigma_2$$

称为  $f$  在  $p$  处的微分或切映射, 它可以看成  $f$  在  $p$  处的线性化.

设  $f$  如上, 如果  $\eta$  为  $\Sigma_2$  上的一个  $s$  次微分形式, 则我们定义  $\Sigma_1$  上的一个  $s$  次微分形式  $f^* \eta$  如下:

$$f^* \eta(X_1, \dots, X_s) = \eta(df(X_1), \dots, df(X_s)),$$

其中, 如果  $X_i$  ( $1 \leq i \leq s$ ) 为  $p$  处切向量, 则  $df(X_i) = df_p(X_i)$  为  $f(p)$  处的切向量.  $f^* \eta$  称为  $\eta$  在映射  $f$  下的拉回. 如果  $f$  是包含映射, 则  $f$  的拉回映射其实就是限制映射. 拉回映射具有下列性质:

- $f^*(\omega \wedge \eta) = f^* \omega \wedge f^* \eta$ ;

- 如果  $g, h$  为  $\Sigma_2$  上的函数, 则  $f^*(gdh) = g \circ fd(h \circ f)$ .

**例 15.1.7.** 曲面上 2 次微分形式的拉回.

设  $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  为参数曲面, 其方程为

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

考虑  $\mathbb{R}^3$  中的 2 次微分形式

$$\omega = P(x, y, z)dy \wedge dz + Q(x, y, z)dz \wedge dx + R(x, y, z)dx \wedge dy,$$

它在  $\varphi$  下的拉回为

$$\begin{aligned} \varphi^*(\omega) &= P(\varphi)(y_u du + y_v dv) \wedge (z_u du + z_v dv) + Q(\varphi)(z_u du + z_v dv) \wedge (x_u du + x_v dv) \\ &\quad + R(\varphi)(x_u du + x_v dv) \wedge (y_u du + y_v dv) \\ &= P(\varphi) \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} du \wedge dv + Q(\varphi) \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} du \wedge dv + R(\varphi) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du \wedge dv. \end{aligned}$$

**例 15.1.8.** 体积元的拉回.

考虑可微映射  $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ , 根据上面的性质, 有

$$\begin{aligned} \varphi^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m) &= \varphi^* dx_1 \wedge \cdots \wedge \varphi^* dx_m \\ &= d\varphi_1 \wedge \cdots \wedge d\varphi_m \\ &= \left( \sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} dx_i \right) \wedge \cdots \wedge \left( \sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} dx_i \right) \\ &= (\det J\varphi) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m. \end{aligned}$$

**例 15.1.9.**  $\mathbb{R}^{2n}$  上的辛形式与辛变换.

考虑  $\mathbb{R}^{2n}$  上的 2 形式

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dx_{n+i},$$

这个 2 形式称为  $\mathbb{R}^{2n}$  上的标准辛形式. 如果线性变换  $A: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  保持  $\omega$  不变, 即

$$A^*\omega = \omega,$$

则称  $A$  为一个辛变换. 如果  $A$  的矩阵表示为  $(a_{ij})_{2n \times 2n}$ , 则

$$A^*\omega = \sum_{i=1}^n A^* dx_i \wedge A^* dx_{n+i} = \sum_{i=1}^n \sum_{1 \leq k, l \leq 2n} a_{ik} a_{n+i, l} dx_k \wedge dx_l,$$

因此  $A^*\omega = \omega$  等价于以下条件

$$\begin{aligned} a_{ik}a_{n+i, n+k} - a_{i, n+k}a_{n+i, k} &= 1 \quad (1 \leq k \leq n), \\ a_{ik}a_{n+i, l} - a_{il}a_{n+i, k} &= 0 \quad (|k-l| \neq n). \end{aligned}$$

用矩阵表示就是

$$A \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} A^T = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

如果在上式两边取行列式, 则得到  $(\det A)^2 = 1$ . 下面我们说明实际上只能有  $\det A = 1$ .

事实上, 记  $\Omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{2n}$  为  $\mathbb{R}^{2n}$  上的体积形式, 则

$$\omega^n = \omega \wedge \cdots \wedge \omega = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n! \Omega, \quad (15.1)$$

另一方面, 由  $A^*\omega = \omega$  知  $A^*(\omega)^n = (A^*\omega)^n = \omega^n$ , 这表明  $A^*\Omega = \Omega$ . 根据前面的例子,  $A^*\Omega = (\det A)\Omega$ , 因此  $\det A = 1$ .

### 习题 15.1

1. 设  $u \in \mathbb{R}^n$  为单位向量,  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  为可微函数. 如果  $\sigma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  为可微曲线, 且  $\sigma'(0) = u$ , 证明

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\sigma(t)).$$

2. 设  $\omega$  为 2 次外形式, 记  $\omega(e_i, e_j) = \lambda_{ij}$ , 则

$$\omega = \sum_{i < j} \lambda_{ij} e^i \wedge e^j,$$

其中  $\{e_i\}$  是切空间中的一组基,  $\{e^j\}$  是余切空间中对应的对偶基.

3. 计算下列表达式

$$(1) (xdx + ydy) \wedge (zdz - zdx).$$

$$(2) (dx + dy + dz) \wedge (xdx \wedge dy - ydy \wedge dz).$$

4. 设  $(x, y)$  为  $\mathbb{R}^2$  中的直角坐标,  $(r, \theta)$  为极坐标, 证明

$$dx \wedge dy = r dr \wedge d\theta.$$

5. 设  $(x, y, z)$  为  $\mathbb{R}^3$  中的直角坐标,  $(r, \theta, \varphi)$  为极坐标, 其中

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

通过直接计算证明

$$dx \wedge dy \wedge dz = r^2 \sin \theta dr \wedge d\theta \wedge d\varphi.$$

6. 证明复合映射的切映射等于切映射的复合, 即  $d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p$ .

7. 证明等式  $f^*(dh) = d(h \circ f)$ .

8. 验证 (15.1) 式成立.

## §15.2 外微分运算

为了方便起见, 我们将函数称为 0 次微分形式. 我们知道, 给定可微函数  $f$ , 它的全微分  $df$  是一个 1 次微分形式. 从  $f$  得到  $df$  是一个求导的过程. 现在, 给定一个  $s$  次的微分形式  $\omega$ , 我们要定义一个  $s+1$  次的微分形式, 它由  $\omega$  求导得到, 记为  $d\omega$ .

先讨论  $\mathbb{R}^m$  中的微分形式. 设  $\omega$  为  $C^1$  的  $s$  次微分形式, 则它可以表示为

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq m} \omega_{i_1 \dots i_s} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_s},$$

我们定义

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq m} d\omega_{i_1 \dots i_s} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_s},$$

显然,  $d\omega$  为  $s+1$  次的微分形式, 称为  $\omega$  的外微分.

**例 15.2.1.** 平面上 1 次微分形式的外微分.

设  $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  为  $\mathbb{R}^2$  中的 1 次微分形式, 则

$$\begin{aligned} d\omega &= dP \wedge dx + dQ \wedge dy = (P_x dx + P_y dy) \wedge dx + (Q_x dx + Q_y dy) \wedge dy \\ &= (Q_x - P_y) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

**例 15.2.2.**  $\mathbb{R}^3$  中 2 次微分形式的外微分.

$\mathbb{R}^3$  中 2 次微分形式

$$\omega = P(x, y, z)dy \wedge dz + Q(x, y, z)dz \wedge dx + R(x, y, z)dx \wedge dy,$$

则

$$\begin{aligned}
 d\omega &= dP \wedge dy \wedge dz + dQ \wedge dz \wedge dx + dR \wedge dx \wedge dy \\
 &= (P_x dx + P_y dy + P_z dz) \wedge dy \wedge dz + (Q_x dx + Q_y dy + Q_z dz) \wedge dz \wedge dx \\
 &\quad + (R_x dx + R_y dy + R_z dz) \wedge dx \wedge dy \\
 &= (P_x + Q_y + R_z) dx \wedge dy \wedge dz.
 \end{aligned}$$

**例 15.2.3.**  $\mathbb{R}^3$  中 1 次微分形式的外微分.

设  $\omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$  为 1 次微分形式, 则

$$\begin{aligned}
 d\omega &= dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz \\
 &= (P_x dx + P_y dy + P_z dz) \wedge dx + (Q_x dx + Q_y dy + Q_z dz) \wedge dy \\
 &\quad + (R_x dx + R_y dy + R_z dz) \wedge dz \\
 &= (R_y - Q_z)dy \wedge dz + (P_z - R_x)dz \wedge dx + (Q_x - P_y)dx \wedge dy.
 \end{aligned}$$

外微分运算具有以下性质:

- 如果  $\omega, \eta$  均为  $s$  次微分形式,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , 则

$$d(\lambda\omega + \mu\eta) = \lambda d\omega + \mu d\eta;$$

- 如果  $\omega$  为  $s$  次微分形式,  $\eta$  为  $t$  次微分形式, 则

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^s \omega \wedge d\eta;$$

- $d^2 = 0$ , 即  $d(d\omega) = 0$ . 以  $\omega = a(x)dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_s}$  为例:

$$\begin{aligned}
 d(d\omega) &= d(da \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_s}) \\
 &= d\left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial a}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_s}\right) \\
 &= \sum_{i=1}^m d\left(\frac{\partial a}{\partial x_i}\right) \wedge dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_s} \\
 &= \sum_{1 \leq i, j \leq m} \frac{\partial^2 a}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_s} \\
 &= \sum_{i < j} \left[ \frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 a}{\partial x_j \partial x_i} \right] dx_i \wedge dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_s} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

- $df^*\omega = f^*d\omega$ . 这可由前两条性质得出.



外微分运算在曲面上也可以定义. 它的一个定义方法是这样的: 考虑参数曲面  $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , 设  $\varphi$  是正则的, 即  $d\varphi_p: T_p\Omega \rightarrow T_{\varphi(p)}\Sigma$  为线性同构,  $\forall p \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$ . 如果  $\omega$  为  $\Sigma$  上的一个  $s$  次微分形式, 则  $\varphi^*\omega$  为  $\Omega$  中的  $s$  次微分形式, 从而  $d\varphi^*\omega$  为  $s+1$  次微分形式. 由  $d\varphi$  为同构知可以找到  $\Sigma$  上的  $s+1$  次微分形式, 记为  $d\omega$ , 使得

$$\varphi^*d\omega = d\varphi^*\omega,$$

这样  $\omega$  的外微分  $d\omega$  就定义好了. 请读者验证, 这个定义与曲面参数化的选取无关.

曲面上的外微分同样具有以上几条性质. 如果  $d\omega = 0$ , 则称  $\omega$  为闭形式; 如果  $\omega = d\eta$ , 则称  $\omega$  为恰当形式. 由  $d^2 = 0$  知恰当形式必为闭形式, 反之不然.

**例 15.2.4.**  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  上的一个非恰当的闭形式.

考虑  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  上的 1 次微分形式

$$\omega = \frac{x}{x^2 + y^2}dy - \frac{y}{x^2 + y^2}dx,$$

直接的计算表明  $d\omega = 0$ , 即  $\omega$  为闭的 1 形式. 如果用极坐标  $(r, \theta)$  表示, 则由

$$dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta, \quad dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta$$

可得  $\omega = d\theta$ . 不过, 这个等式并不表明  $\omega$  是恰当形式, 因为  $\theta$  不能定义在整个  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  上. 事实上, 不存在  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  上的函数  $f$ , 使得  $\omega = df$ . (反证法) 如果  $f$  存在, 则  $d(f - \theta) = 0$ , 因此  $f - \theta$  在连通的开集  $\mathbb{R}^2 - \{(x, 0) | x \geq 0\}$  上必为常数, 这样的话  $\theta$  就可以连续地定义在整个  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  上了, 这当然是不可能的.  $\square$

现在考虑  $\mathbb{R}^m$  中闭的 1 次微分形式  $\omega = \sum_{i=1}^m a_i(x)dx_i$ , 如果  $\omega = df$ , 则根据 Newton-Leibniz 公式, 有

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx) dt \\ &= f(0) + \int_0^1 \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) x_i dt \\ &= f(0) + \int_0^1 \sum_{i=1}^m a_i(tx) x_i dt. \end{aligned}$$

反之, 如果  $\omega$  是闭形式, 用上式定义  $f(x)$ , 则

$$\begin{aligned} df &= \sum_{i=1}^m \left( \int_0^1 a_i(tx) dt \right) dx_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left( \int_0^1 t \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dt \right) x_i dx_j \\ &= \sum_{j=1}^m \left( \int_0^1 a_j(tx) dt \right) dx_j + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \left( \int_0^1 t \frac{\partial a_j}{\partial x_i} dt \right) x_i dx_j \\ &= \sum_{j=1}^m \left( \int_0^1 a_j(tx) dt \right) dx_j + \sum_{j=1}^m \left( \int_0^1 t \frac{da_j}{dt}(tx) dt \right) dx_j \\ &= \sum_{j=1}^m \left( \int_0^1 \frac{d(ta_j)}{dt}(tx) dt \right) dx_j \\ &= \sum_{j=1}^m a_j(x) dx_j = \omega. \end{aligned}$$

其中,  $\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$  是因为  $d\omega = 0$ . 这就说明  $\mathbb{R}^2$  中闭的 1 次微分形式必为恰当形式, 这个方法也可以推广到高维.

### 习题 15.2

1. 计算下列微分形式的外微分:

(1)  $\omega = xydx + dz$ .

(2)  $\omega = x^2ydx - yze^x dy$ .

(3)  $xydy \wedge dz + yzdz \wedge dx + zx dx \wedge dy$ .

2. 设  $f$  为  $\mathbb{R}^n$  上的  $C^1$  函数. 证明  $df = 0$  当且仅当  $f$  为常值函数.

3. 证明, 如果  $\omega$  为  $s$  次微分形式,  $\eta$  为  $t$  次微分形式, 则

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^s \omega \wedge d\eta.$$

4. 设  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  为  $C^2$  函数, 且

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

证明,

(1)  $\omega = \frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx$  为闭形式;

(2) 存在函数  $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , 使得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

## §15.3 曲面回顾

在前面的章节中, 当我们提到曲线或者曲面的时候, 一般都要指定一个参数表示. 现在我们从更加几何化的角度重新描述曲线或曲面.

设  $M \subset \mathbb{R}^n$  为  $\mathbb{R}^n$  中的子集. 如果任给  $q \in M$ , 均存在从  $\mathbb{R}^m$  的开集  $U$  到  $\mathbb{R}^n$  的  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) 映射  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  使得

$$(1) \varphi \text{ 为单射}; \quad (2) \operatorname{rank} J\varphi = m; \quad (3) \varphi(U) = V_q \cap M,$$

其中  $V_q$  是  $q$  在  $\mathbb{R}^n$  中的一个开邻域, 则称  $M$  为  $\mathbb{R}^n$  中的一个  $m$  维的  $C^k$  正则子流形.  $m = 1$  的情形就是正则曲线,  $m = 2$  的情形就是 2 维正则曲面. 在不引起混淆的情况下, 我们也把  $m$  维正则子流形称为  $m$  维 (正则) 曲面,  $m = n - 1$  的情形称为超曲面. 映射  $\varphi$  称为  $q$  附近的一个局部参数表示或局部坐标映射,  $V_q \cap M$  称为  $q$  的一个局部坐标邻域, 它是  $q$  在  $M$  中的一个开邻域.

## 例 15.3.1. 函数的图像.

设  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  为  $C^k$  函数, 其中  $U$  为  $\mathbb{R}^{n-1}$  中的开集,  $f$  的图像为

$$\operatorname{graph}(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n \mid x \in U\},$$

它是  $\mathbb{R}^n$  中的  $C^k$  超曲面, 这是因为  $\operatorname{graph}(f)$  有整体的参数表示:

$$\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varphi(x) = (x, f(x)).$$

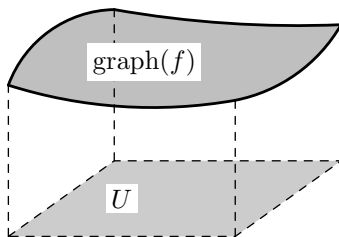


图 15.1 作为曲面的图像

这个例子可以推广. 例如, 设  $U$  为  $\mathbb{R}^m$  中的开集,  $f_1, \dots, f_{n-m}: U \rightarrow \mathbb{R}$  为  $U$  上的  $n - m$  个  $C^k$  函数, 则

$$\operatorname{graph}(f_1, \dots, f_{n-m}) = \{(x_1, \dots, x_m, f_1(x), \dots, f_{n-m}(x)) \mid x = (x_1, \dots, x_m) \in U\}$$

是  $\mathbb{R}^n$  中的  $m$  维曲面, 称为函数  $f_1, \dots, f_{n-m}$  的 (广义) 图像.

一般地, 一个  $m$  维正则曲面  $M$  在任意一点附近总可以看成是某个  $m$  维子线性空间上的局部图像. 例如, 设  $\varphi$  为  $q$  附近的局部参数表示,  $\varphi(p) = q$ . 因为  $\text{rank} J\varphi = m$ , 不妨设

$$\det \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j} \right)_{m \times m}(p) \neq 0.$$

记  $v_i = \varphi_i(u)$ ,  $i = 1, \dots, m$ . 根据逆映射定理, 映射  $\phi(u) = (v_1, \dots, v_m)$  在  $p$  附近可逆且逆映射  $\phi^{-1}$  仍为  $C^k$  映射, 因此,  $\varphi \circ \phi^{-1}$  仍为  $q$  附近的局部参数表示, 且

$$\varphi \circ \phi^{-1}(v_1, \dots, v_m) = (v_1, \dots, v_m, \varphi_{m+1} \circ \phi^{-1}(v), \dots, \varphi_n \circ \phi^{-1}(v)),$$

即在  $q$  附近  $M$  可以表示为函数的广义图像.

利用曲面的局部图像表示不难看出, 对  $q$  附近的任意两个局部参数表示  $\varphi$  与  $\psi$ , 它们之间的转换映射  $\psi^{-1} \circ \varphi$  是  $\mathbb{R}^m$  中的开集之间的可逆  $C^k$  映射. 即不同的参数表示之间只相差曲面的重新参数化.

**例 15.3.2.** 单位圆周  $S^1$  的局部参数表示.

我们知道, 极坐标不能定义在整个圆周上. 但是, 我们可以用两个局部坐标邻域覆盖  $S^1$ : 令

$$\varphi : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \psi : (\pi, 3\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

分别定义为

$$\varphi(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta), \quad \psi(\eta) = (\cos \eta, \sin \eta),$$

则  $\varphi, \psi$  为局部参数表示, 且

$$\varphi(0, 2\pi) = S^1 - \{(1, 0)\}, \quad \psi(\pi, 3\pi) = S^1 - \{(-1, 0)\}.$$

这说明  $S^1$  为  $\mathbb{R}^2$  中的正则曲线. □

**例 15.3.3.** 单位球面  $S^2$  的局部参数表示.

我们知道, 球面极坐标不能定义在整个球面上. 不过, 我们可以把球面分成 6 部分:

$$\begin{aligned} &\{(x, y, z) \in S^2 \mid z > 0\}, \{(x, y, z) \in S^2 \mid z < 0\}, \{(x, y, z) \in S^2 \mid y > 0\}, \\ &\{(x, y, z) \in S^2 \mid y < 0\}, \{(x, y, z) \in S^2 \mid x > 0\}, \{(x, y, z) \in S^2 \mid x < 0\}, \end{aligned}$$

在每一部分上均有参数表示, 以  $\{(x, y, z) \in S^2 \mid z > 0\}$  为例:

$$\varphi : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}).$$

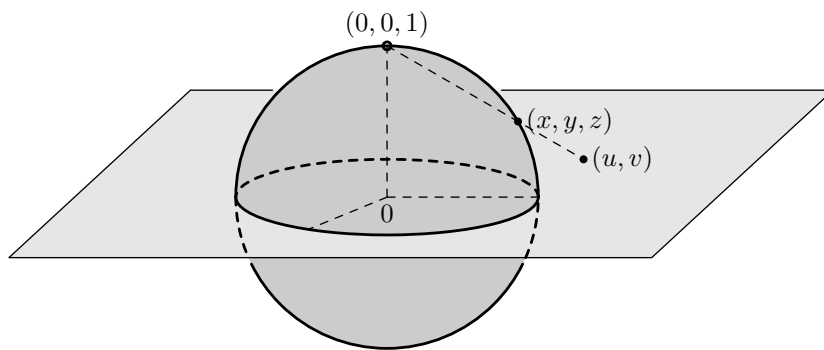


图 15.2 球面上的参数坐标

我们也可以只用两个局部坐标邻域覆盖整个  $S^2$ : 令

$$\varphi_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi_1(u, v) = \left( \frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2} \right).$$

则  $\varphi_1(\mathbb{R}^2) = S^2 - \{(0, 0, 1)\}$ , 从上式还可解得

$$u = \frac{x}{1-z}, \quad v = \frac{y}{1-z}, \quad (x, y, z) \in S^2 - \{(0, 0, 1)\}.$$

类似地, 令

$$\varphi_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi_2(u, v) = \left( \frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{1-u^2-v^2}{1+u^2+v^2} \right).$$

则  $\varphi_2(\mathbb{R}^2) = S^2 - \{(0, 0, -1)\}$ , 从上式可解得

$$u = \frac{x}{1+z}, \quad v = \frac{y}{1+z}, \quad (x, y, z) \in S^2 - \{(0, 0, -1)\}.$$

总之, 球面  $S^2$  是  $\mathbb{R}^3$  中的正则曲面. □

在前一节我们讨论了曲面上的微分形式以及外微分运算. 如果  $\varphi$  为  $q$  附近的局部参数表示, 则  $\varphi^{-1}$  是从  $V_p \cap M$  到  $\Omega$  的  $C^k$  映射, 于是  $(\varphi^{-1})^* du_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) 为  $M$  上  $q$  附近的 1 次微分形式, 在不引起混淆的情况下我们简记为  $du_i$ .  $q$  附近的  $s$  次微分形式均可表示为

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq m} \omega_{i_1 \dots i_s} du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_s},$$

其中  $\omega_{i_1 \dots i_s}$  为  $q$  附近的函数.  $\omega$  的外微分可以写为

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq m} d\omega_{i_1 \dots i_s} \wedge du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_s},$$

不难验证

$$\varphi^* d\omega = d\varphi^* \omega,$$

因此  $d\omega$  的定义与上一节一致.

现在我们进一步讨论曲面的定向. 设  $M$  为  $\mathbb{R}^n$  中的  $m$  维正则子流形 (曲面). 设  $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$  和  $\varphi_\beta: U_\beta \rightarrow \mathbb{R}^n$  均为  $M$  的局部参数表示. 如果转换映射

$$\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha: \varphi_\alpha^{-1}(V_\alpha \cap V_\beta \cap M) \rightarrow \varphi_\beta^{-1}(V_\alpha \cap V_\beta \cap M)$$

满足条件

$$\det J(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha) > 0,$$

则称  $\varphi_\alpha$  和  $\varphi_\beta$  为同向的局部参数表示. 如果存在  $M$  的局部坐标邻域组成的开覆盖  $\{V_\alpha \cap M\}$ , 使得其局部参数表示都是同向的, 则称  $M$  为可定向曲面,  $\{V_\alpha \cap M\}$  称为  $M$  的定向坐标覆盖, 有时简称定向. 如果两个定向坐标覆盖中的参数表示都是同向的, 则我们不区分这两个定向.

前面的例子中, 函数的图像, 圆周  $S^1$  以及球面  $S^2$  都是可定向的正则子流形. 对于超曲面来说, 有一个简单的办法判断它是否可定向.

**命题 15.3.1.**  $\mathbb{R}^n$  中的超曲面  $M$  可定向当且仅当  $M$  上存在处处非零的连续法向量场.

**证明.** 设  $M$  为可定向的超曲面, 其定向坐标覆盖为  $\{V_\alpha \cap M\}$ , 相应的局部参数表示为  $\varphi_\alpha$ . 记

$$\varphi_\alpha(u_1, \dots, u_{n-1}) = (x_\alpha^1(u_1, \dots, u_{n-1}), \dots, x_\alpha^n(u_1, \dots, u_{n-1})).$$

设  $q = \varphi_\alpha(p)$ , 在  $q$  处  $M$  的法向量为  $\vec{N}_\alpha(q) = (N_1, \dots, N_n)$ , 其中

$$N_i = (-1)^{i-1} \frac{\partial(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^{i-1}, x_\alpha^{i+1}, \dots, x_\alpha^n)}{\partial(u_1, \dots, u_{n-1})}(p),$$

在另一同向的参数表示  $\varphi_\beta$  下,  $q$  处的法向量  $N_\beta(q)$  满足关系

$$\vec{N}_\alpha(q) = \det J(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha) \cdot \vec{N}_\beta(q),$$

因此, 单位法向量场

$$\vec{n} = \vec{N}_\alpha / \|\vec{N}_\alpha\|$$

是曲面  $M$  上定义确切的处处非零的连续法向量场.

反之, 如果  $M$  上存在处处非零的连续法向量场  $\vec{N}$ , 则我们这样选取  $M$  的局部坐标覆盖: 任给  $p \in M$ , 取  $p$  的连通局部坐标邻域  $V_p \cap M$ , 相应的局部参数表示  $\varphi_p$  定义了局部的单位法向量场  $\vec{n}_p$ , 于是存在  $V_p \cap M$  中的连续函数  $f_p$ , 使得

$$\vec{N} = f_p \vec{n}_p,$$

$f_p$  处处非零, 因此根据连续函数的介值定理,  $f_p$  恒为正或恒为负. 通过适当调整参数, 我们可假设  $f_p$  总是正的. 不难验证这样得到的坐标覆盖是一个定向的局部坐标覆盖, 称为由法向量场决定的定向.  $\square$

设  $M$  为可定向的超曲面,  $\varphi$  为一个定向局部参数表示, 此参数表示的局部法向量场为  $\vec{N}$ , 定义  $M$  上的一个  $n-1$  次微分形式  $\Omega$  如下

$$\Omega = \|\vec{N}\| du_1 \wedge \cdots \wedge du_{n-1},$$

这个微分形式与定向局部参数的选取无关, 因此是  $M$  上整体定义的一个处处非零的  $n-1$  次微分形式, 称为  $M$  的面积形式. 面积形式也可以改写为下面较为对称的形式

$$\Omega = \|\vec{N}\|^{-1} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} N_i dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

和上述命题的证明类似, 可以证明,  $\mathbb{R}^n$  中的超曲面  $M$  可定向当且仅当  $M$  上存在处处非零的  $n-1$  次 (连续) 微分形式. 这个结果实际上可推广至任意维数的正则曲面.

**命题 15.3.2.** 设  $M$  为  $\mathbb{R}^n$  中的  $m$  维正则曲面, 则  $M$  可定向当且仅当  $M$  上存在处处非零的  $m$  次微分形式.

**证明.** 设  $M$  可定向, 设  $V \cap M$  为一个定向坐标邻域, 相应的局部参数表示为  $\varphi$ . 定义局部的  $m$  次微分形式  $\Omega$  为

$$\Omega = \sqrt{\det[(J\varphi)^T \cdot J\varphi]} \cdot du_1 \wedge \cdots \wedge du_m,$$

则  $\Omega$  不依赖于定向局部参数的选取, 因而  $\Omega$  可以整体定义在  $M$  上, 是  $M$  上处处非零的  $m$  次微分形式, 称为  $M$  的面积形式.

反过来的证明留作练习.  $\square$

**注.** 如果参数表示  $\varphi$  写为

$$\varphi(u_1, \cdots, u_m) = (x_1(u_1, \cdots, u_m), \cdots, x_n(u_1, \cdots, u_m)),$$

则  $M$  的面积形式可以写为

$$\Omega = (\det[(J\varphi)^T \cdot J\varphi])^{-1/2} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n} \frac{\partial(x_{i_1}, \cdots, x_{i_m})}{\partial(u_1, \cdots, u_m)} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_m}.$$

**例 15.3.4.** 设  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  为  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) 映射,  $c \in \mathbb{R}$ . 如果  $f^{-1}(c) \neq \emptyset$ , 且对任意  $p \in f^{-1}(c)$ ,  $\nabla f(p) \neq 0$ , 则  $M = f^{-1}(c)$  为  $\mathbb{R}^n$  中的可定向超曲面.

**证明.** 设  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in M$ , 由于  $\nabla f(x^0) \neq 0$ , 不妨设  $\frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) \neq 0$ . 根据隐函数定理, 在  $(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0)$  附近  $f(x) = c$  的解可写为

$$(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_{n-1})),$$

其中  $g$  为  $C^k$  函数. 因此, 在  $x^0$  附近  $M = f^{-1}(c)$  为函数图像, 从而是正则超曲面.

在  $M$  中任取曲线  $\sigma(t)$ , 则由  $f(\sigma(t)) = c$  知

$$\nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) = 0,$$

这表明  $\nabla f$  限制在  $M$  上是其法向量场, 因为  $\nabla f$  在  $M$  上处处非零, 根据命题 15.3.1 即知  $M$  为可定向的超曲面.  $\square$

**注.** (1) 法向量场  $\nabla f$  所决定的定向定义了  $f^{-1}(c)$  上的面积形式  $\Omega$ , 它可以写为

$$\Omega = \|\nabla f\|^{-1} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

(2) 本例可作高维推广: 设  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  为  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) 映射,  $c \in \mathbb{R}^m$ . 如果  $f^{-1}(c) \neq \emptyset$ , 且对任意  $p \in f^{-1}(c)$ ,  $\text{rank} Jf(p) = m$ , 则  $M = f^{-1}(c)$  为  $\mathbb{R}^n$  中的可定向  $n-m$  维曲面, 其面积形式为

$$\begin{aligned} \Omega = & \left( \det[Jf \cdot (Jf)^T] \right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} (-1)^{i_1 + \dots + i_m + m(m+1)/2} \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_{i_1}, \dots, x_{i_m})} \\ & \times dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_1}} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_m}} \wedge \dots \wedge dx_n, \end{aligned}$$

其中,  $f_i$  表示映射  $f$  的第  $i$  个分量,  $\widehat{dx_i}$  表示去掉  $dx_i$ .

作为例子, 考虑函数  $f(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$ , 则当  $R > 0$  时,  $f^{-1}(R^2)$  为  $\mathbb{R}^n$  中可定向的超曲面, 这就是半径为  $R$  的  $n-1$  维单位球面, 其面积形式为

$$\Omega = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

下面我们讨论带有边界的正则曲面. 记

$$\mathbb{H}^m = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_m \geq 0\},$$

称  $\mathbb{H}^m$  为  $m$  维上半欧氏空间, 其边界  $\partial\mathbb{H}$  为  $m-1$  维欧氏空间  $\mathbb{R}^{m-1}$ .

设  $M \subset \mathbb{R}^n$  为  $\mathbb{R}^n$  中的子集. 如果任给  $q \in M$ , 均存在从  $\mathbb{H}^m$  的开集  $U$  到  $\mathbb{R}^n$  的  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) 映射  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  使得

$$(1) \varphi \text{ 为单射}; \quad (2) \text{rank} J\varphi = m; \quad (3) \varphi(U) = V_q \cap M,$$



其中  $V_q$  是  $q$  在  $\mathbb{R}^n$  中的一个开邻域, 则称  $M$  为  $\mathbb{R}^n$  中的一个  $m$  维的  $C^k$  带边正则子流形, 或称带边曲面. 为了区别起见, 我们把以前定义的曲面称为无边曲面.

利用逆映射定理可以证明, 如果  $q \in \varphi(U \cap \partial \mathbb{H}^m)$ , 则在另一局部参数表示下,  $q$  也是某个边界点的像. 这样的点  $q$  称为边界点, 边界点构成的子集称为带边曲面  $M$  的边界, 记为  $\partial M$ . 如果  $V_q \cap M$  是边界点  $q \in \partial M$  附近的局部坐标邻域,  $\varphi$  为局部参数表示, 则  $\varphi$  限制在  $U \cap \partial \mathbb{H}^m$  就得到边界的一个局部参数表示, 这说明  $\partial M$  是  $m-1$  维的 (无边) 正则曲面.

下面是一些带边正则子流形的例子:  $m=1$  时, 闭区间, 半开半闭区间, 平面上的射线都是带边的曲线;  $m=2$  时, 平面上闭的圆盘, 环形区域, 三维欧氏空间中的上半单位球面等都是 2 维带边曲面;  $m=3$  时, 三维欧氏空间中的闭球, 实心轮胎等都是 3 维带边正则子流形. 当然, 上半欧氏空间  $\mathbb{H}^m$  是标准的  $m$  维带边曲面, 其边界为  $m-1$  维欧氏空间.

带边曲面可以象无边曲面一样讨论定向. 需要注意的是, 并非所有的曲面都是可以定向的, Möbius 带就是一个有名的不可定向的 (带边) 曲面: 将一个长方形的纸条的一对边扭转 180 度后粘合起来得到的曲面称为 Möbius 带, 其边界是一条连通的简单闭曲线 (本质上是圆周). Möbius 带不可定向的原因是其单位法向量沿原纸条的中心线移动一圈后方向正好变反了.

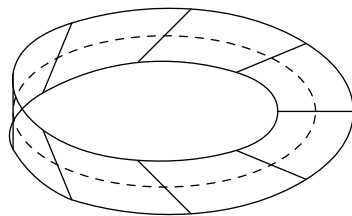


图 15.3 Möbius 带

**命题 15.3.3.** 设  $M$  为可定向的带边曲面, 则  $\partial M$  为可定向无边曲面.

**证明.** 我们将证明, 将  $M$  的定向参数表示限制在边界上就是  $\partial M$  的定向参数表示. 为此, 设  $\varphi$  和  $\psi$  为  $M$  的两个同向参数表示, 它们之间的转换映射记为

$$y = \psi^{-1} \circ \varphi(x), \quad y_i = y_i(x_1, \dots, x_m), \quad i = 1, \dots, m.$$

转换映射将边界映为边界, 根据带边曲面的定义, 有

$$y_m(x) \geq 0, \quad y_m(x_1, \dots, x_{m-1}, 0) \equiv 0.$$

上式表明

$$\frac{\partial y_m}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{m-1}, 0) = 0, \quad i = 1, \dots, m-1, \quad (15.2)$$

且

$$\frac{\partial y_m}{\partial x_m}(x_1, \dots, x_{m-1}, 0) = \lim_{x_m \rightarrow 0^+} \frac{y_m(x) - 0}{x_m - 0} \geq 0. \quad (15.3)$$

由 (15.2) 得

$$\det J(\psi^{-1} \circ \varphi)(x_1, \dots, x_{m-1}, 0) = \det \left( \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)_{(m-1) \times (m-1)} \cdot \frac{\partial y_m}{\partial x_m}.$$

再由 (15.3) 以及  $\varphi$  和  $\psi$  同向即知

$$\det \left( \frac{\partial y_i}{\partial x_i} \right)_{(m-1) \times (m-1)} (x_1, \dots, x_{m-1}, 0) > 0,$$

即  $\varphi$  和  $\psi$  在边界上的限制是  $\partial M$  的同向参数表示.  $\square$

利用这个命题, 我们可以如下定义边界  $\partial M$  上的**诱导定向**: 如果  $m$  为偶数, 则将  $M$  的定向参数表示限制在边界上就是  $\partial M$  的定向参数表示, 它所决定的定向为诱导定向; 如果  $m$  为奇数, 将  $M$  的定向参数表示限制在边界上得到  $\partial M$  的定向参数表示, 与此相反的定向为诱导定向.

作为例子,  $\mathbb{H}^m$  的标准直角坐标  $\{x_1, \dots, x_m\}$  给出了上半欧氏空间的标准定向, 它在  $\partial \mathbb{H}^m$  上的诱导定向则由坐标  $\{(-1)^m x_1, x_2, \dots, x_{m-1}\}$  给出.

最后, 我们介绍非常有用的**单位分解**的技巧. 所谓单位分解, 就是将 1 分解为若干光滑函数的和, 要求这些光滑函数具有**紧支集**. 其中, 函数  $f$  的支集  $\text{supp} f$  定义为

$$\text{supp} f = \overline{\{x \mid f(x) \neq 0\}}.$$

在第九章最后一节的讨论中, 我们构造了  $\mathbb{R}$  上的一个光滑的鼓包函数  $\phi$ , 满足以下条件:

$$\phi(x) = 1, \quad x \in [-1/2, 1/2]; \quad 0 < \phi(x) < 1, \quad 1/2 < |x| < 1; \quad \phi(x) = 0, \quad |x| \geq 1.$$

**定理 15.3.4.** 设  $M$  为  $\mathbb{R}^n$  中的紧致集合,  $\{V_\alpha\}$  为  $M$  的有限开覆盖. 则存在  $\mathbb{R}^n$  中包含  $M$  的开集  $V$ , 以及  $V$  中定义的光滑函数  $\{\phi_\alpha\}$ , 使得

$$\sum_{\alpha} \phi_{\alpha} = 1, \quad \text{supp} \phi_{\alpha} \subset V_{\alpha}.$$

$\{\phi_{\alpha}\}$  称为从属于开覆盖  $\{V_{\alpha}\}$  的一个单位分解.

**证明.** 任取  $q \in M$ , 则存在  $\alpha$ , 使得  $q \in V_{\alpha}$ . 取  $\varepsilon_q > 0$ , 使得  $B_{2\varepsilon_q}(q) \subset V_{\alpha}$ . 于是  $\{B_{\varepsilon_q/2}(q)\}_{q \in M}$  组成了  $M$  的一个开覆盖, 因为  $M$  为紧致集合, 故存在有限子覆盖, 记为  $\{B_{\varepsilon_i/2}(q_i)\}_{i=1}^k$ . 令

$$V = \bigcup_{i=1}^k B_{\varepsilon_i}(q_i),$$

则  $V$  为  $M$  的一个开邻域.

对于  $1 \leq i \leq k$ , 令

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^k \phi\left(\frac{\|x - q_i\|}{\varepsilon_i}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

其中  $\phi$  为上面的鼓包函数, 则  $\varphi$  为  $\mathbb{R}^n$  上的光滑函数, 且根据  $\phi$  的定义可知

$$\varphi(x) > 0, \quad \forall x \in V.$$

令

$$\phi_i(x) = \frac{1}{\varphi(x)} \phi\left(\frac{\|x - q_i\|}{\varepsilon_i}\right), \quad x \in V,$$

则  $\phi_i$  为  $V$  上的光滑函数, 且

$$\sum_{i=1}^k \phi_i(x) = 1, \quad x \in V.$$

根据  $\phi$  的性质, 有

$$\text{supp} \phi_i \subset \overline{B_{\varepsilon_i}(q_i)} \subset B_{2\varepsilon_i}(q_i), \quad i = 1, \dots, k.$$

将支集含于  $V_\alpha$  的那些函数  $\phi_i$  的和记为  $\phi_\alpha$  (不重复求和), 则  $\{\phi_\alpha\}$  为满足定理要求的单位分解.  $\square$

### 习题 15.3

1. 写出  $\mathbb{R}^4$  中 3 维球面  $S^3$  的局部参数表示, 说明它是正则曲面.
2. 用局部参数表示说明  $S^1$  是可定向的曲线.
3. 用局部参数表示说明  $S^2$  是可定向的曲面.
4. 证明可定向超曲面的面积形式与定向参数表示的选取无关.
5. 证明  $S^2$  的面积形式为

$$\Omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy.$$

6. 在  $\mathbb{R}^3$  上由标准直角坐标  $(x, y, z)$  给定了标准定向, 从而  $\mathbb{R}^3$  中的单位闭球上有标准定向. 作为单位闭球的边界,  $S^2$  上的诱导定向决定的法向量是向外还是向内的?
7. 设  $M$  为紧致曲面,  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  为连续函数. 证明, 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $M$  附近定义的光滑函数  $g$ , 使得

$$|g(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in M.$$

## §15.4 Stokes 公式

设  $M$  为定向带边  $m$  维曲面, 其边界  $\partial M$  具有诱导定向. 设  $\omega$  为  $M$  上的  $m$  次微分形式, 其支集  $\text{supp } \omega$  定义为

$$\text{supp } \omega = \overline{\{x \in M \mid \omega(x) \neq 0\}},$$

假设  $\text{supp } \omega$  为紧致集合. 下面我们逐步讨论  $\omega$  在  $M$  上的积分.

(1) 设  $\text{supp } \omega$  包含于某个局部坐标邻域  $V_\alpha \cap M$  中, 与定向一致的局部参数表示为

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

在这个坐标邻域中,  $\omega$  可以表示为

$$\omega = a_\alpha du_1 \wedge \cdots \wedge du_m,$$

其中  $a_\alpha$  是支集包含在  $V_\alpha \cap M$  中的函数. 我们定义  $\omega$  在  $M$  上的积分为

$$\int_M \omega = \int_{U_\alpha} a_\alpha \circ \varphi_\alpha(u) du_1 \cdots du_m.$$

我们要说明这个积分与定向参数表示的选取无关. 事实上, 设  $\text{supp } \omega$  也含于局部坐标邻域  $V_\beta \cap M$  中, 相应的局部参数表示为

$$\varphi_\beta : U_\beta \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$\omega$  的局部表示为

$$\omega = a_\beta dv_1 \wedge \cdots \wedge dv_m,$$

其中, 转换映射  $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$  记为

$$v = \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha(u), \quad u \in \varphi_\alpha^{-1}(V_\alpha \cap V_\beta \cap M).$$

于是

$$dv_1 \wedge \cdots \wedge dv_m = \det J(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha) du_1 \wedge \cdots \wedge du_m,$$

这说明

$$a_\beta \circ \varphi_\beta(v) \cdot \det J(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)(u) = a_\alpha \circ \varphi_\alpha(u).$$

由于  $\text{supp } \omega \subset V_\alpha \cap V_\beta \cap M$ , 根据多重积分的变量替换公式, 有

$$\begin{aligned}
 & \int_{U_\beta} a_\beta \circ \varphi_\beta(v) dv_1 \cdots dv_m \\
 &= \int_{\varphi_\beta^{-1}(V_\alpha \cap V_\beta \cap M)} a_\beta \circ \varphi_\beta(v) dv_1 \cdots dv_m \\
 &= \int_{\varphi_\alpha^{-1}(V_\alpha \cap V_\beta \cap M)} a_\beta \circ \varphi_\beta(v) |\det J(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)(u)| du_1 \cdots du_m \\
 &= \int_{\varphi_\alpha^{-1}(V_\alpha \cap V_\beta \cap M)} a_\alpha \circ \varphi_\alpha(u) du_1 \cdots du_m \\
 &= \int_{U_\alpha} a_\alpha \circ \varphi_\alpha(u) du_1 \cdots du_m.
 \end{aligned}$$

注意, 在计算过程中, 我们要求  $\varphi_\alpha$  和  $\varphi_\beta$  是同向的参数表示.

以上说明了当  $\omega$  的支集含于某个局部坐标邻域中时,  $\omega$  在  $M$  上的积分的定义是恰当的. 利用多重积分的性质易见, 如果  $\omega = \sum_{i=1}^k \omega_i$ , 且  $\text{supp } \omega_i$  均含于同一局部坐标邻域中, 则

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^k \int_M \omega_i.$$

(2) 设  $\omega$  是具有紧支集的  $m$  次微分形式, 取覆盖  $\text{supp } \omega$  的有限个局部坐标邻域  $\{V_\alpha \cap M\}$ , 设  $\{\phi_\alpha\}$  是从属于这些坐标邻域的单位分解, 令

$$\int_M \omega = \sum_\alpha \int_M \phi_\alpha \omega,$$

我们要说明这个定义是恰当的. 事实上, 如果  $\{V_\beta \cap M\}$  是另一局部坐标覆盖, 从属于它的单位分解为  $\{\psi_\beta\}$ , 则

$$\int_M \psi_\beta \omega = \sum_\alpha \int_M \phi_\alpha \psi_\beta \omega,$$

这是因为

$$\psi_\beta \omega = \sum_\alpha \phi_\alpha \psi_\beta \omega,$$

且  $\text{supp } \phi_\alpha \psi_\beta \omega \subset V_\beta \cap M$ . 同理, 有

$$\int_M \phi_\alpha \omega = \sum_\beta \int_M \phi_\alpha \psi_\beta \omega,$$

因此

$$\begin{aligned}
 \sum_\beta \int_M \psi_\beta \omega &= \sum_\beta \sum_\alpha \int_M \phi_\alpha \psi_\beta \omega \\
 &= \sum_\alpha \sum_\beta \int_M \phi_\alpha \psi_\beta \omega \\
 &= \sum_\alpha \int_M \phi_\alpha \omega,
 \end{aligned}$$

这说明  $\omega$  在  $M$  上的积分的确是定义好的. 这种微分形式在曲面上的积分就是前一章的第二型曲线积分和曲面积分的推广, 它具有以下性质:

- 微分形式的积分依赖于曲面的定向. 如果用  $-M$  表示相反定向的同一曲面, 则

$$\int_{-M} \omega = - \int_M \omega.$$

- 微分形式的积分具有线性性. 即如果  $\omega, \eta$  具有紧支集,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , 则

$$\int_M (\lambda\omega + \mu\eta) = \lambda \int_M \omega + \mu \int_M \eta.$$

- 如果  $\text{supp } \omega \subset V \cap M$ , 其中  $V \cap M$  为局部坐标邻域,  $\varphi$  为定向参数表示, 则

$$\int_U \varphi^* \omega = \int_M \omega.$$

下面的定理是微积分基本公式的一般情形, 一般称为 Stokes 公式.

**定理 15.4.1 (Stokes).** 设  $M$  为定向带边  $m$  维曲面,  $\omega$  是  $M$  上具有紧支集的  $m-1$  次微分形式, 则

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega,$$

其中  $\partial M$  具有诱导定向.

**证明.** 因为要证明的等式两边关于  $\omega$  是线性的, 因此, 通过使用单位分解, 不妨设  $\omega$  的支集含于  $M$  的某个局部坐标邻域中. 根据微分形式积分的定义和上面积分性质的第三条, 利用拉回映射和外微分运算的可交换性, 我们不妨假设  $M = \mathbb{H}^m$ , 且定向为标准定向,  $\omega$  是  $\mathbb{H}^m$  上具有紧支集的  $m-1$  次微分形式,  $\partial M = \partial\mathbb{H}^m$  具有诱导定向.

$m-1$  次微分形式  $\omega$  在  $\mathbb{H}^m$  的标准直角坐标  $\{u_1, \dots, u_m\}$  下可表示为

$$\omega = \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} a_i du_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{du_i} \wedge \cdots \wedge du_m,$$

其中  $a_i$  是  $\mathbb{H}^m$  上具有紧支集的函数. 于是

$$d\omega = \left( \sum_{i=1}^m \frac{\partial a_i}{\partial u_i} \right) du_1 \wedge \cdots \wedge du_m.$$

我们有

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{H}^m} d\omega &= \sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{H}^m} \frac{\partial a_i}{\partial u_i} du_1 \cdots du_m \\
 &= \sum_{i=1}^{m-1} \int_0^{+\infty} du_m \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \frac{\partial a_i}{\partial u_i} du_1 \cdots du_{m-1} \\
 &\quad + \int_{\mathbb{R}^{m-1}} du_1 \cdots du_{m-1} \int_0^{+\infty} \frac{\partial a_m}{\partial u_m} du_m \\
 &= \sum_{i=1}^{m-1} \int_0^{+\infty} du_m \int_{\mathbb{R}^{m-2}} a_i \Big|_{u_i=-\infty}^{u_i=+\infty} du_1 \cdots \widehat{du_i} \cdots du_{m-1} \\
 &\quad + \int_{\mathbb{R}^{m-1}} a_m \Big|_{u_m=0}^{u_m=+\infty} du_1 \cdots du_{m-1} \\
 &= - \int_{\partial \mathbb{H}^m} a_m(u_1, \cdots, u_{m-1}, 0) du_1 \cdots du_{m-1}.
 \end{aligned}$$

由于  $u_m|_{\partial \mathbb{H}^m} \equiv 0$ , 故

$$\omega|_{\partial \mathbb{H}^m} = (-1)^{m-1} a_m(u_1, \cdots, u_{m-1}, 0) du_1 \wedge \cdots \wedge du_{m-1},$$

由于  $\partial \mathbb{H}^m$  的诱导定向由坐标  $\{(-1)^m u_1, u_2, \cdots, u_{m-1}\}$  给出, 故

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial \mathbb{H}^m} \omega &= \int_{\partial \mathbb{H}^m} (-1)^{m-1} (-1)^m a_m(u_1, \cdots, u_{m-1}, 0) du_1 \cdots du_{m-1} \\
 &= - \int_{\partial \mathbb{H}^m} a_m(u_1, \cdots, u_{m-1}, 0) du_1 \cdots du_{m-1}.
 \end{aligned}$$

这说明

$$\int_{\mathbb{H}^m} d\omega = \int_{\partial \mathbb{H}^m} \omega,$$

从而定理得证. □

注. (1) 当  $M$  是闭曲面, 即边界  $\partial M = \emptyset$  时, Stokes 积分公式右端为零.

(2) 如果记  $\mathbb{H}^m$  上的向量场  $X$  为

$$X = (a_1(u), \cdots, a_m(u)),$$

其散度  $\operatorname{div} X$  定义为

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^m \frac{\partial a_i}{\partial u_i},$$

则当  $X$  具有紧支集时, Stokes 公式可写为

$$\int_{\mathbb{H}^m} \operatorname{div} X du_1 \cdots du_m = \int_{\partial \mathbb{H}^m} X \cdot (0, \cdots, 0, -1) du_1 \cdots du_{m-1},$$

其中  $(0, \cdots, 0, -1)$  是  $\partial \mathbb{H}^m$  的单位外法向量. 这个结论可以写成如下的一般形式.

**定理 15.4.2** (Gauss-Green). 设  $D$  为  $\mathbb{R}^m$  中的区域, 其边界为  $m-1$  维的超曲面. 如果  $X$  为  $D$  上具有紧支集的向量场, 则

$$\int_D \operatorname{div} X du_1 \cdots du_m = \int_{\partial D} X \cdot \vec{N} d\sigma,$$

其中  $\vec{N}$  为  $\partial D$  的单位外法向量.

**证明.** 我们规定  $D$  的定向为  $\mathbb{R}^m$  的标准定向, 则  $\partial D$  的诱导定向决定的法向量是外侧法向量, 其面积形式为

$$\Omega = \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} N_i du_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{du_i} \wedge \cdots \wedge du_m,$$

其中  $N_i$  为单位外法向量的第  $i$  个分量. 如果定义  $D$  中的  $m$  次微分形式  $\omega$  为

$$\omega = \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} X_i du_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{du_i} \wedge \cdots \wedge du_m,$$

其中  $X_i$  为  $X$  的第  $i$  个分量, 则

$$d\omega = \operatorname{div} X du_1 \wedge \cdots \wedge du_m,$$

由 Stokes 公式, 有

$$\int_D \operatorname{div} X du_1 \cdots du_m = \int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega,$$

作为练习, 读者可验证下式成立:

$$\omega|_{\partial D} = X \cdot \vec{N} \Omega,$$

因此

$$\int_D \operatorname{div} X du_1 \cdots du_m = \int_{\partial D} X \cdot \vec{N} \Omega = \int_{\partial D} X \cdot \vec{N} d\sigma,$$

其中, 上式最后的积分是第一型的曲面积分. □

**注.** 如果  $M$  为紧致带边曲面, 其面积形式的积分称为  $M$  的面积, 对于可定向曲面, 这个定义与前一章中第一型曲面积分中曲面面积的定义是一致的.

**例 15.4.1.**  $m-1$  维球面的面积.

我们知道,  $m-1$  维单位球面上的面积形式为

$$\Omega = \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} u_i du_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{du_i} \wedge \cdots \wedge du_m,$$



根据 Stokes 公式, 有

$$\begin{aligned}\sigma(S^{m-1}) &= \int_{S^{m-1}} \Omega = \int_{B^m} d\Omega \\ &= m \int_{B^m} du_1 \wedge \cdots \wedge du_m = mv(B^m),\end{aligned}$$

其中  $B^m$  是  $m$  维单位球体,  $v(B^m)$  是其体积. 这样我们就又一次得到了球面的面积和球体的体积的之间的关系.

#### 习题 15.4

1. 试说明本节 Stokes 公式是第十四章第五节中 Green 公式, Gauss 公式和 Stokes 公式的统一推广.
2. 设  $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  为定向曲线,  $f$  是在  $\sigma$  附近定义的连续可微函数, 则

$$\int_{\sigma} df = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a)).$$

3. 设  $F: S^n \times [0, 1] \rightarrow S^n$  为连续可微映射, 记

$$f_0(x) = F(x, 0), \quad f_1(x) = F(x, 1), \quad \forall x \in S^n.$$

证明

$$\int_{S^n} f_0^* \Omega = \int_{S^n} f_1^* \Omega,$$

其中  $\Omega$  是  $S^n$  的体积形式.

4. 证明, 存在正数  $\delta > 0$ , 使得当连续可微映射  $f, g: S^n \rightarrow S^n$  满足条件

$$\|g(x) - f(x)\| < \delta, \quad \forall x \in S^n$$

时,

$$\int_{S^n} f^* \Omega = \int_{S^n} g^* \Omega,$$

其中  $\Omega$  是  $S^n$  的体积形式.

## 第十六章 含参变量的积分

本章仍然讨论积分, 其中被积函数含有额外的参数, 我们要研究积分是如何依赖于参数的. 这种积分的基本性质和无穷级数的性质十分类似, 它们也提供了构造新函数的重要工具, 我们还将利用它们进一步研究 Fourier 积分.

### §16.1 含参变量的积分

设  $f(x, y)$  是定义在矩形  $[a, b] \times [c, d]$  上的函数, 且对于每个固定的  $y \in [c, d]$ , 关于  $x$  的函数  $f(x, y)$  在  $[a, b]$  上 Riemann 可积, 则定义

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx, \quad y \in [c, d],$$

称为含参变量的积分, 其中  $y$  是参数, 它对应于数列或函数列中的变数  $n$ .

**定义 16.1.1** (一致收敛极限). 设  $y_0 \in [c, d]$ . 如果存在函数  $\varphi(x)$  ( $x \in [a, b]$ ), 使得任给  $\varepsilon > 0$ , 均存在  $\delta > 0$ , 当  $0 < |y - y_0| < \delta$  时

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b],$$

则称极限  $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛.

显然, 如果  $f(x, y)$  是  $[a, b] \times [c, d]$  上的连续函数, 则根据紧致集合上连续函数的一致连续性知, 极限  $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = f(x, y_0)$  关于  $x \in [a, b]$  是一致收敛的. 一致收敛的极限函数具有以下性质 (参照第九章一致收敛函数列的性质):

- 极限  $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛当且仅当任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 当  $0 < |y_1 - y_0| < \delta, 0 < |y_2 - y_0| < \delta$  时

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b],$$

这是一致收敛的 Cauchy 准则.

- 设对于每个固定的  $y \in [c, d]$ ,  $f(x, y)$  都是关于  $x \in [a, b]$  的连续函数, 如果极限

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x)$$

在  $[a, b]$  上一致收敛, 则  $\varphi(x)$  是  $[a, b]$  上的连续函数.

**定理 16.1.1** (极限与积分的可交换性). 设对于每个  $y \in [c, d]$ ,  $f(x, y)$  是关于  $x \in [a, b]$  的 Riemann 可积函数, 如果极限  $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛, 则  $\varphi(x)$  也是  $[a, b]$  上的 Riemann 可积函数, 且

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx.$$

**证明.** 任给  $\varepsilon > 0$ , 由一致收敛的定义, 存在  $\delta > 0$ , 当  $0 < |y - y_0| < \delta$  时,

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}, \quad \forall x \in [a, b].$$

取定  $y_1$ , 使得  $0 < |y_1 - y_0| < \delta$ , 由于  $f(x, y_1)$  关于  $x$  可积, 故存在  $[a, b]$  的分割  $\pi$ , 使得

$$\sum_{i=1}^n \omega_i(f(\cdot, y_1)) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}.$$

对于此分割, 有

$$\omega_i(\varphi) < \omega_i(f(\cdot, y_1)) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

因此

$$\sum_{i=1}^n \omega_i(\varphi) \Delta x_i < \sum_{i=1}^n \omega_i(f(\cdot, y_1)) \Delta x_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i=1}^n \Delta x_i < \varepsilon,$$

这说明  $\varphi(x)$  是  $[a, b]$  上的 Riemann 可积函数, 且当  $0 < |y - y_0| < \delta$  时, 有

$$\left| \int_a^b \varphi(x) dx - \int_a^b f(x, y) dx \right| \leq \int_a^b |\varphi(x) - f(x, y)| dx \leq \frac{\varepsilon}{4},$$

即

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \varphi(x) dx,$$

定理证毕. □

**推论 16.1.2.** 如果  $f(x, y)$  是  $[a, b] \times [c, d]$  上的连续函数, 则

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx, \quad y \in [c, d]$$

是关于  $y$  的连续函数.

**证明.** 直接利用上述定理即可. □

**推论 16.1.3.** 设  $f(x, y)$  关于  $y$  的偏导数在  $y_0$  处存在, 且极限

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0} = f_y(x, y_0)$$

关于  $x \in [a, b]$  一致收敛, 则  $I(y)$  在  $y_0$  处可微, 且

$$I'(y_0) = \int_a^b f_y(x, y_0) dx.$$

**证明.** 直接利用上述定理即可. 特别地, 如果  $f_y(x, y)$  是  $[a, b] \times [c, d]$  上的连续函数, 利用微分中值定理可知推论的结论成立.  $\square$

**例 16.1.1.** (\*) 设  $f$  为具有紧支集的一元光滑函数,  $g$  在任意有限区间上可积, 定义函数  $h$  为

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy,$$

则  $h$  为光滑函数, 且

$$h^{(n)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(n)}(x-y)g(y)dy.$$

**证明.** 设  $f$  在区间  $(-M, M)$  以外为零. 任取  $a > 0$ , 当  $x \in [-a, a]$  时,  $h(x)$  可以表示为

$$h(x) = \int_{-M-a}^{M+a} f(x-y)g(y)dy,$$

反复利用上述推论即知  $h(x)$  在  $(-a, a)$  上任意次可导, 且

$$h^{(n)}(x) = \int_{-M-a}^{M+a} f^{(n)}(x-y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(n)}(x-y)g(y)dy,$$

由于  $a > 0$  是任取的, 故  $h$  在  $(-\infty, +\infty)$  上是光滑函数.  $\square$

**注.**  $f$  可以取为鼓包函数, 此时  $h$  可以看成函数  $g$  的光滑逼近.

**例 16.1.2.** 设  $0 < a \leq b$ , 计算积分

$$I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx.$$

**解.** 我们把  $a$  看成是常数, 而把  $b$  看成是参数, 积分记为  $I(b)$ , 则根据上述推论, 有

$$I'(b) = \int_0^1 x^b dx = \frac{1}{b+1},$$

这说明

$$I(b) = \ln(1+b) + C.$$

又因为  $I(a) = 0$ , 故  $C = -\ln(1+a)$ , 从而

$$I = \ln \frac{1+b}{1+a}.$$

这个积分也可以通过重积分化累次积分来计算.  $\square$

**例 16.1.3.** 设  $|\lambda| < 1$ , 计算积分

$$I = \int_0^\pi \ln(1 + \lambda \cos x) dx.$$

解. 设  $0 < a < 1$ , 当  $\lambda \in [-a, a]$  时,  $f(x, \lambda) = \ln(1 + \lambda \cos x)$  以及

$$f_{\lambda}(x, \lambda) = \frac{\cos x}{1 + \lambda \cos x}$$

在  $[0, \pi] \times [-a, a]$  上连续, 于是  $I = I(\lambda)$  关于  $\lambda$  可微, 且

$$I'(\lambda) = \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{1 + \lambda \cos x} dx = \frac{\pi}{\lambda} - \frac{\pi}{\lambda \sqrt{1 - \lambda^2}}.$$

对  $\lambda$  积分可得

$$I(\lambda) = \pi \ln(1 + \sqrt{1 - \lambda^2}) + C,$$

因为  $I(0) = 0$ , 故得

$$C = -\pi \ln 2,$$

因此

$$I = \pi \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \lambda^2}}{2}.$$

上式对任意  $|\lambda| < 1$  均成立. □

下面我们讨论积分的上下限中也含有参数的含参变量积分. 考虑积分

$$F(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx,$$

其中  $a(y), b(y)$  是关于  $y$  的函数.

**定理 16.1.4.** 设  $f(x, y)$  在  $[a, b] \times [c, d]$  上连续, 函数  $a(y), b(y)$  关于  $y$  连续, 且

$$a \leq a(y) \leq b, \quad a \leq b(y) \leq b, \quad \forall y \in [c, d],$$

则  $F(y)$  是  $[c, d]$  上的连续函数.

**证明.** 任取  $y_0 \in [c, d]$ , 则当  $y \in [c, d]$  时, 有

$$\begin{aligned} F(y) - F(y_0) &= \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx - \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x, y_0) dx \\ &= \int_{a(y)}^{a(y_0)} f(x, y) dx + \int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x, y) dx + \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} [f(x, y) - f(x, y_0)] dx. \end{aligned}$$

因为  $f$  连续, 故存在  $M > 0$ , 使得  $|f(x, y)| \leq M$ . 由上式和已知条件得

$$\begin{aligned} |F(y) - F(y_0)| &\leq M|a(y) - a(y_0)| + M|b(y) - b(y_0)| \\ &\quad + \sup_{x \in [a, b]} |f(x, y) - f(x, y_0)| |b - a|, \end{aligned}$$

由  $a(y), b(y)$  以及  $f(x, y)$  的 (一致) 连续性即知  $F(y)$  在  $y = y_0$  处连续. □

关于  $F(y)$  的可微性, 我们有

**定理 16.1.5.** 设  $f(x, y)$  以及  $f_y(x, y)$  均在  $[a, b] \times [c, d]$  上连续, 如果  $a(y)$ ,  $b(y)$  关于  $y$  可微, 则  $F(y)$  关于  $y$  可微, 且

$$F'(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f_y(x, y) dx + f(b(y), y)b'(y) - f(a(y), y)a'(y).$$

**证明.** 证明留作练习. □

**例 16.1.4.** 设  $a \geq 0$ , 计算积分

$$I(a) = \int_0^a \frac{\ln(1+ax)}{1+x^2} dx.$$

**解.** 利用上面的定理, 得

$$\begin{aligned} I'(a) &= \frac{\ln(1+a^2)}{1+a^2} + \int_0^a \frac{x}{(1+ax)(1+x^2)} dx \\ &= \frac{a}{1+a^2} \arctan a + \frac{\ln(1+a^2)}{2(1+a^2)}. \end{aligned}$$

关于  $a$  积分, 得

$$I(a) = \frac{\ln(1+a^2)}{2} \arctan a + C.$$

因为  $I(0) = 0$ , 故  $C = 0$ . 最后就得到

$$I(a) = \frac{\ln(1+a^2)}{2} \arctan a.$$

### 习题 16.1

1. 设  $f(x, y)$  关于  $y$  的偏导数存在, 且  $f_y(x, y)$  是  $[a, b] \times [c, d]$  上的连续函数, 则极限

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0} = f_y(x, y_0)$$

关于  $x \in [a, b]$  一致收敛. (提示: 用微分中值定理.)

2. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则对任意  $x \in (a, b)$ , 有

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^x [f(t+h) - f(t)] dt = f(x) - f(a).$$

3. 证明  $n$  阶 Bessel 函数

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi - x \sin \varphi) d\varphi$$

满足 Bessel 方程

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0.$$

4. 计算下列积分

$$(1) \int_0^\pi \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx; \quad (2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(a \tan x)}{\tan x} dx \quad (a \geq 0).$$

5. 计算下列积分

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1 + a \cos x}{1 - a \cos x} \frac{dx}{\cos x} \quad (|a| < 1); \quad (2) \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (b > a > 0).$$

6. 设  $\alpha > 1$ , 计算积分

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\alpha^2 - \sin^2 x) dx.$$

7. 定义函数

$$K(x, y) = \begin{cases} y(1-x), & y \leq x, \\ x(1-y), & y > x. \end{cases}$$

如果  $f(x)$  为  $[0, 1]$  上的连续函数, 则函数

$$u(x) = \int_0^1 K(x, y) f(y) dy$$

满足方程

$$-u''(x) = f(x), \quad u(0) = u(1) = 0.$$

8. 设  $f(x, y)$  在  $[a, b] \times [c, d]$  上连续, 则积分

$$I(\alpha, \beta, y) = \int_\alpha^\beta f(x, y) dx, \quad \alpha, \beta \in [a, b], \quad y \in [c, d]$$

是关于  $\alpha, \beta, y$  的连续函数, 且关于  $\alpha, \beta$  可导.

9. 利用上题给出本节最后定理的证明.

10. 设  $f(x)$  在  $x = 0$  附近连续, 则函数

$$u(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt$$

满足方程

$$u^{(n)}(x) = f(x), \quad u(0) = u'(0) = \cdots = u^{(n-1)}(0) = 0.$$

11. 设  $\varphi, \psi$  分别为 2 次可微和 1 次可微的函数, 证明函数

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x-at) + \varphi(x+at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds$$

满足弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

## §16.2 含参变量的广义积分

如同 Riemann 积分的推广一样, 含参变量的积分也有两方面的推广. 一是积分区间可以是无穷区间, 二是被积函数可能有瑕点. 为了简单起见, 我们以无穷积分为例进行讨论, 带有瑕点的含参变量的积分可类似地讨论.

## §16.2.1 一致收敛及其判别法

设  $f(x, y)$  是定义在矩形  $[a, +\infty) \times [c, d]$  中的函数, 且对于每一个  $y \in [c, d]$ , 关于  $x$  的函数  $f(x, y)$  在  $[a, +\infty)$  中广义可积, 则定义

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx, \quad y \in [c, d],$$

称为含参变量的广义积分, 其中  $y$  是参数.

**定义 16.2.1** (一致收敛). 如果任给  $\varepsilon > 0$ , 存在与  $y$  无关的  $A_0 = A_0(\varepsilon) > a$ , 当  $A, A' > A_0$  时, 对一切  $y \in [c, d]$ , 成立

$$\left| \int_A^{A'} f(x, y) dx \right| < \varepsilon, \quad \text{或} \quad \left| \int_A^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon,$$

则称含参变量的广义积分  $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$  关于  $y \in [c, d]$  一致收敛.

定义中的区间  $[c, d]$  也可以换成其它类型的区间. 对于带有瑕点的无界函数, 也有类似的一致收敛的概念. 例如, 设对于每一个  $y \in [c, d]$ , 以  $b$  为瑕点的瑕积分  $\int_a^b f(x, y) dx$  存在, 如果任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$ , 当  $0 < \eta, \eta' < \delta_0$  时, 对  $[c, d]$  上的一切  $y$ , 成立

$$\left| \int_{b-\eta}^{b-\eta'} f(x, y) dx \right| < \varepsilon \quad \text{或} \quad \left| \int_{b-\eta}^b f(x, y) dx \right| < \varepsilon,$$

则称  $\int_a^b f(x, y) dx$  关于  $y \in [c, d]$  一致收敛.

**例 16.2.1.** 研究含参变量的广义积分

$$I(y) = \int_0^{+\infty} y e^{-xy} dx$$

的一致收敛性.

显然, 对每个  $y \geq 0$ , 积分都是收敛的. 又因为

$$\int_A^{+\infty} y e^{-xy} dx = e^{-yA},$$



故  $I(y)$  对于  $y \in [\delta, +\infty)$  一致收敛, 其中  $\delta$  为任意正实数. 从上式也可以看出  $I(y)$  对于  $y \in [0, +\infty)$  并不是一致收敛的.  $\square$

和广义积分以及无穷级数一样, 我们也有关于含参变量广义积分的一致收敛的判别法.

(1) (Weierstrass) 如果存在函数  $F(x)$ , 使得

$$|f(x, y)| \leq F(x), \quad \forall (x, y) \in [a, +\infty) \times [c, d],$$

且积分  $\int_a^{+\infty} F(x)dx$  收敛, 则  $\int_a^{+\infty} f(x, y)dx$  关于  $y \in [c, d]$  一致收敛. 这个判别法的证明只要注意到下面的不等式就可以了:

$$\left| \int_A^{A'} f(x, y)dx \right| \leq \left| \int_A^{A'} F(x)dx \right|.$$

(2) (Dirichlet) 设  $f(x, y), g(x, y)$  满足下列条件:

(i) 当  $A \rightarrow +\infty$  时, 积分  $\int_a^A f(x, y)dx$  关于  $y \in [c, d]$  一致有界, 即存在常数  $K$ , 使得

$$\left| \int_a^A f(x, y)dx \right| \leq K, \quad \forall A \in [a, +\infty), y \in [c, d];$$

(ii)  $g(x, y)$  是  $x$  的单调函数, 且当  $x \rightarrow +\infty$  时  $g(x, y)$  关于  $y \in [c, d]$  一致地趋于零, 即任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $A_0 = A_0(\varepsilon)$ , 当  $x \geq A_0$  时

$$|g(x, y)| < \varepsilon, \quad \forall y \in [c, d];$$

则含参变量的广义积分  $\int_a^{+\infty} f(x, y)g(x, y)dx$  关于  $y \in [c, d]$  一致收敛.

这个判别法的证明是这样的: 根据题设, 当  $A, A' \geq a$  时, 有

$$\left| \int_A^{A'} f(x, y)dx \right| \leq \left| \int_a^A f(x, y)dx \right| + \left| \int_a^{A'} f(x, y)dx \right| \leq 2K.$$

根据积分第二中值公式, 当  $A, A' > A_0$  时, 有

$$\begin{aligned} \left| \int_A^{A'} f(x, y)g(x, y)dx \right| &\leq |g(A, y)| \left| \int_A^{\xi(y)} f(x, y)dx \right| + |g(A', y)| \left| \int_{\xi(y)}^{A'} f(x, y)dx \right| \\ &\leq 2K\varepsilon + 2K\varepsilon = 4K\varepsilon, \end{aligned}$$

这说明了积分的一致收敛性.

(3) (Abel) 设  $f(x, y), g(x, y)$  满足下列条件:

(i) 积分  $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$  关于  $y \in [c, d]$  一致收敛;

(ii)  $g(x, y)$  是  $x$  的单调函数, 且关于  $y \in [c, d]$  一致有界;

则含参变量的广义积分  $\int_a^{+\infty} f(x, y)g(x, y)dx$  关于  $y \in [c, d]$  一致收敛.

这个判别法的证明仍然是运用积分第二中值公式, 我们留给读者完成.

对于含参变量的瑕积分, 上述判别法也有类似的表现形式. 我们以下仅举例来研究一致收敛性.

### 例 16.2.2. 研究积分

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x dx$$

关于  $\alpha \in (0, +\infty)$  的一致收敛性.

当  $\alpha \geq \delta > 0$  时, 因为

$$|e^{-\alpha x} \sin x| \leq e^{-\delta x},$$

而积分  $\int_0^{+\infty} e^{-\delta x} dx$  收敛, 故由 Weierstrass 判别法知积分  $I(\alpha)$  关于  $\alpha \in [\delta, +\infty)$  一致收敛.

$I(\alpha)$  关于  $\alpha \in (0, +\infty)$  不是一致收敛的, 这是因为当  $\alpha \rightarrow 0$  时,

$$\int_A^{A'} e^{-\alpha x} \sin x dx \rightarrow \int_A^{A'} \sin x dx = \cos A - \cos A',$$

取  $A = 2n\pi$ ,  $A' = 2n\pi + \pi/2$  即知上式不趋于零. □

### 例 16.2.3. 研究积分

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{\alpha + x} dx$$

关于  $\alpha \in (0, +\infty)$  的一致收敛性.

当  $\alpha \geq \delta > 0$  时,

$$\left| \int_0^A \sin \alpha x dx \right| = \frac{|1 - \cos \alpha A|}{\alpha} \leq \frac{2}{\delta},$$

且  $\frac{1}{\alpha + x}$  关于  $x$  单调下降, 一致趋于零. 因此, 根据 Dirichlet 判别法知  $I(\alpha)$  关于  $\alpha \in [\delta, +\infty)$  一致收敛. □

注.  $I(\alpha)$  关于  $\alpha \in (0, +\infty)$  不是一致收敛的.

**例 16.2.4. 研究积分**

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx$$

关于  $\alpha \in [0, +\infty)$  的一致收敛性.

因为积分  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  收敛, 这个积分不含参变量  $\alpha$ , 因而关于  $\alpha$  一致收敛. 函数  $e^{-\alpha x}$  关于  $x$  单调, 且当  $\alpha, x \geq 0$  时  $0 \leq e^{-\alpha x} \leq 1$ , 故由 Abel 判别法知  $I(\alpha)$  关于  $\alpha \in [0, +\infty)$  一致收敛.  $\square$

**§16.2.2 一致收敛积分的性质**

我们在本小节讨论含参变量的广义积分所确定的函数的极限性质, 连续性质, 微分性质和积分性质等.

**定理 16.2.1 (极限性质).** 设积分  $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$  在  $y_0$  附近一致收敛, 且极限

$\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \phi(x)$  关于任意闭区间  $[a, b]$  都是一致收敛的, 则积分  $\int_a^{+\infty} \phi(x) dx$  收敛, 且

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \phi(x) dx.$$

**证明.** 根据定理 16.1.1 知  $\phi(x)$  在任意区间  $[a, b]$  上可积. 由题设, 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $A_0$ , 当  $A, A' > A_0$  时, 有

$$\left| \int_A^{A'} f(x, y) dx \right| < \varepsilon.$$

对于上述任意固定的  $A, A'$ , 存在  $\delta > 0$ , 当  $0 < |y - y_0| < \delta$  时,

$$|f(x, y) - \phi(x)| < \frac{\varepsilon}{|A - A'| + 1},$$

此时

$$\begin{aligned} \left| \int_A^{A'} \phi(x) dx \right| &\leq \left| \int_A^{A'} f(x, y) dx \right| + \left| \int_A^{A'} [f(x, y) - \phi(x)] dx \right| \\ &\leq \varepsilon + |A - A'| \frac{\varepsilon}{|A - A'| + 1} < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

这说明  $\phi(x)$  在  $[a, +\infty)$  上的广义积分收敛, 并且在上式中令  $A' \rightarrow +\infty$  可得

$$\left| \int_A^{+\infty} \phi(x) dx \right| \leq 2\varepsilon.$$

因为极限  $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \phi(x)$  关于闭区间  $[a, A]$  一致收敛, 故存在  $\delta_0 > 0$ , 当  $0 < |y - y_0| < \delta_0$  时

$$|f(x, y) - \phi(x)| < \frac{\varepsilon}{A - a + 1}, \quad \forall x \in [a, A].$$

因此, 当  $0 < |y - y_0| < \delta_0$  时,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^{+\infty} f(x, y) dx - \int_a^{+\infty} \phi(x) dx \right| &\leq \left| \int_A^{+\infty} f(x, y) dx \right| + \left| \int_A^{+\infty} \phi(x) dx \right| \\ &\quad + \int_a^A |f(x, y) - \phi(x)| dx \\ &\leq \varepsilon + 2\varepsilon + (A - a) \frac{\varepsilon}{A - a + 1} \\ &< 4\varepsilon, \end{aligned}$$

这说明  $\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \phi(x) dx$ . □

**推论 16.2.2** (连续性质). 设  $f(x, y)$  在  $[a, +\infty) \times [c, d]$  上连续, 积分

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

关于  $y \in [c, d]$  一致收敛, 则  $I(y)$  是  $y \in [c, d]$  的连续函数.

**证明.** 这只要注意到  $f(x, y)$  在任意闭矩形  $[a, b] \times [c, d]$  上一致连续, 从而满足上述定理的条件即可. □

**例 16.2.5.** 研究积分

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$$

关于  $\alpha \in [0, +\infty)$  的一致收敛性.

显然, 当  $\alpha = 0$  时,  $I(\alpha) = 0$ . 当  $\alpha > 0$  时, 利用变量替换  $t = \alpha x$  可得  $I(\alpha) = \pi/2$ . 这说明  $I(\alpha)$  关于  $\alpha \in [0, +\infty)$  不连续, 因此积分  $I(\alpha)$  关于包含  $\alpha = 0$  的区间不是一致收敛的. 不难看出, 对任意  $\delta > 0$ ,  $I(\alpha)$  关于  $\alpha \in [\delta, +\infty)$  是一致收敛的. □

**定理 16.2.3** (Dini). 设  $f(x, y)$  为  $(x, y) \in [a, +\infty) \times [c, d]$  中的非负连续函数, 如果积分

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

是  $y \in [c, d]$  的连续函数, 则  $I(y)$  关于  $y \in [c, d]$  一致收敛.

**证明.** 我们可以用函数项级数的 Dini 定理来证明本定理. 将积分  $I(y)$  写为

$$I(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{a+n}^{a+n+1} f(x, y) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y),$$

其中

$$a_n(y) = \int_{a+n}^{a+n+1} f(x, y) dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

因为  $f(x, y)$  为非负连续函数, 故  $a_n(y)$  是  $y$  的非负连续函数. 由假设,  $I(y)$  是  $y$  的连续函数, 由函数项级数的 Dini 定理,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(y)$  对  $y \in [c, d]$  一致收敛. 因此, 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N$ , 使得

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n(y) = \int_{a+N}^{+\infty} f(x, y) dx < \varepsilon.$$

取  $A_0 = a + N$ , 当  $A > A_0$  时, 由  $f$  的非负性得

$$0 \leq \int_A^{+\infty} f(x, y) dx \leq \int_{A_0}^{+\infty} f(x, y) dx < \varepsilon,$$

即  $I(y)$  关于  $y \in [c, d]$  一致收敛.  $\square$

**定理 16.2.4 (微分性质).** 设  $f(x, y)$  和  $f_y(x, y)$  在  $[a, +\infty) \times [c, d]$  中连续, 如果积分

$$\int_a^{+\infty} f_y(x, y) dx$$

关于  $y \in [c, d]$  一致收敛, 且存在  $y_0 \in [c, d]$ , 使得

$$I(y_0) = \int_a^{+\infty} f(x, y_0) dx$$

收敛, 则积分

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

关于  $y \in [c, d]$  一致收敛, 且

$$I'(y) = \int_a^{+\infty} f_y(x, y) dx.$$

**证明.** 我们仍然利用函数项级数的相关结果证明本定理. 考虑函数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{a+n}^{a+n+1} f(x, y) dx,$$

根据题设可知, 函数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a'_n(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{a+n}^{a+n+1} f_y(x, y) dx$$

在  $y \in [c, d]$  上一致收敛. 再由级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(y_0)$  收敛, 利用定理 9.2.2 知级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(y)$  在  $y \in [c, d]$  上一致收敛, 且

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y) \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n(y) = \int_a^{+\infty} f_y(x, y) dx. \quad (16.1)$$

现在我们说明  $I(y)$  关于  $y \in [c, d]$  一致收敛. 事实上, 由题设, 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $A_0$ , 当  $A, A' > A_0$  时,

$$\left| \int_A^{A'} f(x, y_0) dx \right| < \varepsilon$$

以及

$$\left| \int_A^{A'} f_y(x, y) dx \right| < \varepsilon, \quad \forall y \in [c, d].$$

对函数  $\varphi(y) = \int_A^{A'} f(x, y) dx$  用微分中值定理, 得

$$\int_A^{A'} f(x, y) dx - \int_A^{A'} f(x, y_0) dx = \left( \int_A^{A'} f_y(x, \xi) dx \right) (y - y_0),$$

从而有

$$\left| \int_A^{A'} f(x, y) dx \right| \leq \left| \int_A^{A'} f(x, y_0) dx \right| + \left| \int_A^{A'} f_y(x, \xi) dx \right| (d - c) < \varepsilon + \varepsilon(d - c),$$

这说明  $I(y)$  关于  $y \in [c, d]$  一致收敛, 从而 (16.1) 可以写为

$$I'(y) = \int_a^{+\infty} f_y(x, y) dx.$$

这就证明了定理. □

#### 例 16.2.6. 计算积分

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2\alpha x dx.$$

**解.** 将  $\alpha$  视为参数, 因为  $f(x, \alpha) = e^{-x^2} \cos 2\alpha x$  关于  $x, \alpha$  连续可微, 且

$$|f_\alpha(x, \alpha)| = |e^{-x^2} 2x \sin 2\alpha x| \leq 2xe^{-x^2},$$

根据 Weierstrass 判别法知积分

$$\int_0^{+\infty} -e^{-x^2} 2x \sin 2\alpha x dx$$

关于  $\alpha$  一致收敛. 显然,  $I(\alpha)$  关于  $\alpha$  也一致收敛. 由上述定理得

$$I'(\alpha) = \int_0^{+\infty} -e^{-x^2} 2x \sin 2\alpha x dx,$$

对上式右端使用分部积分可得

$$I'(\alpha) = -2\alpha I(\alpha),$$

解得

$$I(\alpha) = Ce^{-\alpha^2},$$

因为  $I(0) = \sqrt{\pi}/2$ , 故有  $I(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-\alpha^2}$ . □

**例 16.2.7.** 计算积分

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx \quad (\alpha \geq 0).$$

**解.** 在前面的例子中已经说明了  $I(\alpha)$  关于  $\alpha \in [0, +\infty)$  一致收敛. 任给  $\delta > 0$ , 积分

$$\int_0^{+\infty} \left( e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} \right)_\alpha dx = - \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x dx$$

关于  $\alpha \in [\delta, +\infty)$  一致收敛, 于是  $I(\alpha)$  在  $[\delta, +\infty)$  中可微, 且

$$I'(\alpha) = - \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x dx = - \frac{1}{1 + \alpha^2}.$$

由于  $\delta$  的任意性, 上式对任意  $\alpha > 0$  成立. 从中解出

$$I(\alpha) = C - \arctan \alpha.$$

当  $\alpha > 0$  时

$$|I(\alpha)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} \rightarrow 0 \quad (\alpha \rightarrow +\infty),$$

于是  $C = \pi/2$ , 从而得到  $I(\alpha) = \pi/2 - \arctan \alpha$ . 令  $\alpha \rightarrow 0$  还可得  $I(0) = \pi/2$ .  $\square$

下面讨论含参变量广义积分关于参数的积分性质. 首先考虑函数列在无穷区间上的积分问题.

**定理 16.2.5.** 设对任意  $b > a$ , 函数列  $f_n(x)$  在  $[a, b]$  上均一致收敛到  $f(x)$ . 如果积分  $\int_a^{+\infty} f_n(x) dx$  关于  $n$  一致收敛, 则积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 且

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{+\infty} f_n(x) dx.$$

**证明.** 由题设, 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $A_0 > 0$ , 当  $A, A' \geq A_0$  时

$$\left| \int_A^{A'} f_n(x) dx \right| < \varepsilon, \quad \forall n \geq 1.$$

因为  $f_n(x)$  在闭区间上都是一致收敛到  $f(x)$  的, 故当  $n$  充分大时, 有

$$\left| \int_A^{A'} f(x) dx \right| \leq \int_A^{A'} |f(x) - f_n(x)| dx + \left| \int_A^{A'} f_n(x) dx \right| < 2\varepsilon.$$

这说明积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 并且令  $A' \rightarrow +\infty$  得

$$\left| \int_A^{+\infty} f_n(x) dx \right| \leq \varepsilon, \quad \left| \int_A^{+\infty} f(x) dx \right| \leq 2\varepsilon.$$

于是当  $n$  充分大时, 有

$$\begin{aligned} \left| \int_a^{+\infty} f_n(x) dx - \int_a^{+\infty} f(x) dx \right| &\leq \int_a^{A_0} |f_n(x) - f(x)| dx \\ &\quad + \left| \int_{A_0}^{+\infty} f_n(x) dx \right| + \left| \int_{A_0}^{+\infty} f(x) dx \right| \\ &\leq 4\varepsilon, \end{aligned}$$

这说明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{+\infty} f_n(x) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx$ .  $\square$

注. 读者很容易将本定理以及下面的定理改写为关于函数项级数的相应结果.

**定理 16.2.6.** 设连续函数列  $f_n(x)$  关于  $n$  单调, 且在  $(a, +\infty)$  中收敛于连续函数  $f(x)$ . 如果积分

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad \text{和} \quad \int_a^{+\infty} f_1(x) dx$$

收敛, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{+\infty} f_n(x) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

**证明.** 不妨设  $f_n(x)$  关于  $n$  单调递增, 则

$$0 \leq f(x) - f_n(x) \leq f(x) - f_1(x),$$

根据 Weierstrass 判别法,  $f(x) - f_n(x)$  在  $(a, +\infty)$  中的广义积分收敛, 因而  $f_n(x)$  在  $(a, +\infty)$  中的广义积分也收敛.

任给  $\varepsilon > 0$ , 根据题设, 存在  $\delta > 0$ ,  $A > a + \delta$ , 使得

$$0 \leq \int_a^{a+\delta} [f(x) - f_1(x)] dx < \varepsilon, \quad 0 \leq \int_A^{+\infty} [f(x) - f_1(x)] dx < \varepsilon.$$

根据函数列的 Dini 定理,  $f(x) - f_n(x)$  在闭区间  $[a + \delta, A]$  上是一致收敛的. 因此存在  $N$ , 当  $n > N$  时

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{A - a}, \quad \forall x \in [a + \delta, A],$$

此时有

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_a^{+\infty} [f(x) - f_n(x)] dx &\leq \int_a^{a+\delta} [f(x) - f_1(x)] dx + \int_{a+\delta}^A [f(x) - f_n(x)] dx \\ &\quad + \int_A^{+\infty} [f(x) - f_1(x)] dx \\ &\leq \varepsilon + \frac{\varepsilon}{A - a} (A - a - \delta) + \varepsilon \\ &\leq 3\varepsilon, \end{aligned}$$



这说明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{+\infty} f_n(x) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx$ . □

注. 定理中的  $a$  可以是函数的间断点或瑕点. 对于有限区间上的 (瑕) 积分, 类似的结论也成立.

**例 16.2.8.** 计算积分  $J = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ .

**解.** 考虑函数列的极限

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} = e^{-x^2},$$

由于  $(1 + x^2/n)^{-n}$  关于  $n$  单调递减, 由上述定理即得

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx,$$

对上式右端积分用变量替换  $x = \sqrt{nt}$  得

$$J = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

其中我们利用了 Wallis 公式. □

**例 16.2.9.** 计算积分  $I = \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx$ .

**解.**  $x=1$  为瑕点, 但瑕积分是收敛的. 因为

$$\frac{\ln(1-x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{x^{n-1}}{n},$$

上式右端每一项都是非正连续函数, 故可逐项积分:

$$I = - \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{n} dx = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}.$$

需要注意的是, 这里的函数项级数在整个区间  $[0, 1]$  上不是一致收敛的. □

**定理 16.2.7** (积分性质之一). 设  $f(x, y)$  在  $[a, +\infty) \times [c, d]$  中连续, 积分

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

关于  $y \in [c, d]$  一致收敛, 则

$$\int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d I(y) dy = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx.$$

**证明.** 任取单调递增趋于  $+\infty$  的数列  $A_n > a$ , 令

$$I_n(y) = \int_a^{A_n} f(x, y) dx, \quad y \in [c, d].$$

由题设不难看出  $I_n(y)$  在  $y \in [c, d]$  上一致收敛到  $I(y)$ . 由函数列的逐项积分定理可得

$$\int_c^d I(y) dy = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_c^d I_n(y) dy,$$

交换积分次序得

$$\int_c^d I(y) dy = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^{A_n} dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

因为  $\{A_n\}$  是任取的, 上式表明  $\int_c^d f(x, y) dy$  关于  $x \in [a, +\infty)$  的广义积分收敛, 且

积分值为  $\int_c^d I(y) dy$ . □

**注.** 在  $[a, b] \times [c, +\infty)$  等乘积区间上有类似的结果, 并且有时可以减弱关于连续性的要求.

**例 16.2.10.** 设  $\alpha, \beta > 0$ , 计算积分

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2} dx.$$

**解.** 由于积分  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin yx}{x} dx$  关于  $y \in [\delta, +\infty)$  ( $\delta > 0$ ) 一致收敛, 利用积分次序的可交换性得

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x} \int_\alpha^\beta \sin(yx) dy \\ &= \int_\alpha^\beta dy \int_0^{+\infty} \frac{\sin(yx)}{x} dx \\ &= \frac{\pi}{2}(\beta - \alpha). \end{aligned}$$

其中, 当  $y > 0$  时, 我们用到了积分  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin yx}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ . □

最后, 我们考虑无穷区间上广义积分的交换次序问题. 对于非负连续函数, 下面的结果较为有用.

**定理 16.2.8** (积分性质之二). 设  $f(x, y)$  为  $(x, y) \in (a, +\infty) \times (c, +\infty)$  中的非负连续函数, 如果

(i) 函数

$$\varphi(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx, \quad \psi(x) = \int_c^{+\infty} f(x, y) dy$$

分别是  $y \in (c, +\infty)$  和  $x \in (a, +\infty)$  上的连续函数;

(ii) 积分

$$\int_c^{+\infty} \varphi(y) dy, \quad \int_a^{+\infty} \psi(x) dx$$

有一个收敛, 则另一个也收敛, 且二者相等, 即

$$\int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy = \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx.$$

**证明.** 不妨设积分  $\int_c^{+\infty} \varphi(y) dy$  收敛. 根据本节 Dini 定理,  $\varphi(y)$  和  $\psi(x)$  分别在  $(c, +\infty)$  和  $(a, +\infty)$  中的闭区间上一致收敛. 任取趋于  $c$  的单调递减数列  $c_n$ , 令

$$\psi_n(x) = \int_{c_n}^{+\infty} f(x, y) dy,$$

由  $f$  非负知  $\psi_n(x)$  关于  $x$  在闭区间上也一致收敛, 当  $A > a' > a$  时, 由前一定理得

$$\int_{a'}^A dx \int_{c_n}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{c_n}^{+\infty} dy \int_{a'}^A f(x, y) dx \leq \int_c^{+\infty} \varphi(y) dy.$$

根据函数列的 Dini 定理,  $\psi_n(x)$  在闭区间  $[a', A]$  关于  $n$  一致趋于  $\psi(x)$ , 因此

$$\int_{a'}^A \psi(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a'}^A \psi_n(x) dx \leq \int_c^{+\infty} \varphi(y) dy,$$

因为  $\psi(x)$  为非负函数, 由上式对任意  $A > a' > a$  成立知  $\psi(x)$  在  $(a, +\infty)$  中的积分收敛, 且

$$\int_a^{+\infty} \psi(x) dx \leq \int_c^{+\infty} \varphi(y) dy.$$

现在交换  $\varphi$  和  $\psi$  的位置, 同样的论证表明

$$\int_c^{+\infty} \varphi(y) dy \leq \int_a^{+\infty} \psi(x) dx,$$

这说明两个积分相等. □

**例 16.2.11.** 计算积分  $J = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ .

**解.** 令  $x = ut$  ( $u > 0$ ), 得

$$J = u \int_0^{+\infty} e^{-u^2 t^2} dt,$$

上式两端同时乘以  $e^{-u^2}$ , 再对  $u$  积分得

$$J^2 = \int_0^{+\infty} J e^{-u^2} du = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} u du \int_0^{+\infty} e^{-u^2 t^2} dt.$$

交换积分次序, 得

$$J^2 = \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-(1+t^2)u^2} u du = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4},$$

因此  $J = \sqrt{\pi}/2$ . □

**定理 16.2.9** (积分性质之三). 设  $f(x, y)$  在  $(x, y) \in [a, +\infty) \times [c, +\infty)$  中连续. 如果  $f$  满足下列条件:

(i) 积分  $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$  和  $\int_c^{+\infty} f(x, y) dy$  分别关于  $y, x$  在任何闭区间上一致收敛;

(ii) 积分  $\int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} |f(x, y)| dy$  和  $\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} |f(x, y)| dx$  至少有一个存在;

则积分  $\int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy$  和  $\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$  都存在, 且二者相等:

$$\int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy = \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx.$$

**证明.** 不妨设积分  $\int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} |f(x, y)| dy$  存在. 因此, 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $A_0$ , 当  $A > A_0$  时

$$\int_A^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} |f(x, y)| dy < \varepsilon. \quad (16.2)$$

任取单调递增趋于  $+\infty$  的数列  $C_n > c$ , 因为积分  $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$  关于  $y \in [c, C_n]$  一致收敛, 故有

$$\int_c^{C_n} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^{C_n} f(x, y) dy.$$

记

$$f_n(x) = \int_c^{C_n} f(x, y) dy,$$

则由题设知  $f_n(x)$  在任何闭区间  $[a, b]$  上均一致收敛于  $\int_c^{+\infty} f(x, y) dy$ . 当  $A > A_0$  时,

$$\left| \int_A^{+\infty} f_n(x) dx \right| \leq \int_A^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} |f(x, y)| dy < \varepsilon,$$

这说明  $f_n(x)$  在  $[a, +\infty)$  中的积分关于  $n$  一致收敛, 即  $f_n(x)$  满足定理 16.2.5 的条件, 从而有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_c^{C_n} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^{+\infty} dx \int_c^{C_n} f(x, y) dy = \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy,$$

由  $\{C_n\}$  的任意性可知积分  $\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$  存在, 且

$$\int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy = \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx.$$

这就证明了定理. □

注. 在无穷区间的乘积  $(-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$  上有类似的结果.

例 16.2.12. 计算光学中常出现的 Fresnel 积分:

$$I = \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx, \quad J = \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx.$$

解. 令  $x^2 = t$  得

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt, \quad J = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt.$$

先算第一个积分. 当  $\alpha > 0$  时, 可验证  $f(t, u) = e^{-\alpha t} \sin t e^{-tu^2}$  满足定理 16.2.9 的条件. 于是利用等式

$$\frac{\sin t}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \sin t e^{-tu^2} du,$$

可得

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} e^{-\alpha t} dt &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \sin t dt \int_0^{+\infty} e^{-tu^2} du \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} du \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+u^2)t} \sin t dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + (\alpha + u^2)^2}. \end{aligned}$$

因为积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} e^{-\alpha t} dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + (\alpha + u^2)^2}$$

关于  $\alpha$  都在  $[0, +\infty)$  中一致收敛, 故可令  $\alpha \rightarrow 0$ , 得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + u^4} = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

因此

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

对于积分  $J$ , 设  $\delta > 0$ , 则有

$$\begin{aligned} \int_\delta^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} e^{-\alpha t} dt &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_\delta^{+\infty} e^{-\alpha t} \cos t dt \int_0^{+\infty} e^{-tu^2} du \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} du \int_\delta^{+\infty} e^{-(\alpha+u^2)t} \cos t dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(\alpha+u^2)\delta}}{1 + (\alpha + u^2)^2} [(\alpha + u^2) \cos \delta - \sin \delta] du. \end{aligned}$$

在上式中令  $\delta \rightarrow 0$  得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} e^{-\alpha t} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\alpha + u^2}{1 + (\alpha + u^2)^2} du,$$

再令  $\alpha \rightarrow 0$  得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{1+u^4} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

因此

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

注. 引入  $\delta > 0, \alpha > 0$  是为了避开瑕点以及保证积分可交换次序.

### 习题 16.2

1. 给出含参变量的广义积分的 Abel 判别法的详细证明.

2. 如果广义积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛,  $g(x, y)$  关于  $x$  单调, 且关于  $y \in [c, d]$  一致有界, 则积分

$$\int_a^{+\infty} f(x) g(x, y) dx$$

关于  $y \in [c, d]$  一致收敛.

3. 设  $f$  连续, 积分

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

关于  $y \in [c, d]$  收敛, 但积分  $\int_a^{+\infty} f(x, d) dx$  发散, 则  $I(y)$  关于  $y \in [c, d]$  不是一致收敛的.

4. 研究下列积分的一致收敛性:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+x^2} dx, \quad y \in (-\infty, +\infty);$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{\sqrt{x}} dx, \quad y \in (0, +\infty);$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{\alpha \sin \alpha x}{x(\alpha+x)} dx, \quad \alpha \in (0, +\infty);$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{\alpha^2 + x^2} dx, \quad \alpha \in (0, +\infty);$$

5. 研究含参变量的积分

$$I(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\alpha^2 - \sin^2 \varphi) d\varphi$$

关于  $\alpha$  的一致收敛性.

6. 研究下列函数在指定区间内的连续性:

$$(1) F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{1+t^2} dt, \quad x \in (-\infty, +\infty);$$

$$(2) F(x) = \int_0^{+\infty} x e^{-x^2 t} dt, \quad x \in (-\infty, +\infty);$$

$$(3) F(x) = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t^x (\pi-t)^x} dt, \quad x \in (0, 2).$$

7. 从已知积分 ( $a > 0$ )

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{a+x^2} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{a}}, \quad \int_0^1 x^{a-1} dx = \frac{1}{a},$$

通过微分求下列积分:

$$(1) \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} x^{2n} dx, \quad (2) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a+x^2)^{n+1}}, \quad (3) \int_0^1 x^{a-1} \ln^n x dx.$$

8. 计算下列积分 ( $a, b > 0$ ):

$$(1) \int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} \sin bx dx, \quad (2) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx, \quad (3) \int_0^{+\infty} \frac{(e^{-ax} - e^{-bx})^2}{x^2} dx.$$

9. 计算下列积分 ( $a, b > 0$ ):

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \sin mx dx, \quad (2) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(a^2 + x^2)}{b^2 + x^2} dx, \quad (3) \int_0^{+\infty} e^{-ay^2 - by^{-2}} dy.$$

10. 利用等式  $\int_0^{+\infty} e^{-t(\alpha^2 + x^2)} dt = (\alpha^2 + x^2)^{-1}$  计算 Laplace 积分:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx, \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx.$$

11. 计算下列积分 ( $a, b > 0$ ):

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} dx, \quad (2) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx, \quad (3) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x} dx.$$

12. 计算下列积分:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx, \quad (2) \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2) \cos 2\alpha x dx, \quad (3) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x} dx.$$

### §16.3 特殊函数

本节考虑互相之间有密切联系的两个含参变量积分, 它们的定义为

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \quad (p, q > 0), \quad \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx \quad (s > 0). \quad (16.3)$$

函数  $B(p, q)$  称为 Beta 函数,  $\Gamma(s)$  称为 Gamma 函数, 统称 Euler 积分.

## §16.3.1 Beta 函数的基本性质

$B(p, q)$  的定义中, 0 和 1 是可能的瑕点, 易见, 当  $p > 0, q > 0$  时积分收敛, 因此  $B(p, q)$  的定义是确切的. 进一步有

(1) (连续性) 当  $\delta, \eta > 0, p \geq \delta, q \geq \eta$  时,

$$0 \leq x^{p-1}(1-x)^{q-1} \leq x^{\delta-1}(1-x)^{\eta-1},$$

上式最右边的函数积分收敛, 因此  $B(p, q)$  关于  $(p, q) \in [\delta, +\infty) \times [\eta, +\infty)$  一致收敛, 这说明  $B(p, q)$  在其定义域内连续. 同理, 可以说明  $B(p, q)$  在定义域内无限次可微.

(2) (对称性) 作变量替换  $x = 1 - t$ , 容易看到

$$B(p, q) = B(q, p), \quad \forall p > 0, q > 0.$$

(3) (递推公式) 当  $p > 0, q > 1$  时, 利用分部积分, 得

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \int_0^1 (1-x)^{q-1} d\frac{x^p}{p} \\ &= \frac{1}{p} x^p (1-x)^{q-1} \Big|_0^1 + \frac{q-1}{p} \int_0^1 x^p (1-x)^{q-2} dx \\ &= \frac{q-1}{p} \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-2} dx - \frac{q-1}{p} \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \\ &= \frac{q-1}{p} B(p, q-1) - \frac{q-1}{p} B(p, q), \end{aligned}$$

整理后得到

$$B(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p, q-1), \quad \forall p > 0, q > 1. \quad (16.4)$$

利用对称性得

$$B(p, q) = \frac{p-1}{p+q-1} B(p-1, q), \quad \forall p > 1, q > 0. \quad (16.5)$$

(4) (其它表示) 作变量替换  $x = \frac{y}{1+y}$  或  $1-x = \frac{y}{1+y}$  可得

$$B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}} dy = \int_0^{+\infty} \frac{y^{q-1}}{(1+y)^{p+q}} dy,$$

如果令  $x = \sin^2 \theta$  或  $x = \cos^2 \theta$ , 则又得到

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} \theta \cos^{2q-1} \theta d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta.$$



## §16.3.2 Gamma 函数的基本性质

将 Gamma 函数写为

$$\Gamma(s) = \int_0^1 x^{s-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx,$$

当  $s > 0$  时, 上式右边两个积分都收敛, 当  $s \leq 0$  时第一个积分发散, 因此 Gamma 函数的定义域为  $s > 0$ . 进一步有

(1) (连续性) 当  $\delta, \eta > 0, s \in [\delta, \eta]$  时,

$$0 \leq x^{s-1} e^{-x} \leq x^{\delta-1} e^{-x}, \quad \forall x \in (0, 1],$$

上式右端的函数在  $[0, 1]$  上积分收敛. 同理, 由

$$0 \leq x^{s-1} e^{-x} \leq x^{\eta-1} e^{-x}, \quad \forall x \in [1, +\infty)$$

以及上式右端积分收敛知,  $\Gamma(s)$  关于  $s \in [\delta, \eta]$  一致收敛, 这说明  $\Gamma(s)$  在其定义域中连续. 进一步可以说明  $\Gamma(s)$  在其定义域中无限次可微.

(2) (递推公式) 当  $s > 0$  时, 利用分部积分可得

$$\begin{aligned} \Gamma(s+1) &= \int_0^{+\infty} x^s e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^s d(-e^{-x}) \\ &= -x^s e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx \\ &= s\Gamma(s), \end{aligned}$$

这就得到递推公式

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \quad \forall s > 0. \quad (16.6)$$

利用这个公式可以对不是整数的负实数定义其 Gamma 函数值. 显然,  $\Gamma(1) = 1$ . 从 (16.6) 可得 Gamma 函数在任意正整数上的取值为

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad \forall n \geq 1.$$

(3) (其它表示) 作变量替换  $x = \alpha t$  ( $\alpha > 0$ ) 可得

$$\Gamma(s) = \alpha^s \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-\alpha t} dt.$$

如果令  $x = t^2$ , 又有

$$\Gamma(s) = 2 \int_0^{+\infty} t^{2s-1} e^{-t^2} dt,$$

特别地, 取  $s = 1/2$ , 得

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}. \quad (16.7)$$

(4) (对数凸性) 我们说明  $\ln \Gamma(s)$  是  $(0, +\infty)$  中的凸函数. 因为  $\ln \Gamma(s)$  为连续函数, 只要证明不等式

$$\ln \Gamma\left(\frac{s_1 + s_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \ln \Gamma(s_1) + \frac{1}{2} \ln \Gamma(s_2)$$

对任意  $s_1, s_2 > 0$  成立即可. 这等价于

$$\Gamma\left(\frac{s_1 + s_2}{2}\right) \leq \sqrt{\Gamma(s_1)} \sqrt{\Gamma(s_2)}.$$

事实上, 根据定义并利用 Cauchy-Schwarz 不等式, 有

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{s_1 + s_2}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} t^{s_1/2 + s_2/2 - 1} e^{-t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} (t^{(s_1-1)/2} e^{-t/2}) (t^{(s_2-1)/2} e^{-t/2}) dt \\ &\leq \left( \int_0^{+\infty} t^{s_1-1} e^{-t} dt \right)^{1/2} \left( \int_0^{+\infty} t^{s_2-1} e^{-t} dt \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{\Gamma(s_1)} \sqrt{\Gamma(s_2)}. \end{aligned}$$

### §16.3.3 进一步的性质

**定理 16.3.1.** Beta 函数与 Gamma 函数之间满足下面的等式:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad \forall p, q > 0. \quad (16.8)$$

**证明.** 利用 Gamma 函数的其它表示, 当  $y \geq 0$  时, 有

$$\frac{1}{(1+y)^{p+q}} = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^\infty x^{p+q-1} e^{-(1+y)x} dx.$$

利用 Beta 函数的其它表示可得

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}} dy = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^\infty y^{p-1} dy \int_0^\infty x^{p+q-1} e^{-(1+y)x} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^\infty x^{q-1} e^{-x} dx \int_0^\infty (xy)^{p-1} e^{-yx} x dy \\ &= \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+q)} \int_0^\infty x^{q-1} e^{-x} dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \end{aligned}$$

定理证毕. □

下面的结果也很出人意料, 它给出了 Gamma 函数的一种刻画.

**定理 16.3.2** (Bohr-Mollerup). 设  $f(s)$  为  $(0, +\infty)$  中的正函数, 且满足条件

- (i)  $f(s+1) = sf(s)$ ,  $\forall s > 0$ ;
  - (ii)  $f(1) = 1$ ;
  - (iii)  $\ln f(s)$  为  $(0, +\infty)$  中的凸函数;
- 则  $f(s) = \Gamma(s)$ ,  $\forall s > 0$ .

**证明.** 我们已经知道 Gamma 函数满足定理中的三个条件, 因此只要证明满足这三个条件的函数是惟一确定的就行了. 根据条件 (i) 和 (ii), 我们只需考虑  $s \in (0, 1)$  时  $f(s)$  的值即可. 根据条件 (iii), 对于任意正整数  $n > 1$ , 有

$$\frac{\ln f(n) - \ln f(n-1)}{n - (n-1)} \leq \frac{\ln f(n+s) - \ln f(n)}{(n+s) - n} \leq \frac{\ln f(n+1) - \ln f(n)}{(n+1) - n},$$

由条件 (i) 和 (ii) 可得  $f(n) = (n-1)!$ , 代入上式得

$$\ln(n-1)! - \ln(n-2)! \leq \frac{\ln f(n+s) - \ln(n-1)!}{s} \leq \ln n! - \ln(n-1)!,$$

整理以后得

$$(n-1)^s (n-1)! \leq f(n+s) \leq n^s (n-1)!.$$

因为

$$f(n+s) = (n-1+s) \cdots (1+s) s f(s),$$

代入前式得

$$\frac{(n-1)^s (n-1)!}{s(s+1) \cdots (s+n-1)} \leq f(s) \leq \frac{n^s (n-1)!}{s(s+1) \cdots (s+n-1)},$$

或改写为 (上式左边  $n-1$  换成  $n$ )

$$\frac{n}{n+s} f(s) \leq \frac{n! n^s}{s(s+1) \cdots (s+n)} \leq f(s)$$

令  $n \rightarrow +\infty$ , 由数列极限的夹逼原理即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^s}{s(s+1) \cdots (s+n)} = f(s),$$

即  $f(s)$  是被惟一确定的. □

从上述定理可立即得到 Gamma 函数的极限表示:

**定理 16.3.3** (Euler-Gauss). 对任意  $s > 0$ , 有

$$\Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^s}{s(s+1) \cdots (s+n)}. \quad (16.9)$$

利用 Euler 常数, 还可将  $\Gamma(s)$  写为无穷乘积:

**定理 16.3.4** (Weierstrass). 对任意  $s > 0$ , 有

$$\Gamma(s) = e^{-\gamma s} \frac{1}{s} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{s/n}}{1 + s/n}, \quad (16.10)$$

其中  $\gamma$  为 Euler 常数, 即

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n.$$

证明. 记

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n,$$

则数列  $c_n$  的极限为 Euler 常数  $\gamma$ . 我们有

$$n^s = e^{s \ln n} = e^{s(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - c_n)},$$

因此 (16.9) 可改写为

$$\begin{aligned}\Gamma(s) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-sc_n}}{s} \frac{1e^s \cdot 2e^{s/2} \cdots ne^{s/n}}{(s+1)(s+2)\cdots(s+n)} \\ &= e^{-\gamma s} \frac{1}{s} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^s}{(1+s)} \cdots \frac{e^{s/n}}{1+s/n} \\ &= e^{-\gamma s} \frac{1}{s} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{s/n}}{1+s/n}.\end{aligned}$$

这就得到了 Gamma 函数的乘积表示. □

下面的公式称为 Gamma 函数的倍元公式.

**定理 16.3.5** (Legendre). 对任意  $s > 0$ , 有

$$\Gamma(2s) = \frac{2^{2s-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(s) \Gamma(s + 1/2).$$

证明. 令

$$f(s) = \frac{2^{s-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right),$$

我们来验证  $f(s)$  满足定理 16.3.2 的三个条件. 显然,

$$\begin{aligned}f(s+1) &= \frac{2^s}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+2}{2}\right) \\ &= \frac{2^s}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \frac{s}{2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \\ &= s \frac{2^{s-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) = sf(s),\end{aligned}$$

这说明  $f(s)$  满足第一个条件. 又

$$f(1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = 1,$$

因此第二个条件也满足. 第三个条件利用 Gamma 函数的对数凸性即可. 因此有  $f(s) = \Gamma(s)$ , 即

$$\Gamma(s) = \frac{2^{s-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right),$$

将  $s$  换成  $2s$  就是欲证等式. □

下面的公式称为 Gamma 函数的余元公式.

**定理 16.3.6** (Euler). 当  $0 < s < 1$  时, 有

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}.$$

**证明.** 利用 (16.9) 得

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\Gamma(1-s) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^s n!}{s(s+1) \cdots (s+n)} \frac{n^{1-s} n!}{(1-s)(2-s) \cdots (n+1-s)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{s} \frac{n(n!)^2}{(1-s^2)(2^2-s^2) \cdots (n^2-s^2)} \frac{1}{(n+1-s)} \\ &= \frac{1}{s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

由 (10.2) 或 (9.5) 式中  $\sin \pi s$  的如下乘积表示

$$\sin \pi s = \pi s \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right)$$

即得  $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$ . □

注. 在余元公式中取  $s = 1/2$  可重新得到  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ .

**例 16.3.1.** 倍元公式的另一证明.

考虑 Beta 函数  $p = q = s$  的值, 有

$$\begin{aligned}B(s, s) &= \int_0^1 t^{s-1} (1-t)^{s-1} dt = \int_0^1 \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - t\right)^2\right]^{s-1} dt \\ &= 2 \int_0^{1/2} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - t\right)^2\right]^{s-1} dt.\end{aligned}$$

作变量替换  $t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{x}$ , 则得

$$B(s, s) = \frac{1}{2^{2s-1}} \int_0^1 x^{-1/2} (1-x)^{s-1} dx = \frac{1}{2^{2s-1}} B(1/2, s).$$

根据定理 16.3.1, 上式可改写为

$$\frac{\Gamma(s)\Gamma(s)}{\Gamma(2s)} = \frac{1}{2^{2s-1}} \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(s)}{\Gamma(s+1/2)},$$

代入  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$  即得倍元公式. □

**例 16.3.2.** 计算积分 ( $a, b > 0$ ):

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1} t \cos^{b-1} t dt.$$

**解.** 作变量替换  $x = \sin^2 t$ , 积分化为

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^{a/2-1} (1-x)^{b/2-1} dx \\ &= \frac{1}{2} B(a/2, b/2) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{a}{2})\Gamma(\frac{b}{2})}{\Gamma(\frac{a+b}{2})}. \end{aligned}$$

特别地, 当  $b = 1$  时,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1} t dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(\frac{a}{2})}{\Gamma(\frac{a+1}{2})}.$$

如果  $a, b$  为正整数, 则这些积分的值可以利用 Gamma 函数的递推公式算出.  $\square$

**例 16.3.3.** 计算积分 ( $|\alpha| < 1$ ):

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^\alpha t dt.$$

**解.** 在上例中取  $a = \alpha + 1, b = 1 - \alpha$ , 则有

$$I = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right),$$

利用余元公式得

$$I = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sin \frac{\alpha+1}{2} \pi} = \frac{\pi}{2 \cos \frac{\alpha\pi}{2}}.$$

特别地, 取  $\alpha = 1/2$  可得  $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan t} dt = \pi/\sqrt{2}$ .  $\square$

#### §16.3.4 Stirling 公式

对于正整数的阶乘, 我们有如下 Stirling 公式 (见第五章最后一节 (5.14)):

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\delta_n}, \quad \delta_n = \frac{\theta_n}{12n}, \quad 0 < \theta_n < 1.$$

将  $\Gamma(s)$  视为阶乘的推广, 我们来推导类似的渐近表示. 设  $s > 0$ , 令

$$r(s) = \ln \frac{\Gamma(s)e^s}{\sqrt{2\pi}s^{s-1/2}} = \ln \Gamma(s) + s - (s-1/2) \ln s - \ln \sqrt{2\pi},$$

记  $g(s) = r(s) - r(s+1)$ , 利用递推公式  $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$  得

$$g(s) = \left(s + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{s}\right) - 1.$$

$g(s)$  是  $(0, +\infty)$  中的凸函数:

$$g''(s) = \frac{1}{2s^2(s+1)^2} > 0.$$

在 Taylor 展开

$$\ln \frac{1+t}{1-t} = 2\left(\frac{t}{1} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \cdots\right) \quad (|t| < 1)$$

中代入  $t = (2s+1)^{-1}$  得

$$g(s) = \frac{1}{3(2s+1)^2} + \frac{1}{5(2s+1)^4} + \frac{1}{7(2s+1)^6} + \cdots,$$

由此得到如下估计

$$0 < g(s) < \frac{1}{3(2s+1)^2} \left[ 1 + \frac{1}{(2s+1)^2} + \frac{1}{(2s+1)^4} + \cdots \right] = \frac{1}{12s(s+1)}.$$

记  $\mu(s) = \sum_{n=0}^{\infty} g(s+n)$ , 则上式表明  $\mu(s)$  在  $(0, +\infty)$  中内闭一致收敛, 且

$$0 < \mu(s) < \frac{1}{12} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{s+n} - \frac{1}{s+n+1} \right) = \frac{1}{12s}.$$

因为  $g(s)$  为凸函数, 故  $\mu(s)$  也是凸函数. 根据定义,

$$\mu(1) = \sum_{n=1}^{\infty} g(n) = \sum_{n=1}^{\infty} [r(n) - r(n+1)] = r(1) = 1 - \ln \sqrt{2\pi},$$

其中  $\lim_{n \rightarrow \infty} r(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$  是因为我们已有阶乘的 Stirling 公式.

记  $f(s) = \sqrt{2\pi}s^{s-1/2}e^{-s}e^{\mu(s)}$ , 我们验证  $f$  满足定理 16.3.2 的三个条件. 首先有

$$\frac{f(s+1)}{f(s)} = \left(1 + \frac{1}{s}\right)^{s+1/2} s e^{-1} e^{-g(s)} = s,$$

这说明  $f$  满足第一个条件. 第二个条件:

$$f(1) = \sqrt{2\pi}e^{-1}e^{\mu(1)} = 1.$$

第三个条件:

$$\ln f(s) = \ln \sqrt{2\pi} + (s-1/2) \ln s - s + \mu(s),$$

这是凸函数的和, 因此  $\ln f$  是凸函数. 根据定理 16.3.2, 我们就得到等式

$$\Gamma(s) = \sqrt{2\pi}s^{s-1/2}e^{-s}e^{\mu(s)} = \sqrt{2\pi}s^{s-1/2}e^{-s}e^{\frac{\theta}{12s}}, \quad (16.11)$$

其中  $0 < \theta < 1$ . 这就是 Gamma 函数的 Stirling 公式.

注.  $f(s) = \Gamma(s)$  说明  $r(s) = \mu(s)$ . 以上的证明用到了定理 16.3.2, 我们也可以直接证明  $r(s)$  关于  $s$  单调递减趋于零, 从而避开定理 16.3.2.

事实上, 根据 Gamma 函数的乘积表示, 有

$$\ln \Gamma(s) = -\gamma s - \ln s + \sum_{n=1}^{\infty} [s/n - \ln(1 + s/n)],$$

逐项求导, 得

$$(\ln \Gamma(s))' = -\gamma - \frac{1}{s} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{n} - \frac{1}{s+n} \right],$$

这个级数在  $(0, +\infty)$  中内闭一致收敛, 因此逐项求导是可行的. 利用 Euler 常数的定义, 有

$$\begin{aligned} (\ln \Gamma(s))' &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \ln n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right] - \frac{1}{s} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left[ \frac{1}{k} - \frac{1}{s+k} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \ln n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{s+k} \right] - \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

因为  $\varphi(t) = \frac{1}{t+s}$  是凸函数, 故

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t+s} < \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s+k} + \frac{1}{s+k+1} \right], \quad \forall k \geq 0.$$

因此有

$$\frac{1}{2} \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \cdots + \frac{1}{s+n} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+n+1} > \sum_{k=0}^n \int_k^{k+1} \frac{dt}{t+s} = \ln(s+n+1) - \ln s,$$

这说明

$$(\ln \Gamma(s))' \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \ln n - \ln(s+n+1) + \ln s + \frac{1}{2} \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+n+1} \right] - \frac{1}{s} = \ln s - \frac{1}{2s},$$

从而

$$r'(s) = (\ln \Gamma(s))' + 1 - \ln s - \left(s - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{s} \leq 0.$$

这说明  $r(s)$  单调递减. 记  $C = \lim_{s \rightarrow +\infty} r(s)$ , 则

$$r(s) - C = \sum_{n=0}^{\infty} [r(s+n) - r(s+n+1)] = \sum_{n=0}^{\infty} g(s+n) = \mu(s),$$

根据  $r(s)$  的定义就得到

$$\Gamma(s) = \sqrt{2\pi} e^{-s} s^{s-1/2} e^{C+\mu(s)}, \quad s > 0.$$

上式代入倍元公式, 化简可得

$$e^{\mu(2s)} = e^{C+\mu(s)+\mu(s+1/2)-1/2} \left(1 + \frac{1}{2s}\right)^s, \quad s > 0.$$

因为  $0 < \mu(s) < (12s)^{-1}$ , 在上式中令  $s \rightarrow +\infty$  可得

$$1 = e^C,$$



即  $C = 0$ , 从而再次得到 (16.11).

象阶乘的 Stirling 公式一样, 利用 Euler-Maclaurin 公式可以得到 (16.11) 中  $\mu(s)$  的更精确的估计.

### 习题 16.3

1. 证明 Beta 函数在定义域内无限次可微.

2. 证明下列递推关系:

$$pB(p, q+1) = qB(p+1, q), \quad B(p+1, q+1) = \frac{pq}{(p+q)(p+q+1)}B(p, q).$$

3. 证明下列等式, 其中  $m, n$  为正整数:

$$B(p, n) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)}{p \cdot (p+1) \cdot (p+2) \cdots (p+n-1)}, \quad B(m, n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}.$$

4. 证明 Gamma 函数在其定义域内无限次可微.

5. 证明等式

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}.$$

6. 计算下列积分:

$$(1) \int_0^1 \sqrt{x-x^2} dx, \quad (2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^6 t dt, \quad (3) \int_0^{+\infty} e^{-x^k} dx \quad (k > 0).$$

7. 计算下列积分:

$$(1) \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^p} \quad (p > 1), \quad (2) \int_0^1 t^{p-1}(1-t^m)^{q-1} dt \quad (p, q, m > 0).$$

8. 用余元公式证明  $\int_0^1 \ln \Gamma(s) ds = \ln \sqrt{2\pi}$ .

9. 证明等式

$$\frac{d^2}{ds^2} \ln \Gamma(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(s+n)^2} \quad (s > 0).$$

10. 用 Gamma 函数的极限表示证明倍元公式.

11. 证明  $\ln B(p, q)$  是变量  $p$  在  $(0, +\infty)$  内的凸函数, 并重新证明定理 16.3.1.

12. 证明 Gauss 乘积公式:

$$\Gamma(s)\Gamma\left(s + \frac{1}{n}\right)\Gamma\left(s + \frac{2}{n}\right) \cdots \Gamma\left(s + \frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{(n-1)/2} n^{1/2-n} \Gamma(ns), \quad \forall s > 0.$$

## §16.4 Fourier 变换回顾

我们回顾一下, 假设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上绝对可积, 根据第十章第五节最后的讨论,  $f$  的 Fourier 积分定义为

$$f(x) \sim \int_0^{+\infty} [a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda,$$

其中

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda t dt, \quad b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \lambda t dt.$$

Fourier 积分也可以表示为

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda(x-t) dt,$$

我们来讨论在什么条件下上式是等式.

**定理 16.4.1.** 设  $f(x)$  是  $(-\infty, +\infty)$  上的连续分段可导函数, 如果  $f(x)$  绝对可积, 则

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda(x-t) dt. \quad (16.12)$$

**证明.** 因为  $f(x)$  绝对可积, 故积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda(x-t) dt$$

关于  $\lambda$  一致收敛, 因此, 由定理 16.2.7, 对任意  $A > 0$ , 有

$$\begin{aligned} S(A, x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^A d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda(x-t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_0^A f(t) \cos \lambda(x-t) d\lambda \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\sin A(x-t)}{x-t} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin At}{t} dt. \end{aligned}$$

在  $[1, +\infty)$  中, 因为  $f$  绝对可积, 由 Riemann-Lebesgue 引理, 存在  $A_1 > 0$ , 当  $A > A_1$  时

$$\left| \int_1^{+\infty} [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin At}{t} dt \right| < \varepsilon.$$

在  $[0, 1]$  上, 因为  $\frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t}$  是分段连续函数, 同样由 Riemann-Lebesgue 引理, 存在  $A_2 > 0$ , 当  $A > A_2$  时

$$\left| \int_0^1 [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)] \frac{\sin At}{t} dt \right| < \varepsilon.$$

又因为

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} 2f(x) \frac{\sin t}{t} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} 2f(x) \frac{\sin At}{t} dt,$$

故存在  $A_3$ , 当  $A > A_3$  时,

$$\left| f(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^1 2f(x) \frac{\sin At}{t} dt \right| = \left| \frac{1}{\pi} \int_1^{+\infty} 2f(x) \frac{\sin At}{t} dt \right| = \left| \frac{1}{\pi} \int_A^{+\infty} 2f(x) \frac{\sin t}{t} dt \right| < \varepsilon,$$

总之, 当  $A > A_0 = \max\{A_1, A_2, A_3\}$  时,

$$\begin{aligned} |S(A, x) - f(x)| &\leq \frac{1}{\pi} \left| \int_1^{+\infty} [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin At}{t} dt \right| \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \left| \int_0^1 [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)] \frac{\sin At}{t} dt \right| \\ &\quad + \left| f(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^1 2f(x) \frac{\sin At}{t} dt \right| \\ &< \frac{1}{\pi} \varepsilon + \frac{1}{\pi} \varepsilon + \varepsilon, \end{aligned}$$

这说明

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} S(A, x) = f(x),$$

即等式 (16.12) 成立. □

注. 如果  $f$  分段可导, 但有间断点, 则在间断点处 (16.12) 左端应为  $[f(x-0) + f(x+0)]/2$ .

如果  $f$  是满足上述条件的连续偶函数, 则积分公式可写为

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos \lambda x d\lambda \int_0^{+\infty} f(t) \cos \lambda t dt, \quad (\text{Fourier 余弦公式}).$$

类似地, 当  $f$  为奇函数时

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin \lambda x d\lambda \int_0^{+\infty} f(t) \sin \lambda t dt, \quad (\text{Fourier 正弦公式}).$$

**例 16.4.1.** 计算函数  $f(x) = e^{-\beta x}$  ( $\beta > 0, x > 0$ ) 的 Fourier 余弦公式和正弦公式.

**解.** 用分部积分计算 Fourier 系数:

$$\int_0^{+\infty} f(t) \cos \lambda t dt = \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \cos \lambda t dt = \frac{\beta}{\beta^2 + \lambda^2},$$

由余弦公式得

$$e^{-\beta x} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\beta}{\beta^2 + \lambda^2} \cos \lambda x d\lambda \quad (\beta > 0, x \geq 0).$$

同理,

$$\int_0^{+\infty} f(t) \sin \lambda t dt = \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \sin \lambda t dt = \frac{\lambda}{\beta^2 + \lambda^2},$$

由正弦公式得

$$e^{-\beta x} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{\beta^2 + \lambda^2} \sin \lambda x d\lambda \quad (\beta > 0, x > 0).$$

特别地, 我们得到如下积分公式

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha t}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^2} \sin \alpha t dt = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

**例 16.4.2.** 解积分方程

$$\int_0^{+\infty} g(t) \sin xt dt = f(x),$$

其中

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \sin x, & x \in [0, \pi], \\ 0, & x \in (\pi, +\infty). \end{cases}$$

**解.** 将  $f(x)$  奇延拓为  $(-\infty, +\infty)$  上的函数, 由正弦公式, 有

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin \lambda x dx \int_0^{+\infty} g(t) \sin xt dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi}{2} \sin x \sin \lambda x dx = \frac{\sin \pi \lambda}{1 - \lambda^2}. \end{aligned}$$

一般地, 如果积分中出现的是  $\cos x$  函数, 则可作偶延拓后再用 Fourier 积分.



以下内容可以作为选读材料.

**定义 16.4.1** (Fourier 变换). 设  $f$  在  $(-\infty, +\infty)$  上可积且绝对可积, 令

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

称  $\hat{f}$  为  $f$  的 Fourier 变换.

Fourier 积分公式可以改写成复数形式: 由  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda(x-t) dt$  关于  $\lambda$  为偶函数, 故 Fourier 积分可写为

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda(x-t) dt,$$

而  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \lambda(x-t) dt$  关于  $\lambda$  为奇函数, 故 (至少在主值意义下)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \lambda(x-t) dt = 0.$$

因此有

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\lambda(x-t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda. \end{aligned}$$

这个等式称为 Fourier 变换的反演公式. 当然, 上面的推导是形式上的推导, 为了得出反演公式成立的条件, 我们先看 Fourier 变换的几个基本性质. 以下用记号

$$f(x) \longrightarrow \hat{f}(\omega)$$

表示  $\hat{f}$  是  $f$  的 Fourier 变换.

- 设  $h \in \mathbb{R}$ , 则  $f(x+h) \longrightarrow \hat{f}(\omega)e^{i\omega h}$ ,  $f(x)e^{-ixh} \longrightarrow \hat{f}(\omega+h)$ .
- 设  $\delta \neq 0$ , 则  $f(\delta x) \longrightarrow \delta^{-1}\hat{f}(\delta^{-1}\omega)$ . 以上两条通过简单的变量替换即可得出.
- $\hat{f}(\omega)$  是  $\omega$  的连续函数, 且当  $\omega \rightarrow \infty$  时,  $\hat{f}(\omega) \rightarrow 0$ .  $\hat{f}$  的连续性可以从积分关于  $\omega$  的一致收敛性得出, 第二个结论由 Riemann-Lebesgue 引理得出.
- 设  $f$  为连续的分段可微函数,  $f'$  可积且绝对可积, 则  $f'(x) \longrightarrow i\omega\hat{f}(\omega)$ . 先说明  $x \rightarrow \infty$  时  $f(x) \rightarrow 0$ . 事实上, 任给  $\varepsilon > 0$ , 由  $f'$  绝对可积知, 存在  $A_0 > 0$ , 当  $B > A > A_0$  时

$$|f(B) - f(A)| = \left| \int_A^B f'(x) dx \right| \leq \int_A^B |f'(x)| dx < \varepsilon,$$

这说明极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在. 由  $f$  绝对可积知此极限必为零.  $x \rightarrow -\infty$  的情形完全类似. 这样, 根据分部积分公式就容易得出欲证结论.

- 如果  $xf(x)$  也是绝对可积的, 则  $\hat{f}$  可导, 且  $-ixf(x) \longrightarrow \hat{f}'(\omega)$ . 这条性质的证明留作习题.

下面我们计算两个 Fourier 变换的例子.

**例 16.4.3.** 求区间  $[-1, 1]$  上特征函数  $\chi$  的 Fourier 变换.

**解.** 根据定义, 有

$$\hat{\chi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-i\omega t} dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \cos \omega t dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \omega}{\omega}.$$

**例 16.4.4.** 求函数  $f(x) = e^{-x^2}$  的 Fourier 变换.

解. 利用例 16.2.6 的结果, 有

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cos \omega t dt = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\omega^2/4}.\end{aligned}$$

一般地, 当  $\delta > 0$  时, 根据 Fourier 变换的性质可知

$$e^{-\frac{\delta}{2}x^2} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\frac{\omega^2}{2\delta}}.$$

如果记上式右端为  $K_\delta$ , 则不难验证

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_\delta(x) dx = \sqrt{2\pi}, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{|x| \geq \eta} K_\delta(x) dx = 0, \quad \forall \eta > 0. \quad (16.13)$$

设  $f, g$  均满足 Fourier 变换的条件, 则由于  $\hat{f}, \hat{g}$  为有界连续函数, 故  $f(x)\hat{g}(x)$  和  $g(x)\hat{f}(x)$  仍可积 (绝对可积). 任取  $A > 0$ , 有

$$\begin{aligned}\int_{-A}^A f(x)\hat{g}(x) dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^A f(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-ixt} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt \int_{-A}^A f(x) e^{-ixt} dx.\end{aligned}$$

利用一致收敛性, 在上式中令  $A \rightarrow +\infty$  得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{g}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\hat{f}(t) dt. \quad (16.14)$$

上式称为 Fourier 变换的乘积公式.

**例 16.4.5.** 用乘积公式计算积分.

设  $\delta > 0$ , 取  $f(x) = e^{-\delta|x|}$ ,  $g(x) = \chi_{[-1,1]}$  是  $[-1, 1]$  上的特征函数, 则由前面的例子, 有

$$\hat{f}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\delta^2}{\delta^2 + t^2}, \quad \hat{g}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin t}{t}.$$

代入乘积公式得

$$\int_0^{\infty} e^{-\delta x} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{\delta^2}{\delta^2 + t^2} dt = \arctan \frac{1}{\delta}.$$

在上式中令  $\delta \rightarrow 0^+$  得

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

读者可以将本章第二节中相应的积分例子和本例对照起来看. □

乘积公式有许多别的应用. 首先, 我们利用它来推导 Fourier 反演公式. 为此, 我们假设  $f$  连续,  $f$  和  $\hat{f}$  绝对可积. 在乘积公式中取  $g = e^{-\delta x^2/2}$ , 得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) K_{\delta}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{-\frac{\delta}{2} t^2} dt.$$

在上式中令  $\delta \rightarrow 0^+$ , 利用 (16.13) 和已知条件不难得到 (对照定理 10.5.1 的证明)

$$\sqrt{2\pi} f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) dt.$$

对于  $f(x+h)$  来说, 上式成为

$$f(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{iht} dt. \quad (16.15)$$

这也就是 Fourier 反演公式. 反演公式也可以写为

$$f(x) = \hat{\hat{f}}(-x), \quad f(-x) = \hat{\hat{f}}(x).$$

如果  $f$  满足反演公式的条件, 在乘积公式中令  $g(x) = \overline{\hat{f}(x)}$ , 此时  $\hat{g}(x) = \overline{f(x)}$ , 代入乘积公式得

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(x)|^2 dx. \quad (16.16)$$

上式称为 **Plancherel 公式**, 它对应着 Fourier 级数中的 Parseval 等式.

Plancherel 公式在弱一些的条件下也成立, 例如, 当  $f$  满足 Fourier 变换的条件, 且  $|f|^2$  可积时 (16.16) 仍成立. 这可以用光滑逼近的方法来做. 事实上, 任给  $m \geq 1$ , 可以找到 (习题) 具有紧支集连续分段光滑函数  $f_m$ , 使得

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_m - f|^2 dx < \frac{1}{m}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f_m - f| dx < \frac{1}{m}.$$

由 Fourier 变换的定义易见

$$|\hat{f}_m(t) - \hat{f}(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{m}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (16.17)$$

$f_m$  满足反演公式的条件, 因此, 任给  $A > 0$ , 有

$$\begin{aligned} \int_{-A}^A |\hat{f}_m(t) - \hat{f}_n(t)|^2 dt &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}_m(t) - \hat{f}_n(t)|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f_m(x) - f_n(x)|^2 dx \\ &\leq 2 \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |f_m(x) - f(x)|^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f(x)|^2 dx \right] \\ &< 2 \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 利用 (16.17) 得

$$\int_{-A}^A |\hat{f}_m(t) - \hat{f}(t)|^2 dt \leq \frac{2}{m}.$$

由上式易见

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(t)|^2 dt &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}_m(t)|^2 dt \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_m(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

即 Plancherel 公式对  $f$  成立.

设  $f$  或  $g$  满足反演公式的条件, 则对任意  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x-t)g(t)$  关于  $t$  可积 (绝对可积), 定义

$$f * g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (16.18)$$

函数  $f * g$  称为  $f$  和  $g$  的卷积. 易见  $f * g = g * f$ . 可以证明 (习题),  $f * g$  为有界连续函数, 且对于任意  $A > 0$ , 均有

$$\begin{aligned} \int_{-A}^A |f * g(x)|dx &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^A dx \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)g(t)|dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|dt \int_{-A}^A |f(x-t)|dx \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|dt \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx. \end{aligned}$$

这说明  $f * g$  绝对可积, 因此可以考虑它的 Fourier 变换. 事实上, 考虑定义在  $(-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$  上的函数  $F(x, y) = f(x-y)g(y)e^{-i\omega x}$ , 对  $F(x, y)$  利用定理 16.2.9 及其注记, 得

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y)dx,$$

因此

$$\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f * g(x)e^{-i\omega x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-i\omega y}dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt,$$

这说明

$$f * g(x) \longrightarrow \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega). \quad (16.19)$$

这是卷积的 Fourier 变换公式. 在弱一些的条件下, 上式也成立, 例如当  $f$  或  $g$  有界时就是如此.

最后我们介绍 Fourier 分析的若干应用.

(1) Poisson 求和公式.



设  $f$  为连续函数. 如果存在常数  $\varepsilon, C > 0$ , 使得

$$|f(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{1+\varepsilon}}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

则称  $f$  为缓降函数. 此时, 令

$$F(x) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+2\pi n), \quad x \in \mathbb{R}.$$

因为上式右端在任意闭区间上一致收敛, 故  $F$  是周期为  $2\pi$  的周期函数, 称为  $f$  的周期化. 我们计算它的 Fourier 展开的系数如下:

$$\begin{aligned} c_m &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) e^{-imx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+2\pi n) e^{-imx} dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+2\pi n) e^{-imx} dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\pi(2n-1)}^{\pi(2n+1)} f(y) e^{-imy} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-imy} dy = \sqrt{2\pi} \hat{f}(m). \end{aligned}$$

如果进一步假设  $\hat{f}$  也是缓降函数, 则函数项级数

$$\sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx}$$

一致收敛, 其和为连续周期函数, 且 Fourier 系数与  $F$  相同. 根据 Fourier 展开的唯一性 (推论 10.3.3) 即得

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+2\pi n) = \sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (16.20)$$

这个等式称为 Poisson 求和公式.

#### 例 16.4.6. Poisson 核.

设  $\delta > 0$ , 考虑函数  $\mathcal{P}_{\delta}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\delta}{x^2 + \delta^2}$ ,  $\mathcal{P}_{\delta}$  称为上半平面的 Poisson 核. 由例 16.4.1 知  $\hat{\mathcal{P}}_{\delta}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\delta|\omega|}$ . 于是  $\mathcal{P}_{\delta}$  满足 Poisson 求和公式的条件, 从而有

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\delta}{(x+2\pi n)^2 + \delta^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\delta|n|} e^{inx}. \quad (16.21)$$

令  $r = e^{-\delta}$ , 上式右端记为  $P_r(x)$ , 称为单位圆盘的 Poisson 核. 直接的计算表明

$$P_r(x) = \frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2}.$$

如果在 (16.21) 中代入上式, 两边除以  $2\delta$ , 再令  $\delta \rightarrow 0^+$ , 则当  $x \neq 2k\pi$  时有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+2\pi n)^2} = \frac{1}{2(1-\cos x)},$$

将上式中的  $x$  改写为  $2x$  后就又得到了如下等式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+\pi n)^2} = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq k\pi.$$

**例 16.4.7. Gauss 核.**

设  $t > 0$ , 考虑函数  $G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ , 则  $\hat{G}_t(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\omega^2 t}$ . 由 Poisson 求和公式得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{(x+2\pi n)^2}{4t}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 t} e^{inx}, \quad (16.22)$$

上式右端记为  $H_t(x)$ , 由左端可知它是正函数, 在下面的应用中我们将用到它.

当  $s > 0$  时定义

$$\vartheta(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \pi s},$$

称为 **Theta 函数**. 在 (16.22) 中令  $x = 0$ ,  $t = \pi s$  可以得到下面非平凡的等式

$$\vartheta(s) = s^{-1/2} \vartheta(1/s), \quad \forall s > 0. \quad (16.23)$$

值得指出的是, Theta 函数和 Riemann-Zeta 函数之间有非常紧密的联系.  $\square$

(2) 圆周上的热传导问题.

设单位圆周  $S^1$  上分布着某种物质, 在初始时刻  $t = 0$  时物质的温度为  $f(x)$ , 其中  $x \in S^1$ . 我们可以将  $S^1$  上的函数视为  $\mathbb{R}$  上周期为  $2\pi$  的周期函数. 所谓热传导问题就是: 在时刻  $t > 0$  时, 物质的温度等于多少? 这也就是 Fourier 当初所考虑过的问题.

以  $u(x, t)$  记时刻  $t > 0$  时  $x \in S^1$  处的温度. 温度的变化遵循着一定的物理规律, 用数学方程可描述为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (16.24)$$

其中  $u(x, t)$  关于变量  $x$  周期为  $2\pi$ , 且  $u(x, 0) = f(x)$ . 我们用所谓的“分离变量法”来寻找方程的解. 即寻找形如

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

的解. 将上式代入方程 (16.24) 得

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t).$$

如果存在常数  $\lambda$ , 使得

$$X''(x) = \lambda X(x), \quad T'(t) = \lambda T(t),$$

则  $u(x, t) = X(x)T(t)$  是 (16.24) 的解. 因为  $X(x)$  是周期为  $2\pi$  的周期函数, 根据第四章第五节的讨论可知,  $\lambda = -n^2$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . 此时  $X(x)$  是  $\sin nx$  和  $\cos nx$  的线性组合, 或者说是  $e^{inx}$  和  $e^{-inx}$  的线性组合, 而  $T(t)$  是  $e^{-n^2 t}$  的常数倍. 总之,  $u(x, t)$  可取为下面的形式解:

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} e^{inx}. \quad (16.25)$$

由于  $u(x, 0) = f(x)$ , 因此在上式中应取  $c_n$  为  $f$  的 Fourier 系数.

如果  $f$  为 Riemann 可积函数, 则  $\{c_n\}$  有界. 当  $t > 0$  时, 易见 (16.25) 右端一致收敛, 并且和函数  $u(x, t)$  关于  $x, t$  任意次可导, 由此可验证  $u(x, t)$  的确是方程 (16.24) 的解. 为了检验初始条件  $u(x, 0) = f(x)$  是否成立, 我们下面假设  $f$  是连续函数. 注意, 因为连续函数的 Fourier 展开不必收敛 (Fourier 当初并未考虑到这个问题), 因此我们不能在 (16.25) 中简单地取  $t = 0$ . 我们将要说明的是

$$\text{当 } f \text{ 连续时, } \lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = f(x), \quad \forall x \in S^1.$$

为此我们将 (16.25) 改写如下

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy \right] e^{-n^2 t} e^{inx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 t} e^{in(x-y)} f(y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_t(x-y) f(y) dy, \end{aligned} \quad (16.26)$$

其中  $H_t$  就是 (16.22) 中的函数, 现在我们称之为圆周的热核. 我们已经知道  $H_t$  是正函数, 它还具有以下性质 (对照 (16.13)):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_t(x) dx = 1, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\eta < |x| \leq \pi} H_t(x) dx = 0, \quad \eta > 0. \quad (16.27)$$

先看第一条性质, 当  $t > 0$  时, 由 (16.22) 得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_t(x) dx &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{4\pi t}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{(x+2\pi n)^2}{4t}} dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{4\pi t}} \int_{\pi(2n-1)}^{\pi(2n+1)} e^{-\frac{x^2}{4t}} dx \\ &= \sqrt{\frac{1}{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4t}} dx = 1. \end{aligned}$$

至于第二条性质, 先将  $H_t$  改写为

$$H_t(x) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} + E_t(x),$$

其中  $E_t(x)$  可如下估计 ( $0 < t < 1$ )

$$\begin{aligned} 0 < E_t(x) &= \sum_{|n| \geq 1} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{(x+2\pi n)^2}{4t}} \\ &< \sum_{n=1}^{\infty} 2\sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{2n^2}{t}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2\sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{n^2}{t}} e^{-\frac{n^2}{t}} \\ &< \sum_{n=1}^{\infty} 2\sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-n^2} e^{-\frac{1}{t}} = Ct^{-1/2} e^{-1/t}. \end{aligned}$$

再由

$$\int_{\eta < |x| \leq \pi} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} = \sqrt{4\pi} \int_{\frac{\eta}{\sqrt{4t}} < |y| \leq \frac{\pi}{\sqrt{4t}}} e^{-y^2} dy \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow 0^+)$$

即知 (16.27) 中  $H_t(x)$  的第二条性质成立. 利用 (16.27), 由  $f$  的连续性可得

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_t(x-y) f(y) dy = f(x), \quad \forall x \in S^1.$$

由 (16.26) 知  $u(x, t)$  满足初始条件.

解的惟一性: 如果  $u_1, u_2$  均满足方程 (16.24) 以及具有相同初始条件, 令  $u = u_1 - u_2$ , 则  $u$  也满足 (16.24) 且  $u(x, 0) = 0$ . 考虑

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} u^2(x, t) dt,$$

则 (用到  $u$  的周期性)

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} u(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} dx = \int_{-\pi}^{\pi} u(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \\ &= u \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \\ &= - \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \leq 0. \end{aligned}$$

由  $E(0) = 0$  即知  $E(t) \leq 0$ , 从而  $u(x, t) \equiv 0$ , 这说明满足相同初始条件的光滑解是惟一的.  $\square$

(3) 直线上的热传导问题.

现在我们考虑直线  $\mathbb{R}$  上的热传导问题. 给定  $\mathbb{R}$  上的函数  $f(x)$ , 问题是解热方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (16.28)$$

其中  $u(x, 0) = f(x)$ .

以下假设  $f$  连续, 且  $f$  在  $\mathbb{R}$  上绝对可积. 像在圆周上所做过的那样, 当  $\omega \in \mathbb{R}$  时,  $e^{-\omega^2 t} e^{i\omega x}$  均满足 (16.28). 此时, (16.25) 中关于  $n$  的求和现在应写为关于  $\omega$  的积分:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 t} e^{i\omega x} c(\omega) d\omega, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

由于要求  $u(x, 0) = f(x)$ , 对比 Fourier 反演公式可知在上式中应取  $c(\omega) = \hat{f}(\omega)$ . 由于  $\hat{f}$  为有界连续函数, 故当  $t > 0$  时, 所构造的函数  $u(x, t)$  关于  $x, t$  是光滑的, 并且的确满足方程 (16.28).

为了验证初始条件, 先将  $u(x, t)$  改写如下:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 t} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 t} e^{i\omega x} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\omega y} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 t} e^{i\omega(x-y)} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y) dy. \end{aligned}$$

这种表达形式也可以这样得到: 对 (16.28) 两边关于  $x$  做形式上的 Fourier 变换, 得

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\omega, t) = -\omega^2 \cdot \hat{u}(\omega, t),$$

从而解出  $\hat{u}(\omega, t) = c(\omega) e^{-\omega^2 t}$ . 以  $t = 0$  代入知应取  $c(\omega) = \hat{f}(\omega)$ . 由于

$$\frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \longrightarrow e^{-\omega^2 t},$$

根据 Fourier 变换的卷积性质再一次得到

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y) dy, \quad t > 0. \quad (16.29)$$

利用上式不难验证  $u(x, t) \rightarrow f(x)$  ( $t \rightarrow 0^+$ ). 此外, 如果  $f^2$  在  $\mathbb{R}$  上可积, 则利用 Plancherel 公式可得

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t) - f(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(\omega, t) - \hat{f}(\omega)|^2 d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 |e^{-\omega^2 t} - 1|^2 d\omega \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow 0^+). \end{aligned}$$

解的惟一性: 跟圆周的情形不同, 如果不对  $u(x, t)$  关于  $x$  的增长性附加进一步的限制, 那么 (16.28) 的解不是惟一的, 例如  $\frac{x}{t} G_t(x)$  就是初始条件为零的另一个解. 如果  $u, \frac{\partial u}{\partial x}$  关于  $x$  为缓降函数, 则可类似于圆周的情形证明这种解是惟一存在的.  $\square$

(4) 单位圆盘上的 Dirichlet 问题.

考虑平面单位圆盘  $\mathbb{D}$  上热传导问题. 如果在边界  $S^1$  上给定温度分布函数  $f$ , 则经过很长一段时间以后, 达到平衡状态的物质的温度分布函数  $u(x, y)$  在圆盘内部满足方程

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (16.30)$$

其中  $\Delta$  是平面 Laplace 算子, 满足  $\Delta u = 0$  的函数称为调和函数. 方程 (16.30) 连同边值条件  $u|_{S^1} = f$  称为 (圆盘上的) Dirichlet 问题.

我们仍用分离变量法来解 (16.30), 不过, 为了利用边值条件, 采用如下极坐标

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad (0 \leq r < 1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi)$$

要好一些. 此时方程 (16.30) 可以写成

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

以  $u(r, \theta) = R(r)S(\theta)$  代入上式得

$$S''(\theta) + \lambda S(\theta) = 0, \quad r^2 R''(r) + r R'(r) - \lambda R(r) = 0,$$

其中  $\lambda$  为常数. 由于  $S$  是关于  $\theta$  的周期函数, 周期为  $2\pi$ , 因此只能取  $\lambda = n^2, n \in \mathbb{Z}$ . 此时

$$S(\theta) = C_1 e^{-in\theta} + C_2 e^{in\theta}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

关于  $R(r)$  的方程, 当  $n = 0$  时

$$r(rR')' = 0,$$

此时  $R(r) = C_1 + C_2 \ln r$ . 当  $n \neq 0$  时, 令  $g(r) = r^{-n} R(r)$ , 代入方程化简后得

$$r^{n+2} g'' + (2n+1) r^{n+1} g' = 0,$$

这说明

$$(r^{2n+1} g')' = (2n+1) r^{2n} g' + r^{2n+1} g'' = 0,$$

于是

$$g(r) = C_1 r^{-2n} + C_2, \quad R(r) = r^n g(r) = C_1 r^{-n} + C_2 r^n.$$

如果要求  $u$  在圆盘内部有界, 则我们必须舍弃象  $\ln r, r^{-1}$  这样的解. 因此, 我们寻找的解应形如

$$u(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\theta}. \quad (16.31)$$

由于我们希望  $u(1, \theta) = f(\theta)$ , 在上式中就应取  $c_n$  为  $f$  的 Fourier 系数. 以下假设  $f$  为连续函数, 则  $\{c_n\}$  有界, 从而 (16.31) 式右端在圆盘内部是内闭一致收敛的, 和函数  $u(r, \theta)$  在圆盘内部是光滑函数, 且可逐项求导. 于是可验证 (16.31) 式给出了方程 (16.30) 的一个解.

(16.31) 式也可以改写为

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\theta} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \cdot r^{|n|} e^{in\theta} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta-t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t) f(t) dt,\end{aligned}$$

即

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t) f(t) dt, \quad (16.32)$$

其中  $P_r$  是 Poisson 核, 请读者验证它具有以下性质 ( $0 < \eta < \pi$ ):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta) d\theta = 1, \quad \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\eta < |\theta| \leq \pi} P_r(\theta) d\theta = 0.$$

利用这些性质和 (16.32) 可得

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} u(r, \theta) = f(\theta),$$

且极限关于  $\theta$  是一致, 这说明我们找到的解满足边值条件.

解的惟一性: 如果  $u_1, u_2$  均为 Dirichlet 问题的解, 令  $u = u_1 - u_2$ , 则  $\Delta u = 0$ . 当  $u$  连续到圆盘的边界, 且在边界上恒为零时, 我们证明  $u$  在圆盘内部也恒为零. (反证法) 假设  $p_0 \in \mathbb{D}$ , 且  $u(p_0) \neq 0$ . 不妨设  $u(p_0) < 0$ . 考虑函数

$$v = u - \frac{1}{2} u(p_0) (1 - r^2),$$

则  $v(p_0) < 0$ ,  $v|_{S^1} = 0$ . 由于  $v$  在闭圆盘上连续, 因此它在圆盘的内部, 比如  $q_0$  处达到最小值. 此时

$$\Delta v(q_0) \geq 0.$$

另一方面,

$$\Delta v = \Delta u - \frac{1}{2} u(p_0) \Delta(1 - r^2) = 2u(p_0) < 0,$$

这就得出了矛盾. □

(5) 上半平面上的 Dirichlet 问题.

最后, 我们考虑上半平面  $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y > 0\}$  的 Dirichlet 边值问题:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, \quad (16.33)$$

边值条件为  $u(x, 0) = f(x)$ , 其中  $f$  为  $\mathbb{R}$  上的连续函数, 并要求  $f$  绝对可积.

我们来寻找 (16.33) 的解. 对 (16.33) 式关于变量  $x$  做形式上的 Fourier 变换, 得

$$-\omega^2 \hat{u}(\omega, y) + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2}(\omega, y) = 0.$$

舍弃指数增长的解后,  $\hat{u}(\omega, y)$  可写为

$$\hat{u}(\omega, y) = c(\omega)e^{-|\omega|y}.$$

考虑边值条件可知, 在上式中应取  $c(\omega) = \hat{f}(\omega)$ . 由于

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{x^2 + y^2} \longrightarrow e^{-|\omega|y},$$

利用 Fourier 变换的卷积性质得

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} f(t) dt. \quad (16.34)$$

当  $y > 0$  时, 从上式不难验证  $u(x, y)$  关于  $x, y$  是光滑的, 且满足方程 (16.33), 它也满足边值条件, 即

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} u(x, y) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

如果  $f$  在无穷远处为零, 即  $f(x) \rightarrow 0, |x| \rightarrow \infty$ , 则上面的极限关于  $x$  还是一致的, 并且此时  $u(x, y)$  在无穷远处也是零, 即

$$\lim_{|x|+y \rightarrow \infty} u(x, y) = 0.$$

解的惟一性: 我们证明, 在上半平面上连续到边界的调和函数如果在边界上恒为零, 且在无穷远处趋于零, 则必为零函数. (反证法) 设  $u(x_0, y_0) \neq 0$ , 不妨设  $u(x_0, y_0) < 0$ . 因为  $u$  在无穷远处趋于零, 故存在充分大的  $a > |x_0| + |y_0|$ , 使得  $u$  在矩形

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid -a \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a\}$$

的边界上满足条件

$$u|_{\partial\Omega} > \frac{1}{2}u(x_0, y_0).$$

令

$$v(x, y) = u(x, y) + \frac{1}{2}u(x_0, y_0)e^{x-a}, \quad (x, y) \in \Omega.$$



则

$$v|_{\partial\Omega} \geq u|_{\partial\Omega} + \frac{1}{2}u(x_0, y_0) > u(x_0, y_0) > v(x_0, y_0),$$

这说明  $v$  在  $\Omega$  的内部某一点, 比如  $q_0$  处达到最小值. 此时  $\Delta v(q_0) \geq 0$ . 另一方面, 在  $\Omega$  内部, 有

$$\Delta v = \frac{1}{2}u(x_0, y_0)e^{x-a} < 0,$$

这就得出了矛盾.

如果不要求  $u(x, y)$  在无穷远处的有界性, 则方程 (16.33) 的解不惟一, 例如  $u(x, y) = y$  是上半平面中的调和函数, 在边界上恒为零, 但它当然不是零函数.  $\square$

#### 习题 16.4

1. 用 Fourier 积分表示下列函数:

$$(1) f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases} \quad (2) f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases} \quad (4) f(x) = e^{-\alpha|x|} \cos \beta x, \quad (\alpha > 0).$$

2. 当  $|x| \leq 1$  时定义  $f(x) = 1 - |x|$ ; 当  $|x| > 1$  时定义  $f(x) = 0$ . 求  $f$  的 Fourier 变换.

3. 求下列函数的 Fourier 变换:

$$(1) f(x) = e^{-\alpha|x|} \cos \beta x \quad (\alpha > 0), \quad (2) f(x) = \frac{1}{\alpha^2 + x^2} \quad (\alpha > 0).$$

4. 求下列积分方程的解:

$$(1) \int_0^{+\infty} f(t) \sin xt dt = e^{-x} \quad (x > 0);$$

$$(2) \int_0^{+\infty} f(t) \cos xt dt = \frac{1}{1+x^2}.$$

5. 证明等式

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} \cos 2xt dt = \begin{cases} 1-x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x \geq 1. \end{cases}$$

6. 设  $\lambda > 0$ , 记

$$\Phi_\lambda(t) = \frac{1}{\pi\lambda} \frac{\sin^2 \lambda t}{t^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

证明

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\lambda}(t) dt = 1, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{|t| \geq \eta} \Phi_{\lambda}(t) dt = 0, \quad \eta > 0.$$

$\Phi_{\lambda}$  称为 Fejér 核.

7. 设  $f$  是  $\mathbb{R}$  上的连续绝对可积函数, 记

$$S(\lambda, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda}^{\lambda} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega, \quad \lambda \geq 0.$$

利用上题证明

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} S(\mu, x) d\mu = f(x).$$

8. 对于区间上的特征函数直接验证 Plancherel 等式的正确性.
9. 证明, 函数  $f$  和它的 Fourier 变换  $\hat{f}$  不能同时具有紧支集.
10. 试在平面圆环形区域  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \rho < x^2 + y^2 < 1\}$  ( $0 < \rho < 1$ ) 中解 Dirichlet 边值问题.
11. 试在平面带形区域  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}, 0 < y < a\}$  ( $a > 0$ ) 中解 Dirichlet 边值问题.



## 参考文献

- [1] Klambauer G. 数学分析. 孙本旺, 译. 长沙: 湖南人民出版社, 1981.
- [2] 菲赫金哥尔茨  $\Gamma$  M. 微积分学教程 (共三卷). 第 8 版. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [3] 华罗庚. 数论导引. 北京: 科学出版社, 1957.
- [4] 华罗庚. 高等数学引论 (共四卷). 北京: 科学出版社, 1979, 1981, 1984.
- [5] 何琛, 史济怀, 徐森林. 数学分析 (共三册). 北京: 高等教育出版社, 1985.
- [6] 李炯生, 查建国. 线性代数. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1989.
- [7] 欧阳光中, 朱学炎, 秦曾复. 数学分析 (上下册). 上海: 上海科学技术出版社, 1982.
- [8] 徐森林, 薛春华. 数学分析 (第一册). 北京: 清华大学出版社, 2005.
- [9] 潘承洞, 于秀源. 阶的估计. 济南: 山东科学技术出版社, 1983.
- [10] 许以超. 线性代数与矩阵论. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2008.
- [11] 宋国柱, 任福贤, 许绍溥, 姜东平. 数学分析教程 (上下册). 南京: 南京大学出版社, 2004.
- [12] 周民强. 数学分析 (共三册). 上海: 上海科学技术出版社, 2002.
- [13] 常庚哲, 史济怀. 数学分析教程 (上下册). 北京: 高等教育出版社, 2003.
- [14] 邹应. 数学分析 (上下册). 北京: 高等教育出版社, 1995.
- [15] 孙本旺, 汪浩. 数学分析中的典型例题和解题方法. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1985.
- [16] 裴礼文. 数学分析中的典型问题和方法. 北京: 高等教育出版社, 1998.
- [17] Andrews G E, Askey R, Roy A. Special functions. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- [18] Apostol T M. Mathematical analysis. 2nd Ed. Reading, Mass: Addison-Wesley, 1974.
- [19] Artin E. The Gamma functions. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1964.
- [20] Courant R, John F. Introduction to calculus and analysis. New York: Springer-Verlag, 1989.
- [21] Federer H. Geometric measure theory. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1969.
- [22] Johnsonbaugh R, Pfaffenberger W E. Foundation of mathematical analysis. New York: Dover Publications, 2002.
- [23] Munkres J R. Analysis on manifolds. Reading, Mass: Addison-Wesley, 1991.

- [24] Rudin W. Principles of mathematical analysis. 3rd Ed. New York: McGraw-Hill, 1976.
- [25] Spivak M. Calculus on manifolds. Reading, Mass: Addison-Wesley, 1965.
- [26] Stein E M, Shakarchi R. Fourier analysis: an introduction, Princeton: Princeton University Press, 2003.
- [27] Stein E M, Shakarchi R. Real analysis: Measure theory, integration, and Hilbert spaces, Princeton: Princeton University Press, 2005.
- [28] Stewart J. Calculus: early transcendental functions. 2 vols. 5th Ed. Pacific Grove: Brooks/Cole, 2002.
- [29] Titchmarsh E C. Introduction to the theory of Fourier integrals. 2nd Ed. Oxford: Oxford University Press, 1948.
- [30] Whittaker E T, Watson G N. A course of modern analysis. 4th Ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1963.
- [31] Zorich V A. Mathematical analysis I, Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2004.
- [32] Zorich V A. Mathematical analysis II, Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2004.

## 索引

- $\varepsilon - \delta$  语言, 65
- $\varepsilon - N$  语言, 26
- $n$  维单形, 475
- $s$  次微分形式, 561
  
- Abel 引理, 293
- Abel 连续性定理, 326
- Abel 判别法, 294, 315
- Abel 变换, 293
- Archimedes 原理, 24
  
- Baire 纲定理, 61, 399
- Bernoulli 多项式, 338
- Bernoulli 数, 334
- Beta 函数, 606
  
- Cauchy 不等式, 10
- Cauchy 列, 396
- Cauchy 余项, 194
- Cauchy 判别法, 267, 284
- Cauchy 乘积, 300
- Cauchy 准则, 49, 72, 279, 313
- Cauchy 数列, 47
- Cauchy 凝聚判别法, 288
- Cauchy-Hadamard 定理, 324
  
- d'Alembert 判别法, 284
- Darboux 下和, 214, 454
- Darboux 上和, 214, 454
- Darboux 定理, 164
- Dedekind 分割, 19
- Dini 判别法, 359
- Dini 定理, 315
- Dirichlet 问题, 629
- Dirichlet 判别法, 294, 314
- Dirichlet 定理, 360
  
- Dirichlet 函数, 73
- Dirichlet 核, 358
  
- Euler 积分, 276
- Euler-Maclaurin 公式, 347
- Euler-Poisson 积分, 274
  
- Fejér 核, 375
- Fermat 定理, 163
- Fibonacci 数列, 337
- Fourier 正弦公式, 618
- Fourier 余弦公式, 618
- Fourier 级数, 354
- Fourier 系数, 353
- Fourier 变换, 619
- Fourier 积分, 384
- Fourier 展开, 354
- Fresnel 积分, 604
  
- Gamma 函数, 606
- Gauss 公式, 530
- Gauss 判别法, 287
- Gauss 核, 625
- Green 公式, 525
  
- Hölder 不等式, 111
- Hölder 函数, 94
- Heine 定理, 71
- Heine-Borel 定理, 58
- Hessian 矩阵, 429
  
- Jacobian 矩阵, 420
- Jensen 不等式, 178
  
- Kummer 判别法, 286
  
- L'Hôpital 法则, 188

- Lagrange 余项, 194
- Lagrange 乘数法, 444
- Lebesgue 数引理, 402
- Lebsegue 定理, 222
- Lebsegue 数引理, 223
- Leibniz 公式, 130
- Leibniz 判别法, 291
- Lipschitz 函数, 94
  
- Machin 公式, 341
- Maclaurin 展开, 196
  
- Newton 方法, 207
- Newton-Cotes, 246
- Newton-Leibniz 公式, 135, 234
  
- Parseval 等式, 365
- Peano 曲线, 351
- Plancherel 公式, 622
- Poincaré 不等式, 381
- Poisson 求和公式, 624
- Poisson 核, 624
  
- Raabe 判别法, 287
- Riemann 可积, 212, 454
- Riemann 和, 212, 454
- Riemann 函数, 84
- Riemann 积分, 212
- Riemann-Lebesgue 引理, 232, 355
- Riemann-Stieltjes 积分, 543
- Riemann-Zeta 函数, 286
  
- Schwarz 不等式, 388
- Simpson 公式, 244
- Stirling 公式, 206, 259, 349, 614
- Stokes 公式, 535, 581
- Stolz 公式, 51
  
- Tauber 型定理, 377
- Taylor 公式, 193, 428
- Theta 函数, 625
  
- Wallis 公式, 239
- Weierstrass 判别法, 314
- Weierstrass 逼近定理, 371, 372
- Wirtinger 不等式, 380
  
- Young 不等式, 109, 178
  
- 一一映射, 12
- 一致收敛, 311, 591
- 一致收敛极限, 585
- 一致连续, 93
  
- 二元函数, 408
- 几何级数, 280
  
- 三角不等式, 10, 389
- 三角多项式, 353
- 三角级数, 353
- 三角函数系, 353
- 下极限, 43
- 下界, 8
- 下确界, 8
- 万能变换, 148
- 上极限, 43
- 上界, 8
- 上确界, 8
- 广义组合数, 336
- 子集, 1
- 子覆盖, 58, 400
  
- 开邻域, 57, 392
- 开球, 391
- 开集, 57, 392
- 开覆盖, 58, 400

- 无穷大量, 77
- 无穷小量, 77
- 无穷级数, 279
- 无穷乘积, 304
- 无穷积分, 262
- 无限集, 3
- 无理数, 7
- 元素, 1
- 不可数集, 3
- 不定积分, 134
- 区间, 8
- 区间的分割, 212
- 比较判别法, 267, 283
- 比值判别法, 284
- 切丛, 556
- 切向量, 415, 416
- 切空间, 416
- 切线, 118, 416
- 切映射, 563
- 内点, 61, 394
- 内积, 387
- 内积空间, 387
- 反函数, 14
- 反函数定理, 174
- 反常积分, 264
- 反演公式, 620
- 介值定理, 91, 406
- 分段可导函数, 360
- 分部求和, 292
- 分部积分, 237
- 分部积分法, 142
- 分割的模, 212, 453
- 方向导数, 411
- 双曲函数, 122
- 正则曲面, 570
- 正则点, 416
- 正弦级数, 354
- 正项级数, 282
- 可去间断点, 84
- 可求长曲线, 499
- 可求面积集, 459
- 可数集, 3
- 左极限, 66
- 左连续, 81
- 右手法则, 525
- 右极限, 66
- 右连续, 81
- 平行多面体, 479
- 凸函数, 177, 429
- 凸集, 425
- 凹函数, 177
- 外点, 394
- 外微分, 566
- 加细, 454
- 边界, 394
- 边界点, 394
- 对偶空间, 556
- 母函数, 336
- 压缩映射, 398
- 压缩映像原理, 398
- 有限集, 3
- 有限覆盖, 400
- 有界变差函数, 500
- 有界性定理, 89
- 有界函数, 16
- 有界集, 8
- 有界数列, 25
- 有理三角函数, 148



- 有理函数, 82, 145  
有理数, 6  
夹逼原理, 28, 67  
至多可数集, 3  
光滑函数, 128  
全变差, 500  
全微分, 124, 423, 556  
交集, 2  
交错级数, 291  
闭区间套原理, 56  
闭球, 392  
闭集, 57, 392  
并集, 2  
导数, 115  
阶梯函数, 219  
收敛半径, 324  
级数发散, 279  
级数收敛, 279  
级数的重排, 307  
  
拟微分中值定理, 426  
极大值, 163  
极大值点, 163  
极小值, 163  
极小值点, 163  
极坐标, 484  
极值, 163, 439  
极值点, 163  
连续可导, 128  
连续曲线, 249  
连续函数, 81  
连续点, 81  
连续映射, 403  
余元公式, 611  
余切丛, 556  
  
余切向量, 556  
余切空间, 556  
余弦级数, 354  
余面积公式, 523  
余集, 3  
含参变量的积分, 585  
条件收敛, 268, 295  
条件极值, 444  
间断点, 81  
完备度量空间, 396  
穷竭, 491  
初等函数, 16  
局部化原理, 359  
  
拉回映射, 563  
拐点, 186  
直径, 397  
范数, 387  
奇函数, 17  
欧氏空间, 387  
周期函数, 17  
变量替换法, 141  
卷积, 623  
单位分解, 577  
单射, 12  
单调函数, 17  
单调数列, 38  
法向量, 416  
法空间, 416  
法线, 118  
法面, 416  
定向, 517, 573  
定积分, 212  
空心开邻域, 65  
实数, 7

弧长参数, 250, 502

函数, 12

函数极限, 65

函数相关, 451

参数曲面, 416

驻点, 164

线性函数, 12

线性映射, 407

指标集, 58

带边曲面, 576

柱面坐标, 486

面积公式, 511

临界点, 164

映射, 11

矩形公式, 243

重极限, 408

重积分的变量替换, 482

复合映射, 14

保序性质, 33

度量, 389

度量空间, 389

逆映射, 14

逆映射定理, 432

恒同映射, 15

诱导定向, 577

绝对收敛, 268, 295

振幅, 96

换元法, 236

换元积分法, 140

热核, 626

真子集, 1

根值判别法, 284

原函数, 134

原象, 11

紧致集合, 58, 400

圆周率, 158, 259

乘积公式, 621

特征函数, 12

积分, 99

积分中值定理, 107, 464

积分余项, 195

积分判别法, 285

积分第一中值定理, 227

积分第二中值定理, 228

倍元公式, 611

高阶导数, 127

离散度量空间, 389

部分和, 279

调和级数, 280

通项, 25, 279

球面坐标, 486

基本列, 47

梯形公式, 244

梯度, 420

常数变易法, 160

累次极限, 408

符号函数, 12

第一型曲线积分, 502

第一型曲面积分, 515

第一类间断点, 84

第二型曲线积分, 505

第二型曲面积分, 518

第二类间断点, 84

偶函数, 17

偏导数, 411

敛散性, 26

旋度, 536

渐近线, 186

隐式曲线, 437  
隐式曲面, 436  
隐映射定理, 435  
  
插值多项式, 171  
超曲面, 570  
散度, 533  
确界原理, 8  
最大值, 163  
最大数, 8  
最小二乘法, 441  
最小值, 163  
最小数, 8  
最值, 163  
最值定理, 90, 406  
链规则, 120, 422  
等周不等式, 378  
集合, 1  
集合族, 58  
道路连通, 406  
幂级数, 324  
缓降函数, 624  
  
瑕积分, 263  
零面积集, 458  
零测集, 221, 457  
零值定理, 90  
跳跃间断点, 84  
微分, 119, 419  
微分中值公式, 169  
微分中值定理, 169, 425  
微分方程, 156  
微分形式, 557  
微积分基本定理, 136, 234  
数列, 25  
数列极限, 25

数集, 8  
满射, 12  
  
算术-几何平均值不等式, 170, 179  
  
覆盖, 58, 400  
覆盖引理, 474